

# Nombres $p$ -adiques

---

**Exercice 1** Les nombres 15,  $-2$  et  $-1$  sont-ils inversibles dans  $\mathbb{Z}_3$ . Si oui, calculer leur inverse à  $3^3$  près.

**Exercice 2** Donner la représentation canonique de

1.  $\frac{1}{5}$  dans  $\mathbb{Q}_3$ ,
2.  $\frac{1}{3}$  dans  $\mathbb{Q}_2$ ,
3.  $-\frac{5}{7}$  dans  $\mathbb{Q}_5$ .

**Exercice 3** Faire les opérations suivantes dans  $\mathbb{Q}_5$

1.  $123,412 + 421,032$
2.  $124,131 - 321,221$
3.  $34,121 \times 0,2103$
4.  $131,2 \div 2,42$

**Exercice 4** Soit  $p$  un nombre premier et  $c$  un entier premier à  $p$ .

1. Montrer que la suite  $c^{p^n}$  converge dans  $\mathbb{Q}_p$ .
2. Soit  $\gamma$  la limite. Montrer que

$$\gamma \equiv c \pmod{p} \quad \text{et} \quad \gamma^{p-1} = 1.$$

3. En déduire que le polynôme  $t^{p-1} - 1$  se décompose en produit de facteurs linéaires dans  $\mathbb{Q}_p$ .
4. Montrer que 1 est la seule racine  $p$ -ème de l'unité dans  $\mathbb{Q}_p$ .

**Exercice 5** Montrer que la représentation canonique d'un nombre  $p$ -adique est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce nombre est rationnel.

**Exercice 6** Quel nombre dans  $\mathbb{Q}_3$  est représenté par  $2, \overline{0121}$  ?