Théorème chinois

Exercice 1 Résoudre $493x \equiv 319 \bmod 899$ et $493x \equiv 187 \bmod 899$.

Exercice 2 Résoudre $989x \equiv 677 \bmod 1219$ et $989x \equiv 667 \bmod 1219$.

Exercice 3 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 7 \bmod 12 \\ 2x \equiv 11 \bmod 15 \\ x \equiv 3 \bmod 20 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv 7 \bmod 12 \\ 7x \equiv 11 \bmod 15 \\ x \equiv 3 \bmod 20 \end{cases}$$

Exercice 4 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 18 \bmod 24 \\ 2x \equiv 24 \bmod 45 \\ x \equiv 42 \bmod 50 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv 18 \bmod 24 \\ x \equiv 24 \bmod 45 \\ x \equiv 42 \bmod 50 \end{cases}$$

Exercice 5

1. Soit p un nombre premier impair et a un entier strictement positif. Montrer que $x^2 \equiv 1 \bmod p^a$ si et seulement si x est congru à 1 ou -1 modulo p^a.
2. Soit b un nombre entier strictement positif. Montrer que le nombre de solutions de la congruence $x^2 \equiv 1 \bmod 2^b$ est :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } b = 1, \\ 2 & \text{si } b = 2, \\ 4 & \text{si } b \geq 3. \end{cases}$$

3. Donner le nombre de solutions de $x^2 \equiv 1 \bmod n$.

Exercice 6 Soit p un nombre premier. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$ (Théorème de Wilson).

Exercice 7 Soit n un nombre non premier, $n \neq 4$. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \bmod n$.