Théorie analytique des nombres

Exercice 1 Soit $s > 1$ et notons P l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \text{ impair}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P \setminus \{2\}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Exercice 2 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ converge pour $s > 2$. Pour cela, montrer

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_{p \in P} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-s+1}} = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{\varphi(p)}{p^s} + \frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

pour tout $s > 2$, où P est l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 3 Pour tout $s > 1$, montrer que

$$\left(1 - 2^{-s+1}\right)\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Exercice 4 Soit $\mu\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction de Möbius, définie par $\mu(1) = 1$, et pour tout $n > 1$,

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si il existe un certain nombre premier } p \text{ tel que } p^2/n, \\ 1 & \text{si } n = p_1 \dots p_r \text{ où } r \text{ est pair et les } p_i \text{ sont premiers et distincts,} \\ -1 & \text{si } n = p_1 \dots p_r \text{ où } r \text{ est impair et les } p_i \text{ sont premiers et distincts.} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $s > 1$,

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{p \in P} \left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

où P est l'ensemble des nombres premiers. Montrer que

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1, \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

et en déduire une 2eme méthode pour prouver que $\sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} = \zeta(s)^{-1}$.

Exercice 5 Montrer que la suite de nombres réels $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N)\right)_{N \in \mathbb{N}^\times}$ converge.