C9

METHODE POUR LA MODELISATION D'UNE NAPPE AQUIFERE ET L'EVALUATION DES DEBITS DE BASE DES RIVIERES .

G. BASTIN et M. GEVERS

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes
Université Catholique de Louvain
Bâtiment Maxwell, Place du Levant
B-1348 LOUVAIN-LA-NEUVE.

RESUME : Une méthode de modélisation automatique d'un aquifère, à partir d'un nombre restreint de mesures disponibles, a été mise au point.

Elle met en oeuvre, conjointement, une technique d'interpolation optimale et une technique d'optimisation.

La méthode comprend l'identification des conditions aux frontières inconnues et, entre autres, l'estimation des débits de base des rivières qui drainent l'aquifère.

Communication au Séminaire sur certains problèmes de ressources en eau dans les îles et les zones côtières - CEE - Comité des problèmes de l'eau - Malte, Juin 1978.

INTRODUCTION.

L'équation bidimensionnelle de l'écoulement dans un aquifère libre, inhomogène et isotrope s'écrit :

$$\operatorname{div}\left[K(h-s)\ \operatorname{grad} h\right] + w = S\,\frac{\delta h}{\delta t} \qquad (1)$$

où $h(x,y,t)$ est la hauteur piézométrique

$w(x,y,t)$ est le taux d'alimentation naturelle de l'aquifère (à travers une zone non-saturée)

$K(x,y)$ est la perméabilité

$S(x,y)$ est le coëfficient de stockage

$s(x,y)$ est la cote du socle imperméable.

On discrétise le domaine considéré en M mailles carrées de côtés $\Delta x = \Delta y$ parmi lesquelles N mailles intérieures et M-N mailles frontières. L'équation (1) est alors remplacée par N équations aux différences finies :

$$\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\left[T_{ij}\right]\left[h_j-h_i\right] + w_i\,\Delta x^2 = \Delta x^2\,S_i\,\frac{\delta h_i}{\delta t} \qquad i=1,\ldots,N \qquad (2)$$

où $T_{ij} = \left[K_j(h_j-s_j) + K_i(h_i-s_i)\right]$

La notation $\sum_{j\neq i}$ signifie que la somme porte sur les noeuds de la grille de discrétisation qui sont d'indices j et voisins du point i.

L'aquifère considéré est drainé par une rivière le long de laquelle N_d sections de contrôle ont été placées pour la mesure du débit. Ces sections de contrôle sont numérotées de 1 à N_d à partir de la source.

Le débit de base à un instant t donné et à la section k est la partie $Q_k(t)$ du débit total qui provient de l'aquifère et non du ruissellement.

Une manière approchée de calculer ce débit $Q_k(t)$ serait d'écrire :

$$\sum_{(i,j)\in E_k} T_{ij} (h_j - h_i) + Q_{k-1} = Q_k \qquad k=1,\dots,N_d \tag{3}$$

où $Q_o = 0$

E_k est l'ensemble des couples de noeuds de grille (i,j) tels que i parcourt la rivière entre les sections k-1 et k, et j parcourt les noeuds de grille intérieurs, voisins de i.

DONNEES DISPONIBLES ET HYPOTHESES DE DEPART.

L'objectif de cette communication est d'exposer comment a été construit un modèle d'une portion de l'aquifère du Bruxellien dans le bassin de la Dyle, drainée par le ruisseau "Pisselet", sur la base des données et des hypothèses suivantes :

1) On dispose d'un certain nombre de points de mesure de la cote du socle $s(x,y)$ et de la hauteur piézométrique $h(x,y,t)$.

2) On dispose d'un nombre restreint de résultats d'essais de pompage qui ont permis de caractériser la perméabilité de l'aquifère en quelques points.

3) Le taux de recharge naturelle de l'aquifère est totalement inconnu mais non négligeable.

4) Pour la simplicité de l'exposé on supposera qu'il n'y a pas de stations de pompage dans l'aquifère ; l'introduction de tels pompages ne modifierait en rien la méthode pourvu que le taux de captage soit connu.

5) Les débits de base Q_k sont calculés par la méthode exposée dans [2]. On notera en particulier qu'ils peuvent se décomposer en une composante δ_k à variation rapide et une composante D_k pratiquement indépendante du temps :

$$Q_k(t) = D_k + \delta_k(t) \tag{4}$$

6) La brièveté de la période de mesure par rapport aux constantes de temps naturelles de l'aquifère d'une part, et la faible amplitude des fluctuations du niveau piézométrique d'autre part justifient la construction d'un <u>modèle de régime</u>. Dès lors les équations (2) et (3) qui décrivent le système sont remplacées par les équations (5) et (6) suivantes, indépendantes du temps :

$$\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} T_{ij} \left[h_j - h_i\right] + w_i \, \Delta x^2 = 0 \qquad i=1,\ldots,N \tag{5}$$

$$\sum_{(i,j) \in E_k} T_{ij} \left[h_j - h_i\right] = D_k - D_{k-1} \qquad k=1,\ldots,N_d \tag{6}$$

METHODE DE MODELISATION.

Le problème de la modélisation de l'aquifère peut être formulé comme suit :

Trouver des valeurs numériques pour toutes les composantes des vecteurs :

$$\underline{h} = (h_1,\ldots,h_M)$$
$$\underline{s} = (s_1,\ldots,s_M)$$
$$\underline{K} = (K_1,\ldots,K_M)$$
$$\underline{w} = (w_1,\ldots,w_N)$$
$$\underline{D} = (D_1,\ldots,D_{N_d})$$

telles que : i) les valeurs soient compatibles avec les données disponibles

ii) les équations (5) et (6) soient satisfaites.

La méthode mise en oeuvre pour résoudre ce problème comporte deux étapes :

1ère étape - Interpolation.

Les points de mesure de h(x,y) et s(x,y) ne coïncident généralement pas avec les noeuds de la grille de discrétisation. C'est pourquoi nous calculons des valeurs interpolées $\hat{h}_i$ ($i \in I_1$) et $\hat{s}_i$ ($i \in I_2$) à l'aide d'une méthode stochastique d'interpolation linéaire optimale dans l'espace : le Krigeage [4]. I_1 et I_2 sont des sous-ensembles de $\{1,\ldots,M\}$ qui contiennent des noeuds de grille assez proches des points de mesure. Il faut remarquer que le Krigeage est une méthode d'interpolation "exacte", c'est à dire que l'estimée optimale en un point de mesure est la mesure elle-même. C'est en ce sens que nous pouvons dire : le modèle est compatible avec les données disponibles. Pour la perméabilité, étant donné le très petit nombre de points de mesure, nous utilisons une méthode très élémentaire d'interpolation : chaque valeur de perméabilité est transférée au noeud de grille le plus proche. Ces valeurs sont notées $\hat{K}_i$ ($i \in I_3$).

2e étape - Optimisation.

Tel qu'il a été posé, et après l'étape d'interpolation, le problème de la modélisation présente encore une infinité de solutions. On peut considérer que le modèle le plus attrayant est celui d'un aquifère homogène avec un taux d'alimentation uniforme, les variables K et w étant alors indépendantes des coordonnées x,y. Un tel modèle, toutefois, est en règle générale incompatible avec les estimées $\hat{h}_i$, $\hat{s}_i$ et $\hat{K}_i$ calculées plus haut. Nous tenterons alors d'approcher autant que possible un tel modèle en minimisant la fonction objectif suivante :

$$J = \alpha\ C_1\ J_1 + (1-\alpha)\ C_2\ J_2 \tag{7}$$

où J_1 et J_2 sont définis comme suit :

$$J_1 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j \neq i} (K_j - K_i)^2$$

$$J_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq N}} (w_j - w_i)^2$$

C_1 et C_2 sont des constantes de normalisation et α est un facteur de pondération entre les deux termes normalisés $(0 < \alpha < 1)$

La fonction J est minimisée par rapport aux paramètres $\{K_i \mid i \notin I_3\}$ et $\{w_i\}$ sous les contraintes :

$h_i = \hat{h}_i \ ; \ i \in I_1$

$s_i = \hat{s}_i \ ; \ i \in I_2$

$K_i = \hat{K}_i \ ; \ i \in I_3$

équations (5) vérifiées

équations (6) vérifiées.

CONCLUSIONS.

1) Cette méthode est mise en oeuvre pour l'identification de l'aquifère du Bruxellien dans le bassin de la Dyle et les résultats sont, en partie, présentés dans [1].

2) Pour résoudre le problème, on a écrit un algorithme du gradient conjugué de telle manière que les conditions aux frontières, si elles sont inconnues, soient estimées avec les autres inconnues.

3) La distribution des perméabilités d'une part, et le taux moyen d'alimentation d'autre part, que l'on obtient avec cette méthode sont assez insensibles à la valeur attribuée au facteur α. De plus le taux moyen d'alimentation que nous obtenons pour le Bruxellien est remarquablement proche de celui estimé de manière totalement indépendante dans [3].

4) Les débits de base D_k, s'ils ont été mesurés, servent de contrainte à l'optimisation en intervenant dans les équations (6). Par contre, s'ils sont inconnus, ils peuvent être estimés après optimisation du modèle par résolution des mêmes équations (6).

REFERENCES.

[1] G. BASTIN and M. GEVERS : "Joint use of space interpolation and optimization methods for steady-state aquifer modeling with scarce data". Proc. IFIP Working Conf. on Modeling and Simulation of Land, Air and Water Resources Systems. - Ghent, Belgium (1977).

[2] G. BAZIER, M. GEVERS and E. PERSOONS : "An approach to follow the evolution of the base flow of small watersheds".- Idem.

[3] F. BULTOT, G. DUPRIEZ and E. LAURENT : "Les ressources d'eau souterraine en Belgique : Réserve, régime et exploitabilité des aquifères. I. Bassin versant de la Dyle à Wavre". - Publication I.R.M., Belgique (1977).

[4] P. DELFINER and J.P. DELHOMME : "Optimum interpolation by Kriging" in Display and analysis of spatial data, ed. by J.C. Davis and M.S. McCullagh, J. Wiley (1975).
