

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES  
Département de Mécanique  
Département de Mathématiques Appliquées



Méthodes d'éléments finis  
pour la dynamique de la glace de mer

Travail de fin d'études présenté en vue de l'obtention  
des grades d'Ingénieur Civil Mécanicien et  
d'Ingénieur Civil en Mathématiques Appliquées par

**Olivier FEYS**  
et  
**Olivier LIETAER**

Promoteurs :

**Professeur T. FICHEFET**

**Professeur V. LEGAT**

ANNÉE ACADÉMIQUE 2004-2005

# Remerciements

Nous souhaitons exprimer toute notre gratitude envers nos promoteurs, les professeurs Vincent Legat et Thierry Fichefet, pour le temps et l'attention qu'ils nous ont consacrés. Leur efficace complémentarité dans ce sujet multidisciplinaire a permis de nous éclairer tout au long de ce travail.

Plusieurs membres des unités MEMA et ASTR nous ont aidé dans la réalisation de notre étude. Merci à Emmanuel Hanert, Martin Vancoppenolle, Laurent White, Paul-Emile Bernard et Julien Jeanfils pour leur disponibilité et leurs précieux conseils. Nous remercions également Valérie Dulière et Sébastien Legrand de nous avoir fourni un maillage du Bassin Arctique. Il nous a été d'une grande utilité pour confronter notre code à la réalité.

Enfin, nous tenons à remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, nous ont conseillés, soutenus et encouragés.

Les deux Olivier

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Physique de la glace de mer</b>	<b>3</b>
1.1 Généralités . . . . .	3
1.2 Formation de la glace de mer . . . . .	6
1.3 Morphologie de la glace de mer . . . . .	9
1.4 La thermodynamique de la glace de mer . . . . .	10
1.4.1 Echanges de chaleur et bilans thermiques . . . . .	11
1.4.2 Modélisation de la thermodynamique . . . . .	15
1.4.3 La simulation de contrôle . . . . .	19
1.4.4 Impact de la neige . . . . .	19
1.5 Importance climatique . . . . .	21
<b>2 Le modèle d’Hibler</b>	<b>24</b>
2.1 Dynamique de la glace de mer . . . . .	25
2.1.1 Dynamique de la banquise . . . . .	25
2.1.2 Echelles d’observation et modélisation . . . . .	27
2.1.3 Equations de conservation . . . . .	28
2.1.4 Equation de la quantité de mouvement . . . . .	29
2.2 Rhéologie . . . . .	30
2.2.1 Rhéologies envisageables . . . . .	33
2.2.2 Le choix d’Hibler : la rhéologie visco-plastique . . . . .	36
2.2.3 La rhéologie à travers un cas simple . . . . .	39

2.3	Comment intégrer la thermodynamique? . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Résolution numérique du modèle d’Hibler</b>	<b>48</b>
3.1	Formulation discrète . . . . .	48
3.1.1	Dérivation de la formulation faible . . . . .	49
3.1.2	Discrétisation spatiale du problème . . . . .	50
3.1.3	Choix des interpolations et des fonctions de forme . . . . .	50
3.1.4	Discrétisation temporelle du problème . . . . .	51
3.1.5	Schéma d’advection . . . . .	52
3.1.6	Pas de temps, stabilité et précision . . . . .	56
3.2	Validation du code . . . . .	59
3.2.1	Convergence . . . . .	59
3.2.2	Cas test de Wang et Ikeda . . . . .	61
3.3	Problèmes numériques . . . . .	64
3.3.1	Annulation de l’épaisseur . . . . .	64
3.3.2	Diffusion numérique . . . . .	65
3.3.3	La vitesse au front . . . . .	67
3.4	Etude de sensibilité . . . . .	69
	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>74</b>
	<b>Annexes</b>	<b>76</b>

# Table des figures

1	Concentration, épaisseur et vitesse de la glace dans le Bassin Arctique à la fin du mois de mai . . . . .	2
1.1	Evolution de l'étendue de la banquise . . . . .	3
1.2	Concentration de la glace de mer en Arctique et en Antarctique . . . . .	4
1.3	Cartes politiques de l'Arctique et de l'Antarctique . . . . .	5
1.4	Evolution de la densité de l'eau douce avec la température . . . . .	6
1.5	Variation de la densité potentielle de l'eau de mer en fonction de la température potentielle et de la salinité . . . . .	7
1.6	Etapas de la formation de la glace de mer . . . . .	8
1.7	Comparaison des profils de salinité et de température (glace nouvelle - glace pluriannuelle) . . . . .	8
1.8	Glacé de première année - glace pluriannuelle . . . . .	9
1.9	Morphologie diverse de la banquise . . . . .	10
1.10	Bilan énergétique sur un floe . . . . .	12
1.11	Comparaison de différents modèles thermodynamiques . . . . .	17
1.12	Simulation de contrôle : évolution de l'épaisseur et de la température . . . . .	19
1.13	Epaisseur de glace et température (modèle simplifié) . . . . .	19
1.14	Evolution saisonnière de l'épaisseur de glace et de neige . . . . .	20
1.15	Effet des chutes de neige sur l'épaisseur . . . . .	21
1.16	Importance de la glace de mer dans le système climatique . . . . .	22
2.1	Courants de surface en Arctique . . . . .	25
2.2	Courants de surface en Antarctique . . . . .	26
2.3	<i>Macro-échelle</i> : vue aérienne du Bassin Arctique . . . . .	27

2.4	Consistance de l'hypothèse de milieu continu . . . . .	28
2.5	Modèle à deux niveaux : glace épaisse - glace mince . . . . .	29
2.6	Formation de crêtes de compression et de cisaillement . . . . .	31
2.7	Composantes du tenseur de Cauchy en 2D . . . . .	32
2.8	Contraintes principales pour les rhéologies visqueuses linéaires . . . . .	33
2.9	Relation déformation - contrainte pour une rhéologie plastique 1D . . . . .	34
2.10	Comparaison des rhéologies linéaire visqueuse, élasto-plastique et visco-plastique . . . . .	35
2.11	Courbe de seuil elliptique pour la rhéologie visco-plastique . . . . .	37
2.12	Représentation de points matériels ayant le même $\gamma$ . . . . .	38
2.13	Evolution de la résistance de la glace avec la concentration . . . . .	38
2.14	Schéma du problème 1D . . . . .	39
2.15	Épaisseur et vitesse de la glace pour le cas 1D . . . . .	40
2.16	Épaisseur de glace et convergence pour la simulation 1D . . . . .	41
2.17	Courbe de seuil elliptique et contraintes principales pour le cas unidimensionnel	42
2.18	Evolution des contraintes principales d'un point matériel pour la simulation 1D . . . . .	43
2.19	Influence de l'exposant de $h$ dans la loi phénoménologique $P$ . . . . .	44
3.1	Calcul des flux sur un élément . . . . .	54
3.2	Raffinage typique d'un élément pour l'étude de la convergence en réseau . .	60
3.3	Convergence temporelle et en réseau pour une simulation 1D . . . . .	60
3.4	Maillage hexagonal pour la simulation de Wang et Ikeda . . . . .	61
3.5	Forçages pour le maillage sur l'hexagone . . . . .	62
3.6	Comparaison de nos résultats avec ceux de Wang et Ikeda : vitesse, épaisseur et concentration . . . . .	63
3.7	Comparaison de nos résultats avec ceux de Wang et Ikeda : volumes et surfaces	63
3.8	Comparaison de trois solutions en cas d'épaisseur nulle . . . . .	65
3.9	Diffusion numérique au front pour différents maillages . . . . .	66
3.10	Épaisseur et détail de la vitesse au front . . . . .	67
3.11	Épaisseur et vitesse près de la solution établie (cas 1D) . . . . .	68

3.12	Maillage le plus fin du Bassin Arctique . . . . .	69
3.13	Résultats d'une simulation sur le Bassin Arctique . . . . .	69
3.14	Influence des zones libres de glace sur le volume et la surface du bassin . . . . .	70
3.15	Influence de la non linéarité des viscosités . . . . .	71
16	Représentation de la spirale et du transport d'Ekman dans l'hémisphère Nord	78

# Introduction

La glace de mer constitue une composante importante de notre système climatique. Son étendue et ses propriétés rendent les régions polaires particulièrement sensibles aux variations du climat. Le contexte climatique de ces dernières décennies a incité la communauté scientifique à investiguer l'impact du réchauffement dans ces régions. Conscients de l'enjeu planétaire, les scientifiques ont ainsi mis au point des modèles de glace de mer dans le but de les intégrer dans leurs modèles climatiques. La glace de mer constitue aujourd'hui un domaine d'étude à part entière, largement répandu.

L'unité ASTR de l'UCL fait partie de ces groupes de recherches et a développé un modèle de glace de mer LIM (*Louvain-la-Neuve Ice Model*) ainsi qu'un modèle couplé océan-glace CLIO (*Coupled Large scale Ice-Ocean model*), tous deux implémentés en différences finies. De nombreuses améliorations ont depuis lors été réalisées à tous les niveaux. A commencer par le développement de méthodes d'éléments finis se basant sur des grilles non structurées, qui présentent de nombreux avantages par rapport aux différences finies (meilleure définition des côtes, raffinement et adaptativité du maillage, etc.). Le développement d'un nouveau modèle, SLIM (Second-generation Louvain-la-Neuve Ice-ocean Model), est en cours avec la collaboration de l'unité MEMA afin de mettre à profit ces différentes évolutions (passage aux éléments finis, nouveaux modèles de glace de mer,...). Ce mémoire constitue une étude de faisabilité de l'utilisation de méthodes d'éléments finis pour la modélisation de la glace de mer, et donc de son intégration dans un tel modèle couplé.

L'objectif premier du présent travail était de reproduire les résultats publiés par Wang et Ikeda (2004). Ceux-ci y présentent une implémentation de type éléments finis du modèle de glace de mer proposé par Hibler (1979) dans une formulation lagrangienne. Dans un premier temps, il s'agissait de comparer cette formulation avec une formulation eulérienne, qui devaient chacune être développée par l'un de nous deux. Les termes d'advection s'étant révélés négligeables, il a été jugé préférable d'abandonner l'approche lagrangienne au profit de l'eulérienne. Nous avons dès lors décidé, en accord avec nos promoteurs, de travailler ensemble. L'implémentation a en outre nécessité la compréhension des phénomènes physiques et fut l'occasion de nous intéresser à un domaine qui nous était alors inconnu.

Nous nous pencherons dans le premier chapitre sur la physique de la glace de mer.

Nous en ferons une analyse détaillée (description et formation) et situerons son rôle dans le système climatique. Dans la suite du chapitre, nous traiterons des différents aspects thermodynamiques de la glace de mer.

Nous détaillerons ensuite le modèle de glace utilisé lors de nos simulations. Celui-ci intègre une modélisation des forçages océaniques et atmosphériques, ainsi qu'une rhéologie non linéaire visco-plastique pour tenir compte du comportement particulier de la glace. Nous porterons d'ailleurs un intérêt particulier aux implications de cette rhéologie dans le modèle à travers un exemple simple.

Enfin, le troisième chapitre présentera la partie numérique de ce travail, à savoir les discrétisations spatiale et temporelle des équations du modèle. Nous y développerons la formulation de type éléments finis des équations discrétisées ainsi que le schéma d'intégration temporelle. Nous y présenterons également les étapes nécessaires à la validation du code ainsi que les différents obstacles rencontrés sur le plan numérique.

Les résultats obtenus seront dévoilés au fil du texte afin d'illustrer les différentes sections concernées. Voici un aperçu de ce que nous avons pu réaliser à l'aide de notre code.

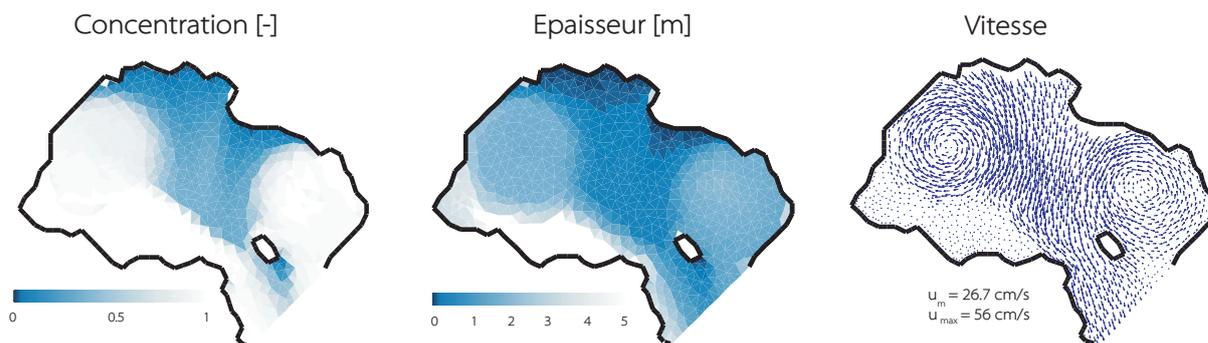


FIG. 1 – Concentration, épaisseur et vitesse de la glace dans le Bassin Arctique à la fin du mois de mai.

Les vitesses de glace obtenues sont plus grandes que celles observées en réalité, car les forçages utilisés sont très approximatifs et n'avaient d'autre but que de montrer les grandes caractéristiques de la dynamique de la glace du Bassin Arctique.

# Chapitre 1

## Physique de la glace de mer

### 1.1 Généralités

La glace de mer est, selon l'Organisation météorologique mondiale, "toute forme de glace trouvée en mer qui résulte de la congélation de l'eau de mer" (WMO 1970). En conséquence, elle ne comprend pas les icebergs, masses de glace flottante détachées des calottes glaciaires (formées par l'accumulation des chutes de neige, donc d'eau pure).

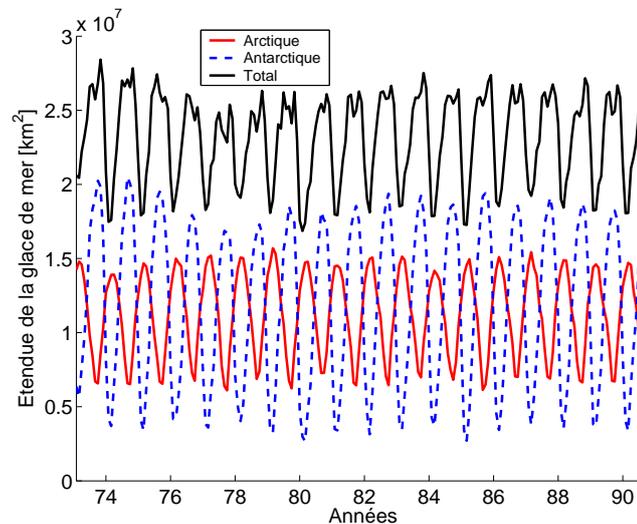


FIG. 1.1 – Evolution de l'étendue de la banquise en Arctique et en Antarctique. La moyenne annuelle globale varie d'une année à l'autre et se situe entre 20 et 25  $10^6$  km<sup>2</sup> (données issues du site du National Snow and Ice Data Center (<http://www.nsidc.org>)).

A tout moment, la glace de mer recouvre environ 7 % de la surface des océans mondiaux (Fig. 1.1) ou encore un peu plus que la superficie du continent nord-américain (24,4 millions de kilomètres carrés). La quasi totalité de cette glace se trouve à la surface des océans polaires du globe, dans le Bassin Arctique et autour de l'Antarctique, même si

on peut en observer dans des zones plus tempérées, sous certaines conditions climatiques particulières (Vancoppenolle 2003).

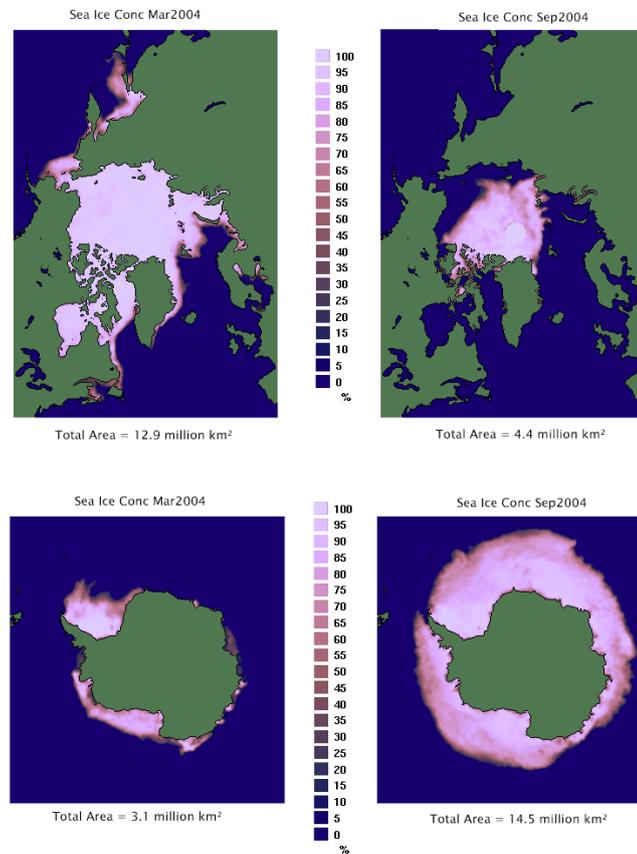


FIG. 1.2 – Concentration de la glace de mer en Arctique (première ligne) et en Antarctique (seconde ligne) aux mois de septembre et mars 2004. Le centre de l'Arctique est composé d'une banquise pluriannuelle qui résiste à la fonte estivale tandis que la banquise de l'Antarctique est principalement saisonnière. La concentration de la glace australe est plus faible que celle de la glace boréale (NSIDC-<http://www.nsidc.org>).

L'étendue de glace de mer est la surface océanique totale se situant entre le pôle et le bord de la banquise (Fichefet 2005). Dans l'hémisphère Nord (Fig. 1.1), cette étendue double de septembre à mars, passant de  $\sim 8$  à 15 millions de kilomètres carrés, tandis que dans l'hémisphère Sud, la variation saisonnière est plus importante, la banquise quintuplant presque son étendue ( $\sim 4$  à 20 millions de kilomètres carrés). Notons que la complexité des interactions du système atmosphère-glace-océan induit une certaine variabilité interannuelle dans l'étendue de la glace. Prenons à titre d'exemple la rétroaction albédo-température : un réchauffement de l'environnement, éventuellement dû au retour du Soleil au printemps, provoquera une légère fonte de glace qui va favoriser l'absorption du rayonnement solaire par une baisse de son albédo. Cette légère perturbation de la température est donc amplifiée par un processus rétroactif qui contribue à accélérer la fonte de la banquise.

La glace marine de l'océan Arctique se compose d'une banquise pluriannuelle et d'une banquise saisonnière (Fig. 1.2). La première se situe au centre du Bassin Arctique et résiste à la fonte estivale. Sa hauteur moyenne est de l'ordre de 3 mètres. La deuxième se forme aux prémices de l'hiver pour fondre sous les premières chaleurs de l'été. Son épaisseur varie de quelques centimètres à environ deux mètres. Dans l'Antarctique, la glace de mer est saisonnière, sauf dans quelques régions comme la mer de Weddell. La distribution de glace y est également plus symétrique, et ce pour deux raisons : d'une part, on observe une plus grande symétrie de la répartition des terres et des océans en Antarctique et, d'autre part, il n'y a pas de courant océanique suffisamment fort pour repousser la banquise, contrairement aux courants nord-atlantique et norvégien qui empêchent la banquise de s'étendre au nord de la Norvège.

Enfin, on peut caractériser la glace de mer par sa concentration, c'est-à-dire par la fraction de surface océanique recouverte par de la glace. Etant donné que de forts vents divergents soufflent en Antarctique et que la glace de mer se forme sous des latitudes plus basses qu'en Arctique, la concentration de la banquise australe est inférieure à celle du Bassin Arctique (Fig. 1.2).

Au-delà du simple constat d'existence de glaces, il convient de comprendre comment et pourquoi cette glace se forme et se maintient au voisinage des pôles.



FIG. 1.3 – Cartes politiques de l'Arctique et de l'Antarctique (University of Texas Library Online-<http://www.lib.utexas.edu/maps>).

## 1.2 Formation de la glace de mer

Afin de bien mettre en évidence l'impact du sel dans la formation de la glace de mer, voyons tout d'abord comment la glace se forme à la surface d'une étendue d'eau douce. Lorsque l'eau de surface se refroidit au contact de l'air à la fin de l'été, elle devient plus dense que l'eau des couches inférieures, engendrant un mouvement de convection. De par ce mélange progressif, toute la colonne d'eau se refroidit jusqu'à la température du maximum de densité de l'eau douce ( $4^\circ\text{C}$ ), comme on peut l'observer à la figure 1.4. En dessous de cette température, des pertes de chaleur supplémentaires provoquent le refroidissement de la couche superficielle qui ne coule plus puisqu'elle perd en densité jusqu'au point de congélation. On voit enfin l'apparition de cristaux de glace à la surface autour de noyaux de congélation, qui finissent par s'agglomérer pour former une couche qui flotte à la surface. Cette couche isolante empêche l'eau sous-jacente de geler, ce qui permet la survie des espèces animales qui s'y trouvent.

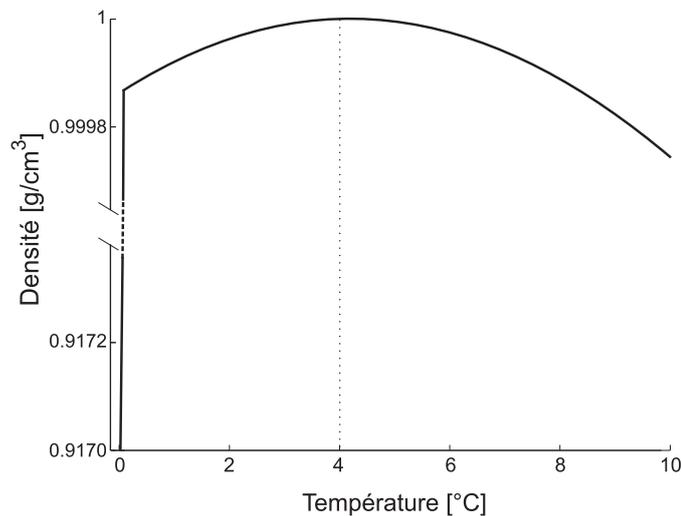


FIG. 1.4 – Evolution de la densité de l'eau douce avec la température. On observe un saut à  $0^\circ\text{C}$  lors du changement de phase ainsi que la présence du maximum de densité vers  $4^\circ\text{C}$ , dû à l'action de deux phénomènes antagonistes : la diminution de l'agitation thermique avec le refroidissement ainsi que l'apparition de liaisons hydrogène tendant à faire gonfler le fluide.

La teneur en sel de l'eau de mer est en moyenne de 35 grammes par kilogramme d'eau de mer ( $35\text{‰}$ ). Or, la masse volumique  $\rho$  de l'eau de mer dépend de la salinité  $S$ , de la température  $T$  et de la pression  $p$ . Cette relation est exprimée par une équation d'état  $\rho = \rho(S, T, p)$ . Comme on peut s'en apercevoir à la figure 1.5, la salinité a tendance à abaisser le point de congélation de l'eau de mer ( $\sim -2^\circ\text{C}$ ) et la température du maximum de densité. De plus, aux taux de salinité qui caractérisent les océans, la densité de l'eau de mer ne fait qu'augmenter lorsque la température décroît, engendrant le même mouvement de convection qui brasse les eaux des lacs. En conséquence, si l'océan mondial n'était

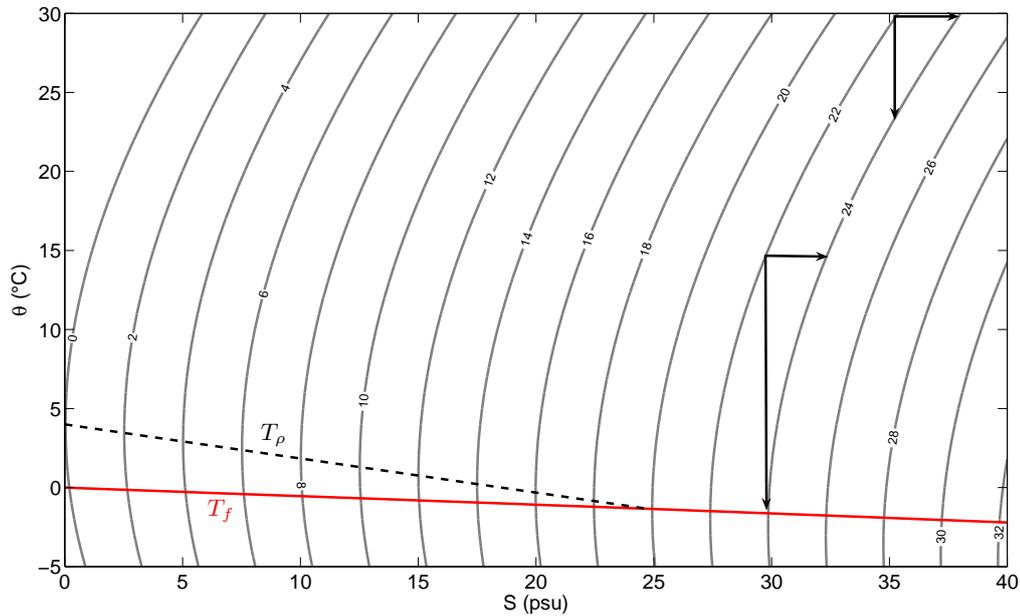


FIG. 1.5 – Variation de la densité potentielle de l'eau de mer en fonction de la température potentielle et de la salinité, calculée à partir de l'équation d'état à la pression atmosphérique. Pour des salinités inférieures à 25 psu  $\approx$  ‰, l'eau atteint son maximum de densité ( $T_\rho$ ) avant le point de congélation ( $T_f$ ), tandis qu'au-delà de cette valeur, la densité est maximale au point de congélation. Aux basses températures caractéristiques des hautes latitudes, la densité est surtout contrôlée par la salinité. Il suffit de constater la grande différence de  $\Delta\theta$  nécessaire pour passer de 22 à 24  $\text{g/cm}^3$  si l'on se trouve à 30 ou à 15 °C, alors que l'influence de la salinité reste comparable. Notons que les parties de courbe sous la droite de congélation n'ont pas de sens physique puisque le diagramme ne fait pas apparaître le changement d'état.

pas stratifié, ce mouvement se répèterait inlassablement (c'est-à-dire jusqu'à ce que *tout* l'océan atteigne la point de congélation). En pratique, seule la couche mélangée de l'océan (voir annexe A) se refroidit jusqu'à atteindre le point de congélation (ce qui représente une couche de 25 – 50 mètres en Arctique et d'environ 200 mètres en Antarctique). Des pertes de chaleur supplémentaires entraînent l'apparition d'eau surfondue et des premiers cristaux de glace (à la surface mais aussi sous l'eau puisque toute la couche mélangée est à la température de congélation) qui flottent à la surface. La formation de ces cristaux s'accompagne d'un rejet massif de sel qui va tendre à augmenter la densité de l'eau de mer d'une part, ce qui, par convection, ramène de l'eau plus chaude en surface, et va d'autre part davantage encore abaisser le point de congélation de l'eau. Ces phénomènes vont tous deux contribuer à un ralentissement (voire un arrêt) du processus de congélation.

Lorsque ce processus se poursuit, de minuscules particules de glace s'accumulent à la surface de l'océan, lui conférant une teinte plombée (on parle alors de frasil). Le vent et les vagues vont agglomérer ces cristaux en cylindres de glace d'environ 10 centimètres d'épaisseur, appelés crêpes de glace (*ice pancakes*). L'eau située entre ces amas de glace va



FIG. 1.6 – Etapes de la formation de la glace de mer. A gauche : frasil; au centre : crêpes de glace; à droite : couche de glace en formation (<http://www.usna.edu>).

progressivement geler et cimenter entre eux les blocs de glace. On obtient ainsi une couche de glace plus ou moins homogène qui va s'épaissir par accrétion de glace à l'interface eau-glace ou par congélation de neige infiltrée par l'eau de mer.

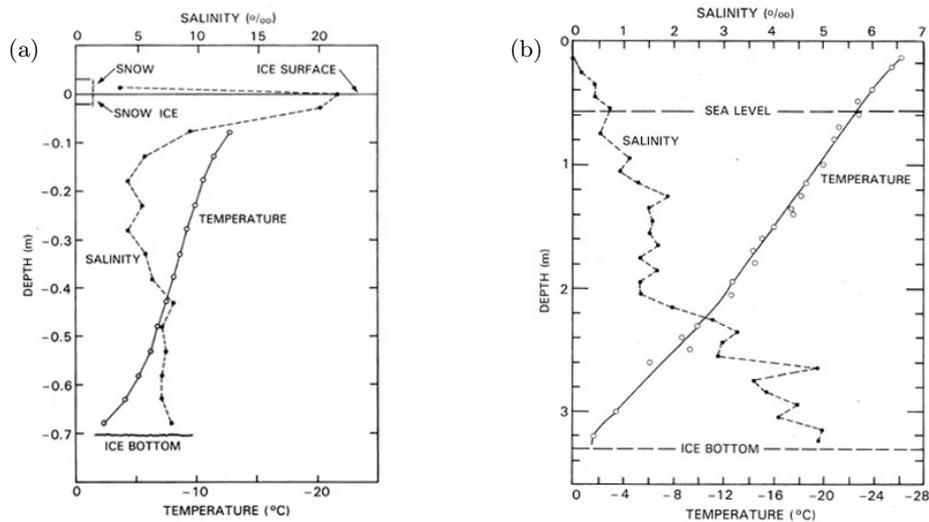


FIG. 1.7 – Comparaison des profils de salinité et de température à l'intérieur d'une glace nouvellement formée (a) (Martin 1979) et d'une glace pluriannuelle (b) (Cox & Weeks 1974). Pour une glace nouvelle ( $\sim 0.7$  m d'épaisseur), la salinité se situe dans une fourchette de 5 à 10<sup>0</sup>/<sub>00</sub>, tandis que dans le cas d'une glace vieille ( $\sim 3.30$  m) on observe un profil quasi linéaire de salinité croissant avec la profondeur. Dans les deux cas le profil de température est presque linéaire.

La glace, lors de sa formation, enferme non seulement des bulles d'air, mais aussi des bulles de saumure, c'est-à-dire des poches d'eau salée en équilibre thermodynamique avec la glace qui les entoure. La quantité de bulles de saumure emprisonnée est directement proportionnelle à la vitesse de formation de la glace. Les bulles sont peu à peu évacuées vers le fond de la couche de glace par des mécanismes de drainage, induisant une augmentation de la salinité avec la profondeur pour une glace âgée de quelques années, tandis que la salinité varie peu lorsque la glace est récente (Fig. 1.7).

Les bulles de saumure altèrent la résistance mécanique de la glace, ses propriétés élec-

tromécaniques et surtout thermiques puisque la présence de poches d'eau salée augmente la chaleur spécifique de la glace : tout apport de chaleur va avoir pour effet de faire fondre la glace entourant les bulles de saumure et d'absorber de la chaleur latente (et inversement). En conséquence, le volume des bulles de saumure varie pendant la congélation ou la fonte de la glace. Elles ont donc un impact très important sur la conduction thermique, jouant un rôle de réservoir de chaleur qui retarde le réchauffement ou le refroidissement de la glace.

La glace de mer n'est donc pas un solide homogène, mais plutôt un mélange non homogène de trois phases : cristaux de glace constituée d'eau pure mélangés à des cristaux de sel, bulles de saumure et d'air (Morales Maqueda et Holland 1997) ; sa densité oscille entre 850 et 920 kg/m<sup>3</sup>.

En résumé, la formation de la glace de mer est un processus complexe qui induit des échanges thermiques et massiques. Ce processus ne représente cependant que la face cachée de l'iceberg : la seule présence de la banquise modifie toute la thermodynamique de l'interface atmosphère-océan.

### 1.3 Morphologie de la glace de mer

Lors de sa formation, la glace de mer passe par différents stades (frasil, crêpes de glace,...). La banquise, contrairement à une couche de glace récemment formée, est loin d'être homogène. Sa morphologie présente en fait une grande diversité due à son activité dynamique et thermodynamique. Au cours de la première année, les processus thermodynamiques de formation de glace permettent la croissance de celle-ci jusqu'à une épaisseur de 2 m. Si celle-ci persiste (on parle alors de glace pluriannuelle), elle peut atteindre jusqu'à 3 m (voir Fig. 1.8).



FIG. 1.8 – Glace de première année - glace pluriannuelle (<http://melt.newark.cmw.udel.edu>).

Toute glace plus épaisse est due aux processus dynamiques de la banquise (mouvements convergents ou de cisaillement). Elle est principalement constituée des éléments suivants (voir Fig. 1.9) (WMO 1970) :

- **floe** : tout fragment de glace de mer relativement plat ayant 20 m ou plus d'extension horizontale.
- **chenal** : toute fracture ou passage à travers la glace de mer accessible à un navire de surface.
- **polynie** : toute ouverture de forme non linéaire entourée de glace (10 - 90000 km<sup>2</sup>).
- **crête de compression** : ligne ou mur de glace brisée qui est soulevée par la pression. Peut être récente ou érodée. Le volume correspondant de glace brisée poussée vers le bas par la pression au-dessous d'une crête est appelé quille de glace.
- **fracture** : toute cassure ou rupture dans une glace très serrée, une glace compacte, une glace consolidée, une banquise côtière ou un simple floe, qui est provoquée par des phénomènes de déformation. Leur longueur peut varier de quelques mètres à plusieurs kilomètres.
- **mare de fonte** : accumulation sur la glace d'eau de fonte provenant principalement de la fonte de la neige mais, aux stades les plus avancés, aussi de la fonte de la glace. Au début, ces mares sont de simples flaques de neige fondue.

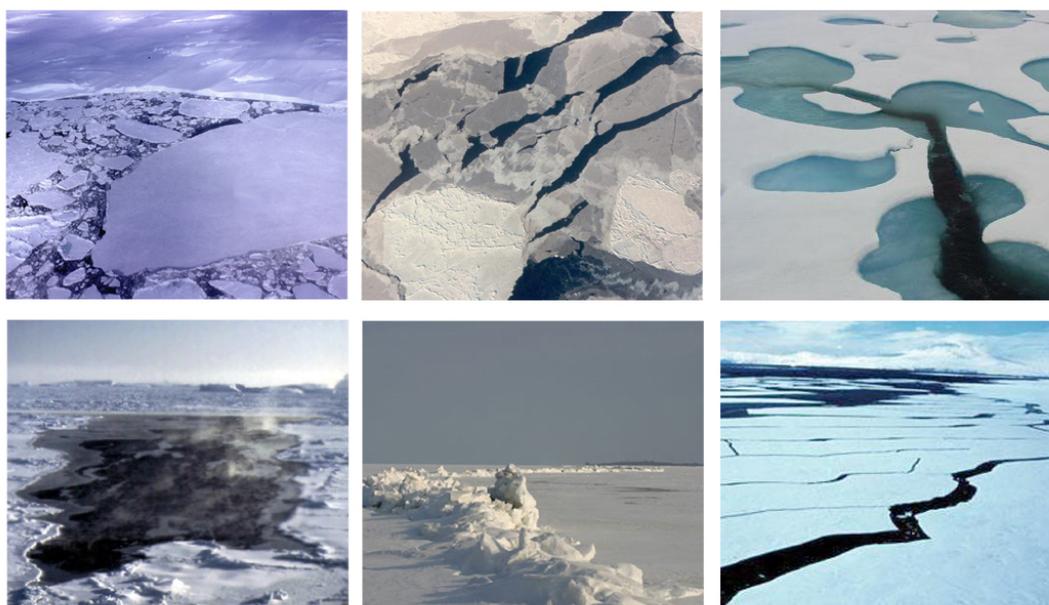


FIG. 1.9 – Morphologie diverse de la banquise (de gauche à droite et de haut en bas) : floes, fractures, mares de fonte, polynie, crête de compressions et chenaux (<http://www.uscg.mil>).

## 1.4 La thermodynamique de la glace de mer

Si les mouvements de la banquise provoquent une certaine redistribution de la glace de mer, ce sont les processus thermodynamiques qui expliquent la majeure partie de la

variation saisonnière de l'étendue de la glace. La présence d'une fine couche suffit pour perturber de plusieurs ordres de grandeur les échanges de chaleur entre océan et atmosphère, ce qui laisse entrevoir le rôle clé que la glace tient au sein du système climatique. Nous présentons ici les grandes caractéristiques de la thermodynamique de la glace de mer ainsi qu'un modèle simple permettant de simuler son cycle saisonnier.

### 1.4.1 Echanges de chaleur et bilans thermiques

Ce sont les échanges de chaleur et de masse qui gouvernent la formation de la glace, sa croissance ou sa fonte. L'évolution de l'épaisseur de la glace est dépendante de son profil de température qui est établi grâce à une équation de la chaleur nécessitant deux conditions aux frontières (en surface et à la base de la couche). Ces conditions sont obtenues via des bilans énergétiques dont nous allons détailler les différentes composantes.

#### Bilan thermique en surface

A la surface de la banquise (ou de l'océan en absence de glace), le taux d'ablation (de formation) de glace découle du bilan entre les flux de rayonnement solaire incident  $F_r$  et réfléchi  $\alpha F_r$ , les flux de rayonnement infrarouge incident  $F_L$  et émis  $F_{LS}$ , le flux conductif à l'intérieur de la glace  $F_{CS}$  ainsi que les échanges turbulents de chaleur latente  $F_e$  et sensible  $F_s$ . La figure 1.10 représente schématiquement les différents échanges d'énergie qui s'établissent en présence de glace de mer (on suppose qu'il n'y a pas de neige en surface). Le bilan thermique en surface s'exprime donc de la façon suivante :

$$\underbrace{(1 - \alpha)(1 - i_0)F_r + F_L - F_{LS} + F_s + F_e + F_{CS}}_{F_A} + L_i \frac{dh_i}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

où  $i_0$  et  $\alpha$  sont la fraction de rayonnement solaire qui pénètre à travers la surface (typiquement de l'ordre de 17% en l'absence de neige) et l'albédo de surface de la glace, c'est-à-dire la fraction de l'énergie solaire incidente sur la banquise qui est renvoyée vers l'atmosphère. En été, lorsque le flux net énergétique vers la glace  $F_A$  fournit davantage de chaleur que le flux de conduction  $F_{CS}$  ne peut en évacuer, le surplus d'énergie est dissipé par absorption de chaleur latente (fonte de la glace en surface).  $h_i$  désigne l'épaisseur de la couche de glace et  $L_i$  la chaleur latente volumique de fusion de la glace ( $\sim 3 \cdot 10^8 \text{ J m}^{-3}$ ).

Le **rayonnement solaire incident**  $F_r$  offre une variabilité saisonnière d'autant plus marquée qu'on s'approche des hautes latitudes. La nuit polaire qui s'empare des pôles empêche tout rayonnement du Soleil d'atteindre la glace pendant une bonne partie de l'hiver tandis que, pendant l'été, le jour permanent assure un rayonnement solaire journalier supérieur au maximum que connaissent les régions équatoriales (Morales Maqueda et Holland 1997). C'est ce qui explique que la fonte de la glace en été est régulée par  $F_r$ . Cette forte insolation est cependant minimalisée par la réflexion importante qu'elle subit à la surface

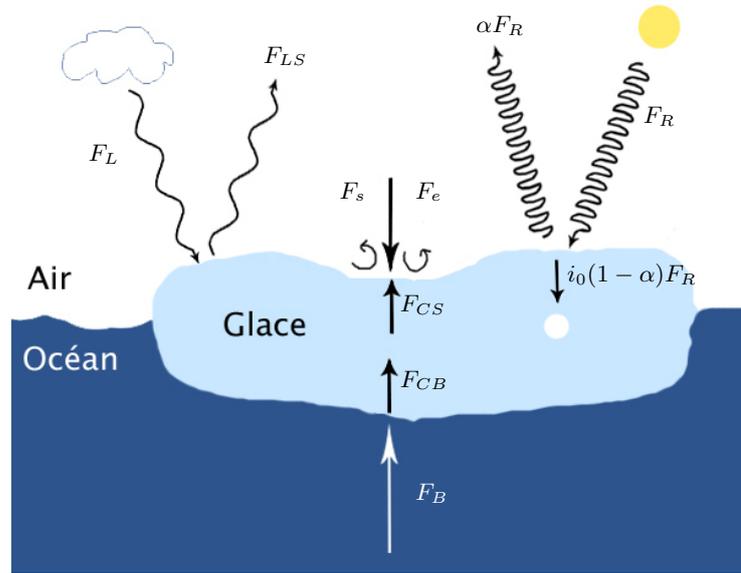


FIG. 1.10 – Bilan énergétique sur un floe. A la surface, le bilan s'établit entre les flux radiatifs ( $F_R$ ,  $F_L$  et  $F_{LS}$ ), turbulents ( $F_e$  et  $F_s$ ) et conductif ( $F_{CS}$ ). Une fraction  $i_0$  du rayonnement solaire disponible à la surface pénètre à travers la glace et interagit avec les bulles de saumure. A la base, les échanges de chaleur latente équilibrent la balance entre conduction thermique ( $F_{CB}$ ) et flux océanique ( $F_B$ ). Par convention, les flux sont considérés comme positifs lorsqu'ils sont dirigés vers la surface de la glace.

des pôles (de par la présence de glace et de neige). Les deux premières colonnes de la table 1.1 nous livrent les valeurs des flux radiatifs solaires incidents et absorbés pour chaque mois dans le centre de l'Arctique.

L'évaporation abondante due à l'insolation permanente entraîne la formation d'une couverture nuageuse qui explique la diminution du rayonnement solaire incident qui se produit à partir de juillet. A ce même moment, la neige disparaît totalement de la banquise, ce qui double la fraction de rayonnement absorbé par la surface, passant d'à peine 22% à plus de 40% en un mois de temps. Dans l'hémisphère Sud, les conditions atmosphériques sont telles que la majorité de la glace reste recouverte de neige toute l'année et que très peu de mares de fonte<sup>1</sup> parcourent la surface. L'albédo moyen austral est ainsi d'autant plus grand, ce qui entraîne des différences entre les bilans radiatifs solaires arctique et antarctique.

Le **flux de rayonnement infrarouge sortant**  $F_{LS}$  est évalué par la loi de Stefan. La glace de mer peut en effet être considérée comme un corps noir (son émissivité est supposée unitaire) qui émet proportionnellement à la quatrième puissance de la température de sa surface  $T_S$  :

$$F_{LS} = \sigma T_S^4,$$

<sup>1</sup>*Melt ponds* : il s'agit de bassins de glace fondue qui absorbent une grande partie de l'énergie solaire en raison de l'albédo faible de l'eau liquide. Ces mares ont un impact non négligeable sur la débâcle printanière.

Type de rayonnement	$F_r$	$(1 - \alpha)F_r$	$F_L$	$F_{LS}$	$F_L - F_{LS}$	$F_{tot}$
Janvier	0	0	168	201	-33	-33
Février	0	0	166	193	-27	-27
Mars	39	6	166	195	-29	-23
Avril	162	31	191	231	-41	-10
Mai	282	56	243	280	-37	19
Juin	303	66	289	320	-31	35
Juillet	222	95	309	322	-14	81
Août	143	44	301	316	-15	29
Septembre	60	14	266	278	-12	2
Octobre	8	2	224	235	-12	-10
Novembre	0	0	183	206	-23	-23
Décembre	0	0	174	201	-27	-27
Annuel	101	26	223	248	-25	1

TAB. 1.1 – Cycle saisonnier des flux radiatifs [ $\text{W m}^{-2}$ ] au centre de l’Arctique (Maykut 1986). La dépendance saisonnière de  $F_r$  est très marquée. On remarque également que le bilan radiatif infrarouge est toute l’année négatif.

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann ( $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ).

Le **rayonnement infrarouge émis par l’atmosphère vers la glace**  $F_L$  est du même ordre de grandeur que  $F_{LS}$  et correspond au flux de rayonnement infrarouge émis par les principaux gaz à effet de serre et les nuages vers la surface. En observant la table 1.1, on s’aperçoit que le bilan net infrarouge est cependant négatif à tout moment. La température de rayonnement est, par définition, la température à laquelle la glace, si elle était un corps noir parfait, émettrait la même quantité de rayonnement que la surface. Or, cette température de rayonnement est pratiquement toute l’année supérieure à celle de l’atmosphère, ce qui déséquilibre le bilan infrarouge en faveur de la colonne d’air, réchauffée par la glace sous-jacente (Morales Maqueda et Holland 1997). Ce déséquilibre s’atténue en été lorsque la couche nuageuse qui se développe piège davantage de chaleur et diminue l’écart de température entre l’air et la glace.

Les **flux turbulents de chaleur sensible** ( $F_s$ ) et **latente** ( $F_e$ ), respectivement associés aux échanges d’énergie par convection et changements de phase (fusion ou sublimation de la glace), sont en moyenne annuelle assez faibles, surtout au-dessus d’une couche de glace vieille de plusieurs années. Par contre, en hiver, l’intensité de ces flux augmente considérablement lorsque l’air glacial souffle sur une mince couche de glace, et les pertes de chaleur peuvent avoisiner  $600 \text{ W m}^{-2}$  au-dessus de chenaux (Morales Maqueda et Holland 1997). La quantité de chaleur latente et sensible transmise dépend de l’état de surface de la glace, de la stabilité de la couche limite atmosphérique, de la vitesse du vent et des gra-

dients verticaux de vapeur d'eau et de température, autant d'influences qui compliquent la connaissance de l'intensité de ces flux avec précision. La dernière dépendance induit les flux turbulents à amoindrir la différence de température qui existe entre atmosphère et glace.

La conduction au sein de la glace joue un rôle prépondérant parce qu'elle est la seule composante qui relie les échanges de chaleur à la base de la banquise et à sa surface. Le **flux de conduction thermique**  $F_{CS}$  dirigé vers la couche supérieure de la glace est donné par la loi de Fourier :

$$F_{CS} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s$$

où  $k$  est la conductivité thermique de la glace ( $\sim 2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ),  $T$  la température absolue et  $z$  la profondeur. L'indice  $s$  désigne la surface. En hiver, le flux conductif est dirigé vers la surface de la glace, contrebalançant les pertes de chaleur qu'elle endure, tandis qu'en été la température de la glace de surface en train de fondre inverse le gradient de température et donc le sens du flux.

### Bilan thermique à l'interface glace-océan

Le bilan thermique à la base de la couche de glace ne comporte que deux flux : le flux de chaleur transmise par conduction à l'intérieur de la glace  $F_{CB}$  et le flux de chaleur sensible provenant de la couche mélangée océanique  $F_B$ . Dès lors, lorsque l'intensité d'un des flux dépasse l'autre, il y a gain ou perte d'énergie qui est compensé par absorption ou libération de chaleur latente. En effet, comme la température de l'interface est au point de congélation de l'eau de mer, tout apport ou perte de chaleur conduit directement à une ablation ou accrétion de glace à la base de la couche. On obtient ainsi le bilan suivant :

$$F_B - F_{CB} + L_i \frac{dh_i}{dt} = 0. \quad (1.2)$$

Le **flux conductif à la base de la glace** est semblable à celui en surface :

$$F_{CB} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_b$$

où l'indice  $b$  vaut pour la base de la banquise.

La chaleur véhiculée par le **flux océanique** provient de deux sources : la remontée d'eaux chaudes situées sous la couche mélangée océanique et le rayonnement solaire pénétrant la surface de l'océan dans les zones libres de glace (Morales Maqueda et Holland 1997). En Arctique, la pycnocline est très marquée et limite les échanges de chaleur avec la couche inférieure plus chaude. C'est ce qui explique la valeur moyenne faible du flux océanique dans le centre de l'Arctique ( $\sim 2 \text{ W m}^{-2}$ ). En Antarctique par contre, la stratification de l'océan est moins prononcée, ce qui permet à l'énergie thermique des eaux chaudes se situant sous la couche mélangée d'atteindre la surface par convection, diffusion verticale

ou encore upwelling<sup>2</sup>. Ainsi, le flux océanique austral oscille entre 10 et 40 W m<sup>-2</sup> d'une région à l'autre. Quant au rayonnement solaire absorbé par l'océan, il est en partie renvoyé vers l'atmosphère, contribue pour une autre partie à faire fondre les parois latérales des floes tandis que le reste sera provisoirement stocké dans la couche de surface de l'océan. Cette énergie pourra ensuite être véhiculée vers la base de la banquise, alimentant ainsi le flux océanique. Mentionnons au passage deux rétroactions liées à l'absorption d'énergie solaire : la fonte latérale des floes diminue la concentration en glace et favorise d'autant plus la pénétration du rayonnement dans l'océan ; de même, toute ablation à la base de la banquise diminue l'épaisseur de glace, ce qui facilite la transmission du flux solaire incident vers l'océan.

### Conduction de la chaleur à travers la glace

Le transport d'énergie à l'intérieur de la glace s'exprime généralement par l'équation de diffusion verticale de la chaleur avec un terme source qui représente une certaine pénétration du rayonnement solaire dans la glace :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \kappa i_0 (1 - \alpha) F_r \exp(-\kappa z) \quad (1.3)$$

où  $c_p$  et  $\kappa$  sont respectivement la chaleur spécifique de la glace et le coefficient d'extinction du rayonnement en ondes courtes. Les équations (1.1) et (1.2) servent de conditions aux frontières pour cette équation.

La modélisation du flux conductif est complexifiée par la détermination de la densité, de la chaleur spécifique et de la conductivité thermique de la glace qui dépendent de la salinité et de la température. Cette dépendance est due à la présence de bulles de saumure dont le volume s'adapte à la température ambiante en absorbant ou libérant de la chaleur latente. Comme l'eau salée a une conductivité thermique plus faible et une densité plus élevée que la glace, ces deux paramètres dépendent de la quantité et du volume de saumure, donc de la salinité et de la température.

#### 1.4.2 Modélisation de la thermodynamique

Etant donné le gouffre qui sépare les échelles spatiales horizontales et verticales de la banquise, les processus thermodynamiques qui régissent la fonte et l'accrétion de la glace de mer sont intégrés dans un problème unidimensionnel (vertical). Nous n'allons pas ici nous intéresser à la distribution spatiale de l'épaisseur de glace (comprenant chenaux, polynies et autres crêtes de compression), mais bien considérer que la banquise forme un ensemble compact et d'épaisseur constante. De nombreux modèles existent afin de

---

<sup>2</sup>Remontée d'eau profonde (froide et riche en nutriments) à la surface de l'océan, sous l'effet de vents de surface quasi-permanents.

simuler les processus thermodynamiques régissant la glace de mer. Même s'ils diffèrent entre eux selon leur degré de résolution, leurs paramètres ou la façon dont ils représentent ou simplifient les propriétés de la glace, ils reposent tous sur les équations de base (1.1), (1.2) et (1.3) (Fichefet, Goosse & Morales Maqueda 1998).

Toute la difficulté de la modélisation des processus thermodynamiques peut s'illustrer à travers deux facteurs qui influencent grandement le bilan radiatif de la banquise : l'albédo de surface et la couverture nuageuse. Le premier facteur dépend de l'état de surface de la banquise (glace nouvelle ou vieille, présence de neige ou de mares de fontes, épaisseur de la glace,...) tandis que la présence de nuages modifie à la fois les bilans radiatifs solaire et infrarouge. Un bon modèle se doit d'incorporer une paramétrisation adéquate de ces facteurs.

Forçages	$F_r$	$F_L$	$F_s$	$F_e$	$F_B$	$\alpha$
Janvier	0	165.6	18.8	0	2	0.84
Février	0	164	12.1	-0.3	2	0.84
Mars	30.3	164	11.5	-0.5	2	0.83
Avril	157.6	184.7	4.6	-1.4	2	0.81
Mai	281.8	240.4	-7.2	-7.3	2	0.80
Juin	305.7	286.6	-6.2	-11.2	2	0.78
Juillet	216.5	304.1	-4.8	-10.2	2	0.64
Août	143.3	297.7	-6.4	-10.5	2	0.69
Septembre	58.9	262.7	-2.7	-6.2	2	0.84
Octobre	0.6	221.3	0.2	-0.3	2	0.84
Novembre	0	178.3	8.9	-0.2	2	0.84
Décembre	0	173.6	12.6	-0.2	2	0.84

TAB. 1.2 – Forçages au 15 de chaque mois utilisés pour l'hémisphère Nord par Maykut & Untersteiner en 1971 et repris par Semtner. Les flux [ $\text{W m}^{-2}$ ] sont positifs vers la glace.

Le modèle développé par Maykut & Untersteiner (1971) (que nous noterons MU71) est vite devenu une référence, parce qu'il est à la fois fort élaboré et résout l'équation de diffusion (1.3) avec une résolution de 0.1 m, ce qui donne de très bons résultats. Les valeurs des flux radiatifs incidents (solaire et infrarouge) ainsi que des flux turbulents sont tabulées (voir table 1.2). Afin de tenir compte de l'effet des bulles de saumure sur les propriétés de la glace, des formules empiriques décrivent les variations de la capacité calorifique et de la conductivité thermique en fonction de la température et de la salinité (dont le profil vertical est supposé constant). Des valeurs mensuelles de l'albédo ainsi que des chutes de neige sont imposées. Si une couche de neige est présente, on y résoud une équation semblable à (1.3), où les valeurs de la capacité calorifique et de la conductivité thermique de la neige sont considérées comme constantes, et où on néglige toute pénétration du rayonnement solaire.

Quelques années plus tard, Semtner (1976) va proposer une version simplifiée du MU71

destinée à être utilisée dans les applications climatiques. Son modèle est en effet volontairement moins gourmand en ressources grâce à une résolution verticale fortement diminuée : il s'agit d'un modèle à trois couches (une pour la neige et deux pour la glace) dans lesquelles le profil de température est supposé linéaire. Conscient du rôle clé des bulles de saumure, Semtner a développé une autre modélisation de la fonte interne de la glace tout en supprimant la dépendance thermohaline de la capacité calorifique et de la conductivité thermique : la partie du rayonnement solaire incident qui pénètre la surface (lorsqu'il n'y a pas de neige) est stockée dans un réservoir de chaleur qui symbolise la fonte interne de la glace (notons que le deuxième terme de l'équation (1.3) est éliminé). Cette énergie est ensuite libérée après l'été pour simuler la chaleur latente relâchée par les bulles de saumure et empêcher la température de surface de tomber sous le point de congélation.

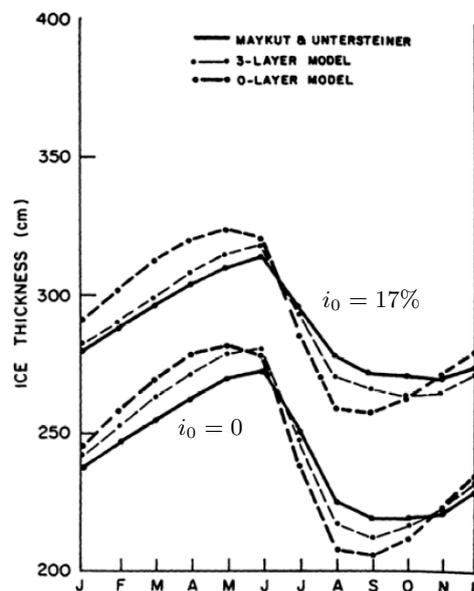


FIG. 1.11 – Cycle annuel de l'épaisseur de glace pour 3 différents modèles thermodynamiques et pour une pénétration du rayonnement nulle et de 17% : modèle de Maykut et Untersteiner (trait plein), modèle à 3 couches de Semtner (trait interrompu) et modèle à "zéro couche" de Semtner (trait interrompu gras). Si on néglige la pénétration du rayonnement solaire au sein de la glace ( $i_0 = 0$ ), l'épaisseur moyenne est nettement plus faible.

Malgré ces diverses simplifications, le modèle de Semtner recoupe les résultats de MU71 avec une erreur qui dépasse rarement quelques pourcents. Semtner a aussi proposé un modèle encore plus simple, dit à "zéro couche", que nous présentons ci-dessous. La figure 1.11 compare les résultats des différents modèles. Elle met aussi en évidence le rôle de la fonte interne de la glace. Si la pénétration du rayonnement solaire au sein de la glace est négligée ( $i_0 = 0$ ), tout le rayonnement solaire disponible à la surface va contribuer à y fondre la glace, ce qui diminue l'épaisseur de glace moyenne. Le modèle à "zéro couche" représente convenablement l'épaisseur moyenne annuelle, mais amplifie quelque peu le cycle saisonnier et décale sa phase en raison de son traitement trop simpliste de la fonte interne

de la glace.

### Le modèle à "zéro couche" de Semtner

Nous avons vu que la température interne de la glace ne réagit pas de façon instantanée aux forçages énergétiques externes à cause de sa capacité calorifique qui retarde les variations de température. Cependant, en vue de simplifier davantage son modèle, Semtner néglige cette dernière, ce qui annule la dépendance temporelle de l'équation (1.3) et rend le gradient de température linéaire à travers toute la couche neige-glace.

Cette version simplifiée du modèle à 3 couches permet d'obtenir une estimation convenable de l'épaisseur saisonnière de la glace pour un coût de calcul minime. Il tient éventuellement compte de la présence de neige (ce qui sera fait dans la sous-section suivante), et totalise ainsi trois variables : l'épaisseur de neige  $h_s$ , l'épaisseur de glace  $h_i$  et la température de surface  $T_S$ . A la base de la glace, la température est fixée au point de congélation de l'eau de mer ( $T_B = 271.2$  K), tandis qu'en surface, elle ne peut excéder son point de fusion ( $T_f = 273.2$  K). Les valeurs des flux ainsi que de l'albédo de surface intervenant dans les équations (1.1) et (1.2) sont interpolées linéairement à partir des valeurs qui ont été utilisées dans le modèle MU71 (table 1.2). Enfin, Semtner ne tient pas compte de la fonte interne de la glace en été et impose donc la continuité du flux conductif à l'interface neige-glace. En l'absence de neige, les flux de conduction de chaleur à la base de la glace et à la surface sont égaux et valent :

$$F_{CS} = F_{CB} = k \frac{(T_B - T_S)}{h_i}$$

A chaque pas de temps, on effectue le bilan énergétique en surface (équation (1.1)) dont on déduit la température de surface d'équilibre. Si  $T_S$  est inférieure à  $T_f$ , la neige peut s'accumuler en surface. Dans le cas contraire, on ramène  $T_S$  à  $T_f$  ce qui déséquilibre la balance entre le flux atmosphérique  $F_A$  et le flux de conduction  $F_{CS}$ . Le surplus d'énergie qui est généré pendant le temps  $\Delta t$  est utilisé pour fondre la glace :

$$\Delta h_{s,i} = -\Delta t \frac{(F_A + F_{CS})}{L_{s,i}}$$

où  $L_{s,i}$  désigne la chaleur latente volumique de fusion de la neige ou de la glace. A la base de la glace, le bilan (1.2) établit s'il y a accretion ( $\Delta h_B > 0$ ) ou ablation ( $\Delta h_B < 0$ ) de glace :

$$\Delta h_B = -\Delta t \frac{(F_B - F_{CB})}{L_i}$$

On obtient finalement l'épaisseur au temps  $n + 1$  en effectuant la somme des différentes contributions :

$$h_{n+1} = h_n + \Delta h_B + \Delta h_S$$

### 1.4.3 La simulation de contrôle

Lorsqu'une simulation est lancée sous des forçages choisis, le système évolue à partir des conditions initiales vers une solution d'équilibre (Fig. 1.12).

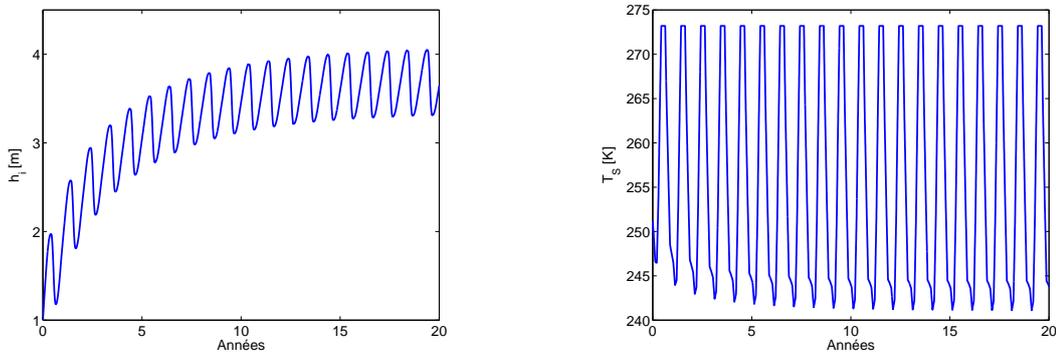


FIG. 1.12 – Evolution de l'épaisseur et de la température à la surface de la couche de glace jusqu'à la solution d'équilibre.

Plus la solution de régime s'écarte de la condition initiale, plus long sera le temps nécessaire pour atteindre l'épaisseur d'équilibre. La température de surface, qui est principalement contrôlée par les flux tabulés (constants au fil des années) et qui dépend très peu de l'épaisseur, atteint l'équilibre rapidement. En hiver, elle chute brutalement (Fig. 1.13) tandis qu'en été, elle ne dépasse jamais le point de fusion de la glace (273.2 K), puisque notre modèle l'en empêche. La surestimation de l'amplitude de l'épaisseur que nous obtenons dans notre modèle simplifié s'explique par l'absence d'une couche de neige au-dessus de la glace qui atténuerait la conduction thermique au sein de la glace.

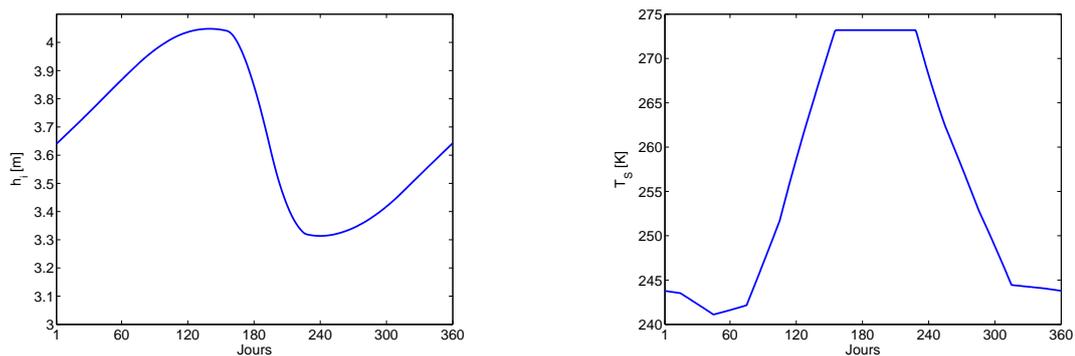


FIG. 1.13 – Epaisseur et température de surface de la couche de glace au cours de la dernière année de simulation.

### 1.4.4 Impact de la neige

La présence d'une couche de neige, même fine, au-dessus de la banquise affecte fortement les transferts de chaleur et donc l'épaisseur de la glace. Tout d'abord, la conductivité

thermique de la neige ( $\sim 0.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) est d'un ordre de grandeur inférieur à celle de la glace. La neige isole ainsi la glace de l'atmosphère, limitant les pertes de chaleur en hiver, ce qui diminue l'accrétion de glace à la base de la couche. Ensuite, l'albédo élevé de la neige diminue de 30 à 40% la quantité de rayonnement solaire absorbé par rapport à celle de la glace pure (voir table 1.1), ce qui retarde la fonte de la glace en été. Enfin, la neige contribue à la formation de glace de neige (*snow ice*) : lorsque le poids de la neige est suffisant pour déprimer la surface de la glace sous le niveau de l'océan, l'eau s'infiltre à la base de la neige et entraîne la formation d'une couche de "glace de neige" en gelant. Cette contribution à la croissance annuelle de la glace est particulièrement remarquable en Antarctique où les précipitations neigeuses sont abondantes et où la surface de glace ne fond pratiquement jamais.

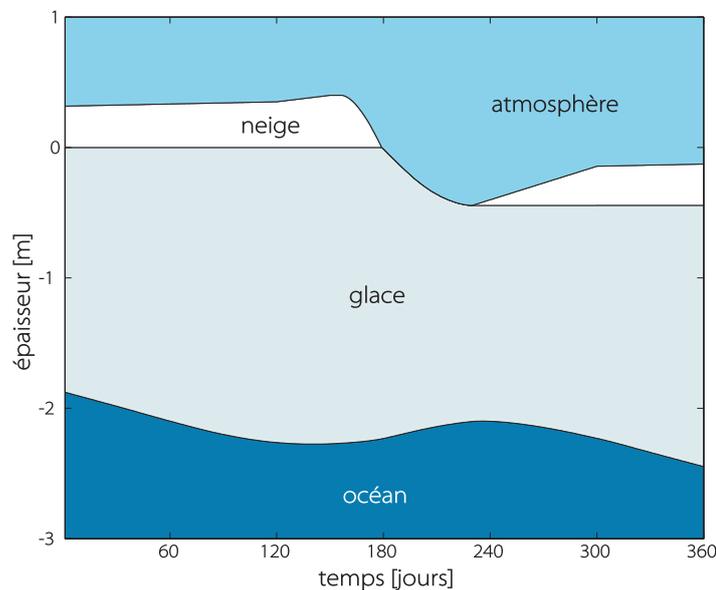


FIG. 1.14 – Evolution saisonnière de l'épaisseur de la glace en présence de neige. Le niveau de référence pour les ordonnées est celui de la surface de la glace en janvier.

On peut évaluer l'impact de deux effets antagonistes sur l'évolution de la couche de glace : l'albédo et la conductivité thermique de la neige. En modifiant quelque peu l'algorithme vu à la section précédente de façon à ce que les bilans tiennent compte de la présence de la neige, on obtient un modèle semblable au modèle à "zéro couche" originel proposé par Semtner. Celui-ci a introduit deux paramètres qui lui ont permis d'accorder ses résultats sur ceux obtenus avec le modèle à 3 couches ou avec le MU71. En imitant sa démarche, notre algorithme a produit la figure 1.14 et montre clairement, même si les valeurs ne correspondent pas exactement à celles obtenues par Semtner, qu'il préserve l'essentiel de la physique de la glace. Tout au long de l'année, une accumulation linéaire de 40 cm de neige simule les précipitations neigeuses. En été, lorsque toute la neige a fondu, le glace subit une ablation importante en surface. A la base de la couche, le flux de conduction détermine s'il

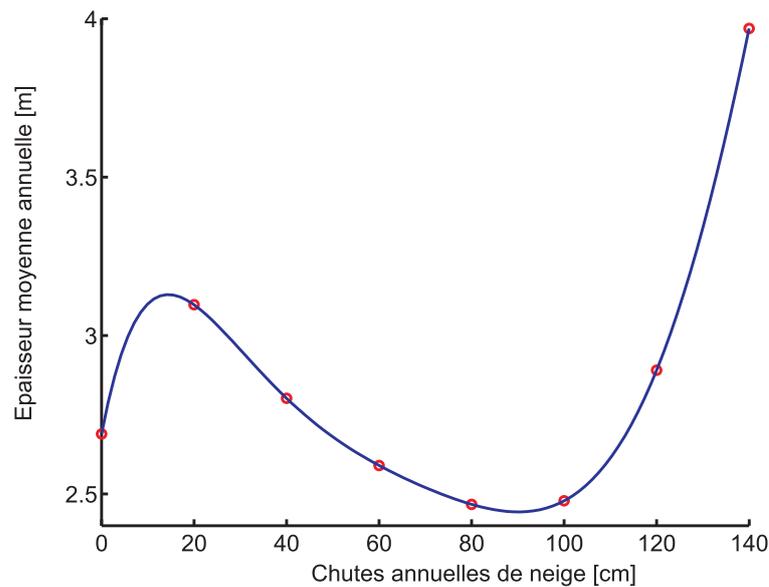


FIG. 1.15 – Épaisseur moyenne d'équilibre de la glace en fonction des précipitations neigeuses. Deux effets antagonistes entrent en jeu : l'albédo élevé réfléchit davantage le rayonnement (pour de faibles et fortes précipitations) tandis que la conductivité thermique de la neige isole la glace et atténue l'accrétion à la base par conduction (précipitations modérées).

y a accrétion ou fonte de glace. La prise en compte de la neige dans notre modèle a fait diminuer l'épaisseur moyenne annuelle de la glace de près d'un mètre. Voyons ce qu'il en est lorsque la quantité de précipitations neigeuses varie (Fig. 1.15).

L'épaisseur moyenne annuelle d'équilibre sans neige est d'environ 2,7 m. De faibles précipitations suffisent à augmenter le réfléchissement du rayonnement solaire et diminue la fonte de glace en été. Des chutes de neige plus importantes font de la neige un isolant efficace qui empêche la glace de se former à la base en hiver. Enfin, d'après notre modèle, lorsque l'accumulation neigeuse dépasse 1 m, l'épaisseur de glace s'emballe et la glace s'accumule d'année en année parce que cette couche de neige finit par subsister aux chaleurs de l'été et empêche ainsi la fonte estivale.

## 1.5 Importance climatique

Le climat de la Terre est régi par la somme de toutes les interactions qui interviennent entre chacune des composantes du système climatique (atmosphère, hydrosphère, cryosphère, lithosphère et biosphère). La glace de mer, à travers les nombreuses rétroactions (positives ou négatives) qu'elle induit à l'interface océan-atmosphère, va jouer un rôle climatique prépondérant (Fig. 1.16).

Le premier effet important de la glace de mer est de réfléchir une grande partie du

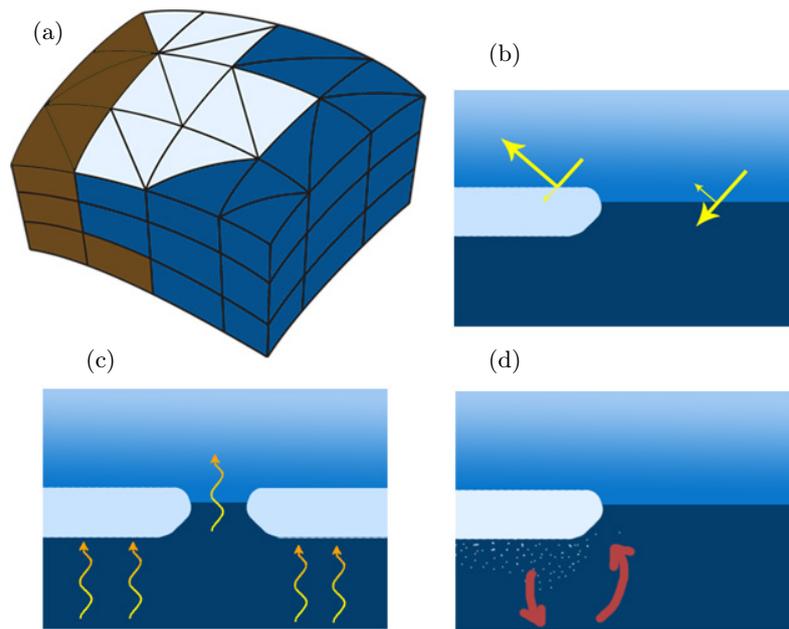


FIG. 1.16 – Importance de la glace de mer dans le système climatique. (a) Inclusion de la glace de mer dans les modèles de circulation océanique ; (b) Réflexion importante du rayonnement solaire à la surface de la glace ; (c) La glace constitue un isolant thermique entre l’atmosphère et l’océan ; (d) Mouvements de convection dus au rejet de sel lors de la formation de glace.

rayonnement solaire incident. Grâce à son albédo élevé ( $\sim 0.5$ ), une mince couche de glace suffit pour réduire fortement l’absorption d’énergie provenant du Soleil, privant la surface de l’océan d’un apport de chaleur important. Ce phénomène est accentué par la présence fréquente de neige à la surface de la glace dont le pouvoir réflecteur est bien supérieur encore à celui de la glace ( $\sim 0.8$ ).

La croissance et la fonte de la glace de mer influencent fortement le cycle saisonnier de la salinité de la couche superficielle de l’océan et de la température de l’air. Comme nous l’avons vu, la formation de glace de mer s’accompagne d’un rejet massif de sel vers l’océan. Cet apport de sel additionnel va donc contribuer à une augmentation de la densité de l’eau (qui dépend surtout des variations du taux de salinité aux hautes latitudes) se situant sous la glace. Cette couche d’eau plus dense va donc avoir tendance à plonger, induisant des mouvements de convection dans l’océan qui peuvent éventuellement donner naissance à une formation d’eau profonde. A l’inverse, la fonte de la banquise induit un flux d’eau douce vers l’océan, diminuant la densité de ses couches supérieures. En plus de cet impact important de la glace de mer sur la circulation thermohaline, la glace retarde les extrêmes saisonniers de température de l’air grâce à la libération (absorption) de chaleur latente accompagnant la croissance (fonte) de la glace.

Finalement, une couche de glace peut être vue comme un isolant d’autant plus efficace

que l'épaisseur de glace augmente, limitant les échanges de chaleur, de quantité de mouvement et de masse. En raison de son albédo élevé et de sa conductivité thermique basse, la glace modifie considérablement les transferts verticaux radiatifs et turbulents de chaleur (les flux de chaleur turbulents à travers une couche de glace peuvent être jusqu'à deux ordres de grandeur inférieurs à ceux traversant une surface océanique sans glace). C'est cette propriété d'isolant thermique qui contribue à une amplification des variations climatiques dans les zones polaires. Enfin, de la glace compacte et épaisse forme un écran entre atmosphère et océan, ce qui d'une part empêche le vent de communiquer de la quantité de mouvement à l'eau et d'autre part réduit fortement les transferts d'eau, que ce soit sous forme de vapeur d'eau ou de précipitations neigeuses.

L'influence de la glace de mer dans le système climatique est en outre renforcé par l'importance de son étendue.

La communauté scientifique a pris conscience depuis quelques décennies déjà du rôle climatique de la glace, et les chercheurs s'attèlent depuis lors à simuler au mieux l'évolution de la banquise afin de l'inclure dans un modèle de circulation générale atmosphère-océan (AOGCM). Cet intérêt à l'égard des régions polaires s'est encore accru depuis que ces modèles ont prédit que l'Arctique et les mers sub-arctiques seront les régions les plus touchées par le réchauffement dû à l'augmentation des gaz à effet de serre (Fichefet et al. 1998).

## Chapitre 2

# Le modèle d'Hibler

Un modèle de glace de mer se doit d'incorporer deux types de processus bien distincts afin de simuler l'évolution de la banquise : (i) les processus dynamiques bien sûr, qui comprennent principalement une équation de conservation de la quantité de mouvement déterminant la dérive de la glace en fonction des forçages atmosphériques et océaniques, et une rhéologie permettant, au-travers d'une loi de comportement, de calculer les contraintes en fonction des déformations et des pressions internes à la glace, mais aussi (ii) les processus thermodynamiques fixant, au moyen d'un bilan énergétique des échanges de chaleur dans le système atmosphère-glace-océan, les taux d'ablation ou d'accrétion de glace.

Les effets des processus dynamiques et thermodynamiques sont opposés. La thermodynamique, fixant les taux de croissance ou de régression de la banquise d'autant plus élevés que l'épaisseur est faible, tend à créer une couche de glace assez homogène. De par la dynamique par contre, la glace se disloque, laissant des zones libres de glace (chenaux ou polynies), des blocs de glace fusionnent ou s'entrechoquent, occasionnant des crêtes de compression. Comme le résume si bien une petite phrase de Thorndike et al. (1975), "the thermodynamics seeks the mean and the mechanics the extremes".

Ces deux processus antagonistes ne sont cependant pas sans lien : la dynamique déforme la glace dont l'épaisseur régit les flux dirigeant la thermodynamique qui, à son tour, fixe les taux de croissance de la glace et donc l'épaisseur dont dépendent les pressions internes. Le modèle doit, au moyen d'un schéma d'advection, veiller à ce couplage essentiel à la représentation de la dynamique de la glace. Le modèle que nous présentons ici et que nous utilisons est celui proposé par Hibler (1979). Permettant une modélisation assez fidèle de la banquise, il a l'avantage d'être assez facilement implémentable. Il s'agit d'un des modèles les plus répandus et utilisés.

## 2.1 Dynamique de la glace de mer

La glace de mer peut être considérée, aux grandes échelles, comme un continuum bidimensionnel réagissant aux forçages atmosphériques et océaniques. Afin de déterminer les mouvements et déformations de la banquise, la dynamique doit incorporer trois éléments fondamentaux : (i) un bilan de quantité de mouvement mettant en adéquation les tensions de l'air et de l'eau, la force de Coriolis, les forces internes, la force due à la pente de l'océan et l'inertie de la glace ; (ii) une rhéologie permettant d'évaluer les contraintes qui résultent des interactions entre floes de glace et enfin (iii) une loi empirique qui détermine la pression exercée à l'intérieur de la glace. Les interactions glace-glace répondent aux sollicitations du vent et des courants et sont donc décisives pour prévoir la dérive de la banquise. D'autre part, les déformations qu'elles créent dans la glace sont responsables de l'ouverture de chenaux ou de la formation de crêtes de compression.

### 2.1.1 Dynamique de la banquise

La dynamique de la banquise est principalement déterminée par les vents. Les courants marins constituent une composante significative à long terme (Morales Maqueda et Holland 1997). En Arctique, on observe trois grands courants de surface (voir Fig. 2.1) :

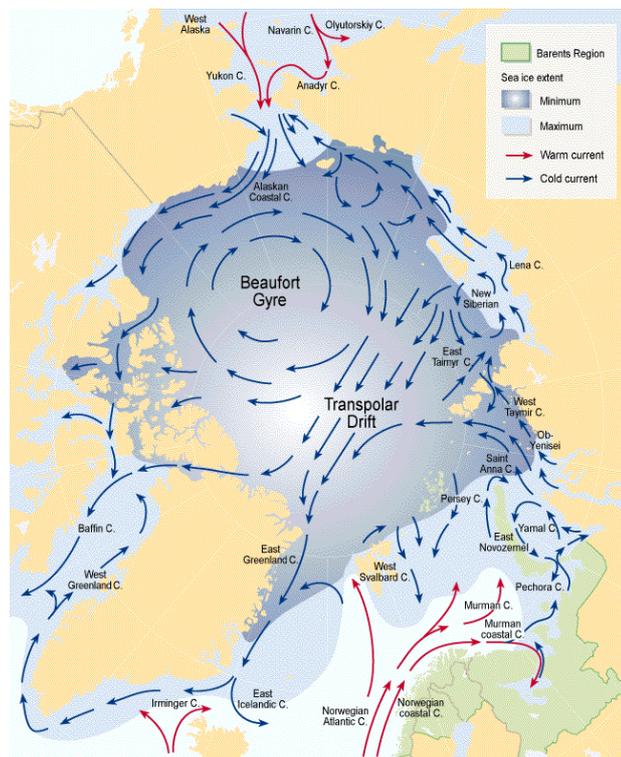


FIG. 2.1 – Courants de surface en Arctique. On retrouve la dérive transpolaire ainsi que la gyre de Beaufort (<http://www.usna.edu>).

- **dérive transpolaire** : principal courant du Bassin Arctique. Il entraîne la glace formée en majorité dans les secteurs sibérien et canadien jusqu'au détroit du Fram (entre le Groenland et l'archipel du Svalbard) en passant par le pôle Nord. Sa vitesse moyenne est d'environ 2 cm/s mais son débit reste significatif ( $\sim 3$  Sv). La variabilité journalière peut doubler cette valeur. Environ 5000 km<sup>2</sup> de glace de mer transitent annuellement dans ce détroit qui constitue la principale sortie de l'Arctique.
- **gyre de Beaufort** : large circulation anticyclonique dans la mer de Beaufort ( $\sim 3$  Sv). La glace qui y circule peut mettre jusqu'à 11 ans pour en faire le tour.
- **courant est groenlandais** : courant qui transporte la glace le long de la côte est du Groenland vers l'Atlantique Nord.

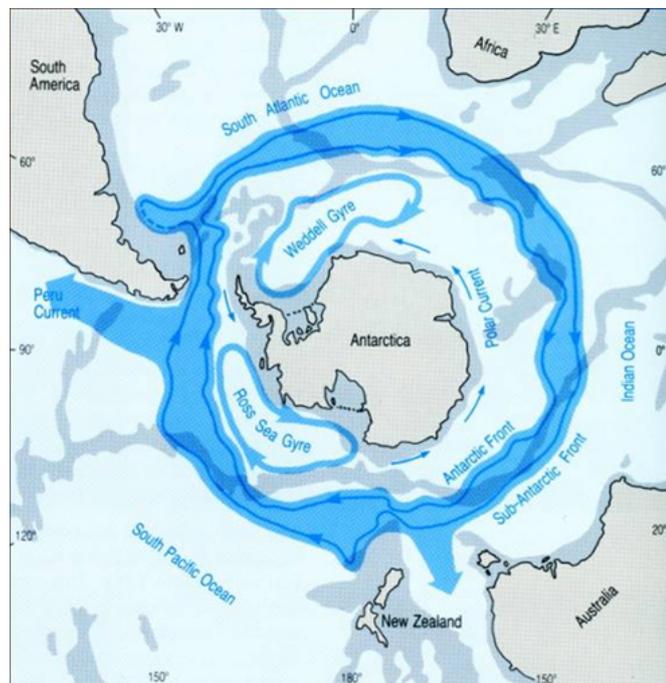


FIG. 2.2 – Courants de surface en Antarctique : courant circumpolaire, courant côtier, gyres de Weddell et de Ross (<http://www.usna.edu>).

En Antarctique, deux courants de surface influent grandement sur la dérive de la banquise (Fig. 2.2) :

- **courant circumpolaire antarctique** : circulation cyclonique qui transporte la glace d'ouest en est tout autour du continent. Entraîné par les violents vents d'ouest ("quarantièmes rugissants et cinquantièmes hurlants"), le courant circumpolaire est le courant le plus puissant du globe.
- **courant côtier polaire** : courant d'est longeant les côtes de l'Antarctique.

Ces deux courants de sens opposé entraînent des gyres dans la mer de Weddell et de Ross. Les vitesses de la glace australe sont en moyenne plus rapides que celles de l'hémisphère Nord.

### 2.1.2 Echelles d'observation et modélisation

La glace de mer, comme tout matériau, englobe différentes échelles qu'il est intéressant de parcourir, comme l'a fait Vancoppenolle (2003). Lorsque l'on observe la banquise de façon globale (vue aérienne par exemple, voir Fig. 2.3), on pourrait croire qu'elle forme une vaste étendue homogène de couleur blanche, sans relief ni caractéristiques particulières (*macro-échelle*).

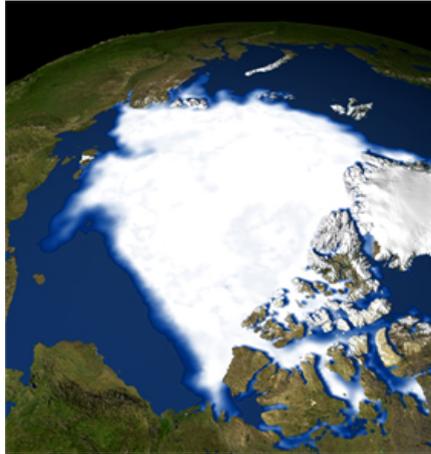


FIG. 2.3 – *Macro-échelle* : vue aérienne du Bassin Arctique et de l'étendue de glace présente (NASA-<http://www.nasa.gov>).

Pourtant, si l'on se rapproche de la glace, on se rend compte de la tâche ardue qui attend les explorateurs des pôles : la banquise, loin d'être homogène et continue, présente une morphologie très diverse (chenaux, crêtes de compression, polynies, etc.) On parle alors de *méso-échelle*.

A la *micro-échelle*, la glace de mer est constituée d'un empilement de cristaux entre lesquels s'insèrent des cristaux de sel, des bulles d'air et de saumure, des impuretés minérales ainsi que des algues microscopiques. Même si d'un point de vue climatologique, nous nous intéressons surtout à la méso-échelle, les caractéristiques microscopiques de la glace influencent grandement ses propriétés et devraient donc idéalement être intégrées dans toute modélisation de la banquise.

Bien que la banquise ne soit clairement pas un milieu continu homogène isotrope (présence de directions préférentielles sous la forme de crêtes de compression, de zones sans glace, ...), la plupart des modèles de glace de mer en font l'hypothèse. Ceci se justifie par la taille des particules de glace que nous considérons (voir Fig. 2.4). Si  $d$  est la taille d'un floe,  $D$  celle d'une particule du milieu continu et  $L$  la longueur caractéristique du domaine d'écoulement, alors cette hypothèse est valable à condition que  $d \ll D \ll L$ . On considère ainsi que nous avons affaire à un milieu granuleux.

La taille d'un floe peut aller d'un mètre à une dizaine de kilomètres, celle d'une particule

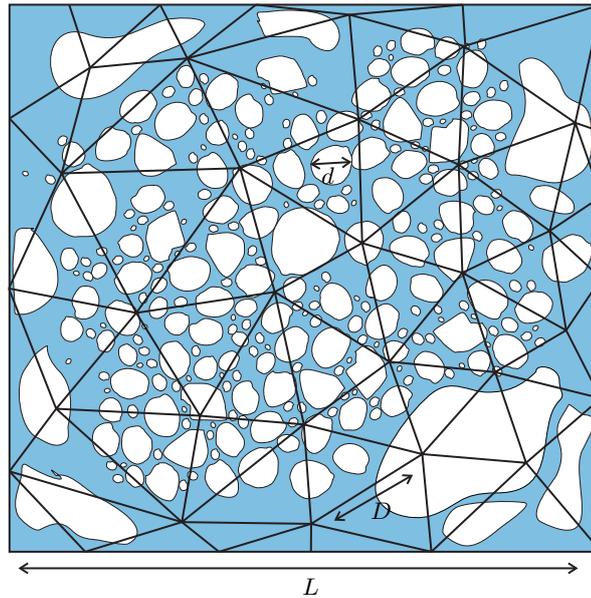


FIG. 2.4 – Consistance de l’hypothèse de milieu continu pour la glace de mer.

de quelques kilomètres à une centaine de kilomètres, et la longueur caractéristique s’étend d’une dizaine à un millier de kilomètres. Comme on peut s’en apercevoir, les échelles se chevauchent, ce qui remet en question l’hypothèse de milieu continu. Cependant, les recouvrements font figure d’exception et l’hypothèse est ainsi validée. D’un point de vue numérique, la taille typique d’une maille est de 10 à 200 kilomètres pour des modèles régionaux ou globaux.

### 2.1.3 Equations de conservation

Etant donné que l’épaisseur de la glace ( $\sim 1$  mètre) est nettement inférieure aux dimensions horizontales du domaine d’écoulement ( $\sim 1000$  kilomètres), nous allons traiter le problème de la glace à deux dimensions, ce qui est fait dans la majorité des cas.

La banquise peut normalement contenir plusieurs niveaux de glace. Nous considérerons ici un modèle à deux niveaux, comme l’a fait Hibler : une niveau de glace mince et un de glace épaisse (*thin ice - thick ice*). Si l’on considère un élément de surface de la banquise, on y retrouve une certaine fraction de glace épaisse et une autre de glace mince, la limite entre les deux niveaux est l’épaisseur  $h_0$ . Nous introduisons deux quantités  $h$  et  $A$  qui permettent de retrouver les proportions glace épaisse - glace mince : l’épaisseur moyenne  $h$  et la concentration en glace épaisse  $A$ . Une fraction  $A$  de l’élément contient donc de la glace d’épaisseur  $h_r$ , l’autre fraction contient de la glace d’épaisseur  $h \leq h_0$  (voir Fig. 2.5). Pour des facilités de calcul, cette dernière fraction sera considérée ne contenir que de l’eau, dès lors on obtient la relation  $h = Ah_r$ .

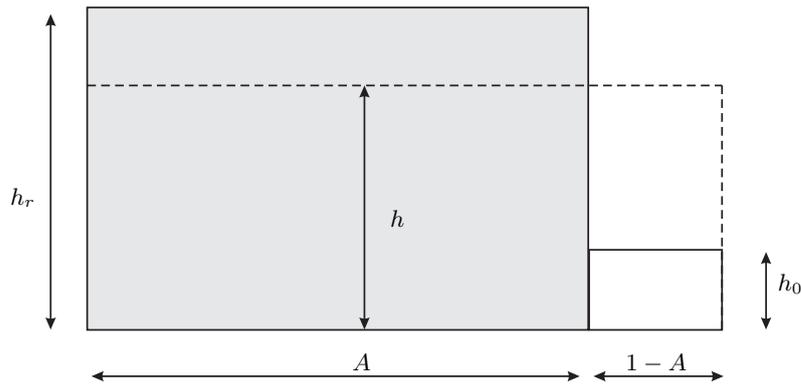


FIG. 2.5 – Modèle à deux niveaux : glace épaisse - glace mince. La concentration  $A$  et l'épaisseur moyenne  $h$  permettent de retrouver leurs proportions respectives.

Les équations de conservation de la masse et de la concentration s'écrivent :

1. Conservation du volume de glace (via l'épaisseur moyenne  $h$ ) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{u}) + S_h \quad (2.1)$$

2. Conservation de la surface de glace (via la concentration  $A$ ) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \cdot (A\mathbf{u}) + S_A \quad (2.2)$$

où  $S_h$  et  $S_A$  sont les termes source/puits d'accrétion/ablation d'épaisseur et de concentration dont le calcul est détaillé plus loin.

L'équation (2.1) est une simple équation de conservation pour la masse de glace, tandis que l'équation (2.2) est plus complexe. En effet, en imposant  $A \leq 1$ , on ajoute un terme puits lorsque des mouvements de convergence induisent une concentration supérieure à l'unité, qui ramène ainsi  $A$  à sa valeur maximale. Cependant, même si  $A$  n'augmente pas,  $h_r$  augmente puisque  $h$  augmente en raison des mouvements de convergence. Cela permet une certaine modélisation des crêtes de compression : la surface utile se trouvant saturée, la glace se fracture et s'empile verticalement.

#### 2.1.4 Equation de la quantité de mouvement

Les équations de conservation de la quantité de mouvement vont déterminer les mouvements et les déformations de la glace de mer dus aux forces qui s'y exercent :

$$\rho_i h \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \tau_a + \tau_w - \rho_i h g \nabla \xi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

où  $\rho_i h$  est la masse de glace par unité de surface,  $\mathbf{u}$  la vitesse de la glace,  $f$  le paramètre de Coriolis (constant pour les hautes latitudes),  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire normal à la surface,

$\boldsymbol{\tau}_a$  et  $\boldsymbol{\tau}_w$  sont respectivement la force par unité de surface due au frottement de l'air et de l'eau sur la glace,  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $\xi$  l'élévation de la surface de l'océan et le dernier terme correspond à la force par unité de surface due aux variations des contraintes internes de la glace.

En pratique, on établit l'équilibre géostrophique (voir annexe B) entre le terme dû à la pente de l'océan et le courant océanique :

$$\rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{U}_w = -\rho_i h g \nabla \xi \quad (2.4)$$

Les forçages externes dus au vent et aux courants constituent les termes les plus importants dans l'équation du mouvement. Il convient de représenter convenablement ces échanges de quantité de mouvement avec la banquise au moyen de paramétrisations adéquates de  $\boldsymbol{\tau}_a$  et  $\boldsymbol{\tau}_w$ . Des formes linéaires donnent déjà une bonne approximation de ces relations entre tensions et vitesse relative de la glace par rapport au vent ou à la mer :

$$\boldsymbol{\tau}_a = C_a (\mathbf{U}_g \cos \theta_a + \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g \sin \theta_a) \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\tau}_w = C_w [(\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \cos \theta_w + \mathbf{k} \times (\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \sin \theta_w] \quad (2.6)$$

où  $C_a$  et  $C_w$  sont des constantes sans dimension,  $\mathbf{U}_g$  et  $\mathbf{U}_w$  les vitesses du vent et du courant géostrophiques à la surface,  $\theta_a$  et  $\theta_w$  les angles de friction de l'air et de l'eau, présents pour tenir compte de l'influence de la force de Coriolis sur les courants (voir annexe C). La vitesse du vent étant d'au moins un ordre de grandeur supérieure à la vitesse de la glace, celle-ci est négligée dans la tension de l'air. Cependant, des observations (Morales Maqueda et Holland 1997) rejoignent la théorie des couches limites pour suggérer une loi quadratique où les coefficients  $C_a$  et  $C_w$  deviennent :

$$C_a = \rho_a C'_a |\mathbf{U}_g| \quad (2.7)$$

$$C_w = \rho_w C'_w |\mathbf{U}_w - \mathbf{u}| \quad (2.8)$$

Cette paramétrisation donne des tensions de vent et d'océan très proches de la réalité.

## 2.2 Rhéologie

Le terme  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  dans l'équation (2.3) rend compte de la variation des contraintes internes de la glace. Afin de les caractériser, on fait appel à une loi de comportement. Celle-ci doit modéliser autant que possible les principales caractéristiques mécaniques de la glace de mer. Cette modélisation étant loin d'être évidente, les premiers modèles de glace ignoraient ces contraintes internes, considérant la glace en écoulement libre (*free drift*). On se doute que cette approximation est peu fiable pour simuler la dynamique de glace située près de la côte ou au beau milieu d'une couche de glace compacte. Le simple fait que de la glace

emprisonnée dans des zones assez fermées (baies, détroits, fjords) ne bouge pas même sous un forçage important (formant ainsi des arches statiques), indique que les forces internes qui se développent au sein de la glace sont du même ordre de grandeur que les tensions du vent et des courants, soulignant une fois de plus toute l'importance de la rhéologie (Morales Maqueda et Holland 1997, Hibler et Hutchings 2003).

### Propriétés mécaniques de la glace

La glace de mer est, comme nous l'avons vu, un matériau très complexe. Pour lui construire une loi de comportement fiable, nous devons connaître ses propriétés mécaniques, à savoir les comportements à la traction, à la compression et au cisaillement. En cas de forçage divergent (traction), la banquise n'offre que très peu ou pas de résistance, et ce même dans le cas d'une couche de glace compacte (sans chenaux). Les crêtes de compression décrites plus haut sont par contre les témoins de grandes résistances à la compression et au cisaillement (Fig. 2.6). Ces résistances sont d'autant plus fortes que la concentration et l'épaisseur sont grandes. Il a en outre été mis en évidence que la résistance au cisaillement est plus faible que celle à la compression.

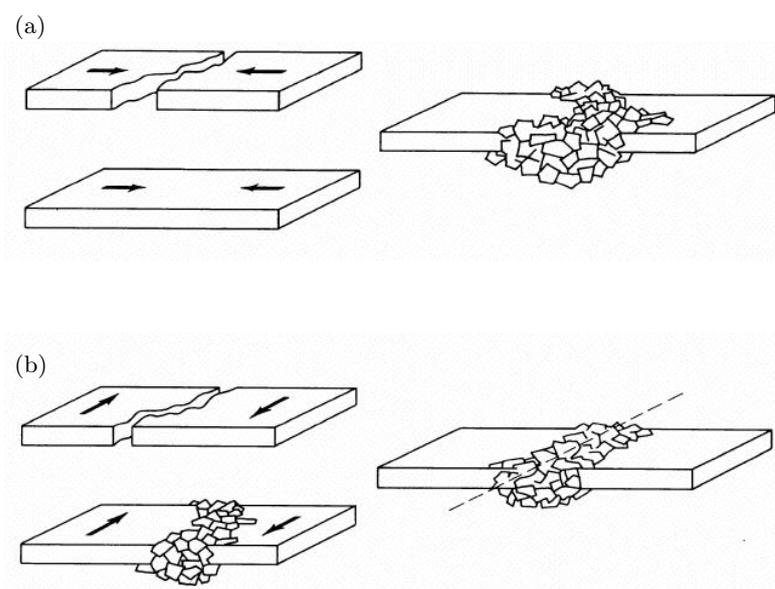


FIG. 2.6 – Formation de crêtes de compression (a) et de cisaillement (b) (Sanderson 1988).

Toutes ces propriétés peuvent être analysées grâce au tenseur de Cauchy, véritable metteur en scène de la rhéologie. Il serait donc judicieux de développer cet outil indispensable à une bonne compréhension de celle-ci.

### Le tenseur de Cauchy

Un loi de comportement met en relation déformations et contraintes. Le tenseur de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  donne l'état de contrainte du fluide :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

avec  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

Pour un élément de fluide matériel (Fig. 2.7),  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  sont les contraintes axiales,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{21}$  les contraintes de cisaillement.

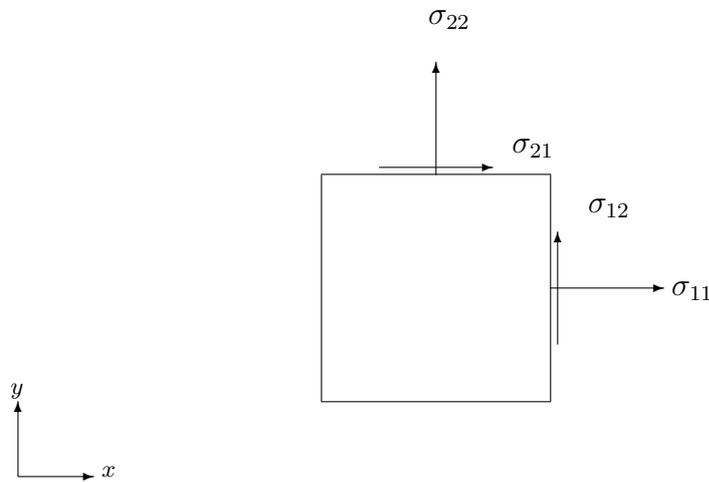


FIG. 2.7 – Composantes du tenseur de Cauchy en 2D.

Par une rotation des axes de coordonnées, il se transforme comme ceci :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Une rotation de l'angle

$$\theta^* = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

transforme celui-ci en un tenseur diagonal. Les deux composantes  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$ <sup>1</sup> sont alors appelées contraintes principales,  $\sigma_I$  étant la contrainte maximale et  $\sigma_{II}$  la contrainte mi-

<sup>1</sup>Elles sont donc les valeurs propres du tenseur de Cauchy.

nimale, toutes orientations confondues. Puisque  $\sigma_I > \sigma_{II}$ , on se trouve toujours au-dessus de la droite  $\sigma_I = \sigma_{II}$  dans le plan des contraintes principales.

### 2.2.1 Rhéologies envisageables

Différentes rhéologies peuvent être envisagées pour simuler le comportement de la glace de mer. Chacune d'entre elles présente des avantages et des inconvénients dont il faut pouvoir juger l'importance. On y retrouve les rhéologies visqueuses linéaires ainsi que les rhéologies plastiques.

La plus simple des rhéologies est certainement celle du fluide visqueux Newtonien sans viscosité de volume :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \eta \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I}$$

Un rapide calcul des valeurs propres fournit la relation  $\sigma_I = -\sigma_{II}$  (Fig. 2.8). L'état de contrainte se situe toujours sur la droite  $\sigma_{II} = -\sigma_I$ , quel que soit l'état de déformation.

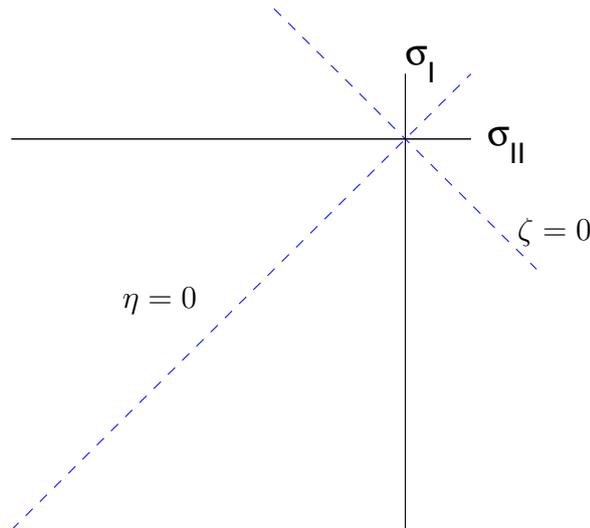


FIG. 2.8 – Contraintes principales pour les rhéologies visqueuses linéaires. Sans viscosité de volume ( $\zeta = 0$ ), l'état de contrainte se situe sur la droite  $\sigma_{II} = -\sigma_I$ . Par contre, si on annule  $\eta$ , on se retrouve sur la droite  $\sigma_{II} = \sigma_I$ . L'état de cisaillement pur se trouve sur la droite  $\zeta = 0$  tandis que l'état de compression isotrope se situe sur la droite  $\eta = 0$ .

Cette rhéologie intègre une propriété matérielle, la viscosité de cisaillement, qui peut être ajustée globalement pour tout l'écoulement. Cette solution fournit donc une résistance au cisaillement. Malheureusement, elle ne permet pas de mettre en évidence la résistance à la compression ni l'absence de résistance à la traction.

L'ajout d'une viscosité de volume  $\zeta$  présente l'avantage supplémentaire de fournir une résistance à la compression. Une valeur élevée de celle-ci induira donc une forte résistance globale à la compression.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\zeta - \eta) \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I}$$

L'état de contrainte ne se situe plus sur la droite  $\sigma_{II} = -\sigma_I$ , car le terme supplémentaire y apporte une composante perpendiculaire. On peut donc se trouver dans n'importe quel état de contrainte possible.

Ces rhéologies linéaires furent fort utilisées dans les premiers modèles (Kulakov et al. 1979, Doronin 1970). Elles offraient une grande facilité d'implémentation tout en simulant grossièrement les interactions globales de la glace de mer.

L'obstacle majeur auquel ont été confrontés les scientifiques dans l'établissement de rhéologies de la glace de mer est le peu d'informations dont ils disposaient sur les contraintes notamment. Le projet AIDJEX (Arctic Ice Dynamics Joint Experiment) a été alors mis en place dans les années septante, afin de récolter des données et de valider les rhéologies existantes. Le développement de l'imagerie satellite a ainsi pu mettre en évidence des grandes différences entre les viscosités utilisées dans ces rhéologies linéaires ( $\sim 10^{11}$ - $10^{12}$  kg/s) et celles mesurées près des côtes ( $\sim 10^8$  kg/s). De telles variations, tout comme la formation d'arches statiques, suggérèrent un comportement hautement non linéaire de la glace, dont il fallait tenir compte dans le modèle (Hibler 1974). Les conclusions du projet ont indiqué que ce sont les rhéologies plastiques qui paraissent les plus adaptées pour décrire le comportement de la glace de mer (Hibler 1979).

L'idée principale derrière ces rhéologies plastiques est de pouvoir conférer une forte résistance à la compression et au cisaillement, tout en annulant toute résistance aux tractions (Fig. 2.9).

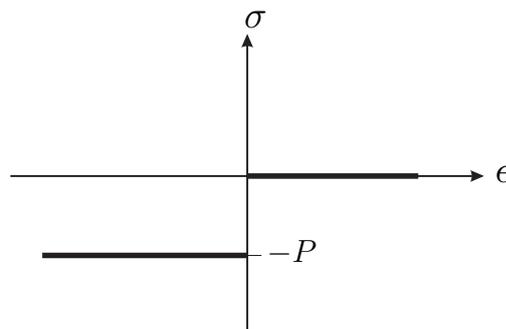


FIG. 2.9 – Relation déformation - contrainte pour une rhéologie plastique 1D, qui présente une résistance nulle à la traction et une résistance  $P$  à la compression indépendante de la déformation.

Les deux principaux types de rhéologie qui intègrent la plasticité sont les rhéologies élasto-plastique (avec une relation  $\sigma - \epsilon$ ) et visco-plastique (avec une relation  $\sigma - \dot{\epsilon}$ ) ; elles sont illustrées dans le cas 1D à la figure 2.10. Toutes deux traitent la plasticité de façon analogue au critère de Von Mises<sup>2</sup> en mécanique du solide élastique. Dans le cas élasto-plastique, la glace se déforme de manière élastique en-dessous du seuil de contrainte  $P$ .

<sup>2</sup>Ce critère détermine l'entrée en plasticité du matériau en fonction d'un seuil de contrainte (typiquement

Au-delà de ce seuil, elle résiste à la compression avec un contrainte  $P$  indépendante de la déformation. Dans le cas visco-élastique, le comportement est similaire si ce n'est que le taux de déformation remplace la déformation ; à une dimension, on peut y considérer la glace comme un fluide visqueux non linéaire avec un terme de pression :

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} - \frac{P}{2}$$

où  $\eta = \min\left(\frac{P}{2|\dot{\epsilon}|}, \frac{P}{2\dot{\epsilon}_0}\right)$  et  $\dot{\epsilon}_0$  est le taux de déformation au-delà duquel il y a plasticité.

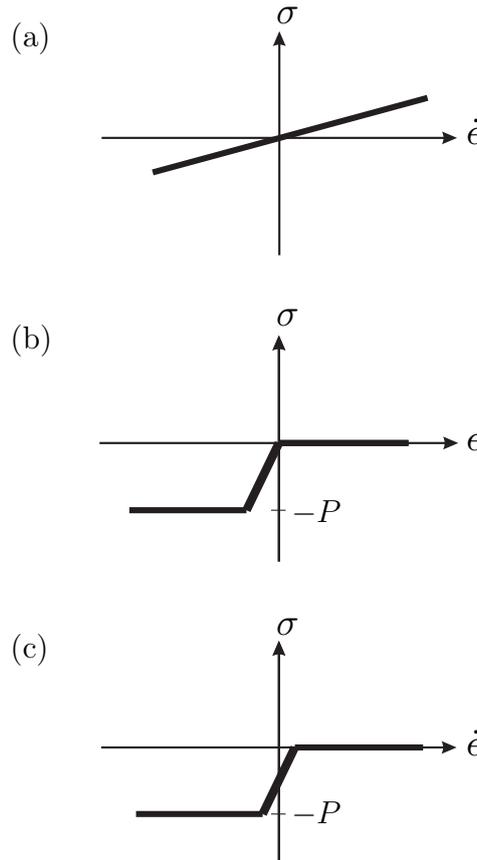


FIG. 2.10 – Comparaison des rhéologies linéaire visqueuse (a), élasto-plastique (b) et visco-plastique (c). Pour la rhéologie visco-plastique on observe une faible résistance à la traction.

La différence essentielle entre les lois élasto-plastique et visco-plastique est la façon dont elles abordent les situations de quasi immobilité de la glace. Dans le premier cas, lorsque les déformations sont très faibles, la glace reste immobile et se comporte de façon élastique en développant une contrainte qui peut être élevée tandis que dans le second, le comportement rigide de la glace est simulé par un mouvement de fluage, c'est-à-dire un glissement très lent. L'inconvénient de la composante élastique dans un modèle est qu'il faut tenir compte de l'histoire de la déformation, ce qui numériquement pose pas mal de difficultés. Hibler a en la limite élastique du matériau  $\sigma_{LE}$  ; si la contrainte est inférieure à ce seuil, la déformation est élastique, autrement elle devient plastique

outre justifié l'utilisation d'une rhéologie visco-plastique plutôt qu'élasto-plastique par un argument théorique. Il a démontré que si on considère des échelles de temps ou de longueur suffisamment grandes, les fluctuations stochastiques non linéaires (c'est-à-dire plastiques) du taux de déformation présentent les caractéristiques d'une loi visqueuse (Hibler 1977). Ces différents arguments ont poussé Hibler à investiguer la rhéologie visco-plastique que nous allons présenter ci-après.

### 2.2.2 Le choix d'Hibler : la rhéologie visco-plastique

La rhéologie visco-plastique<sup>3</sup> considère la glace de mer comme un fluide visqueux compressible non linéaire, dont la forme la plus générale est donnée par l'équation :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, P)\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\zeta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, P) - \eta(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, P)) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbf{I} - \frac{P}{2}\mathbf{I} \quad (2.9)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  est le tenseur des taux de déformation,  $\eta$  et  $\zeta$  les viscosités de cisaillement et de volume, et  $\frac{P}{2}$  le terme de pression.

Dans le cas unidimensionnel, le seuil délimitant l'état de plasticité de celui de fluage visqueux correspond à un certain taux de déformation  $\dot{\epsilon}_0$ . A deux dimensions on généralise le concept de seuil de contrainte à l'aide d'une courbe de seuil<sup>4</sup> dans le plan des contraintes principales. Si l'état de contrainte se situe à l'intérieur de cette courbe, le fluide se comporte de façon visqueuse, autrement il est contraint à la plasticité et se trouve obligatoirement sur la courbe. Plusieurs types de courbes ont été envisagées et utilisées dans la littérature (Hibler 2003).

Cette courbe doit être la traduction fidèle des propriétés mécaniques du matériau. Afin d'imposer une résistance à la traction nulle, la courbe doit se situer dans le quadrant  $\sigma_I, \sigma_{II} \leq 0$ . La glace, considérée comme isotrope, offre une résistance à la compression plus forte qu'au cisaillement, ce qui implique que la courbe de seuil doit être symétriquement allongée autour de l'axe  $\sigma_I = \sigma_{II}$ . La courbe de seuil elliptique suggérée par Hibler (Fig. 2.11) satisfait ces critères tout en offrant l'avantage d'être numériquement facile à implémenter :

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + P)^2}{P^2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{P^2}e^2 - 1 = 0 \quad (2.10)$$

où  $e$  est l'excentricité de l'ellipse (typiquement 2) et  $P$  désigne la résistance de la glace, qui détermine la taille de l'ellipse. Afin de pouvoir comparer des points matériels ayant des résistances différentes, il convient de normaliser les contraintes principales par rapport à cette résistance, ce qui sera fait systématiquement.

<sup>3</sup>Notons que la rhéologie décrite dans ce paragraphe n'est pas à confondre avec la rhéologie visqueux-plastique (celle du fluide de Bingham) qui présente un écoulement visqueux au-delà du seuil de contrainte.

<sup>4</sup>Pour une plaque d'acier, le critère de Von Mises bidimensionnel se traduit par une ellipse centrée à l'origine

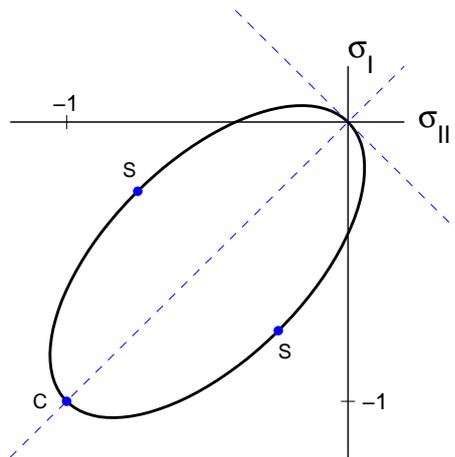


FIG. 2.11 – Courbe de seuil elliptique pour la rhéologie visco-plastique dans le plan des contraintes principales normalisées. Les points  $S$  correspondent à un état de cisaillement pur et le point  $C$  de compression isotrope maximale.

Une règle fait défaut afin de mettre en relation de façon univoque contrainte et taux de déformation. Celle qui est utilisée le plus fréquemment est la règle normale d'écoulement. Hibler (1977) combine cette règle avec l'équation de l'ellipse pour obtenir les viscosités suivantes :

$$\zeta = \min \left( \frac{P}{2\gamma}, 2.5 \cdot 10^8 P \right) \quad \text{et} \quad \eta = \zeta / e^2$$

où

$$\gamma = [(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2)(1 + 1/e^2) + 4\dot{\epsilon}_{xy}^2/e^2 + 2\dot{\epsilon}_{xx}\dot{\epsilon}_{yy}(1 - 1/e^2)]^{1/2}$$

Le terme  $\gamma$  est en fait une mesure du taux de déformation sur base de laquelle on détermine s'il y a plasticité ou non. Tous les états de contrainte ayant le même  $\gamma$  se situent sur une ellipse centrée en  $(-1/2, -1/2)$ , comme indiqué à la figure 2.12, et dont la taille normalisée à  $P$  est proportionnelle à  $\gamma$ . De même, des points matériels ayant des valeurs de  $\gamma$  différentes mais des tenseurs de taux de déformation égaux à un facteur près se trouvent sur la même droite partant du centre de l'ellipse car ils ont les mêmes vecteurs propres. La direction de cette droite dépend donc de l'état de déformation (proportions relatives des composantes de  $\dot{\epsilon}$ ) : elle passe par  $S$  pour le cisaillement pur et par  $C$  pour la compression isotrope.

La rhéologie visco-plastique ajuste donc les viscosités de telle sorte que la glace se comporte de façon plastique pour des grands taux de déformation et comme un fluide visqueux pour des petits taux de déformation. On est donc bien en présence d'une loi hautement non linéaire comme espéré.

Il reste maintenant à découvrir ce qui se cache derrière le terme de résistance  $P/2$ .

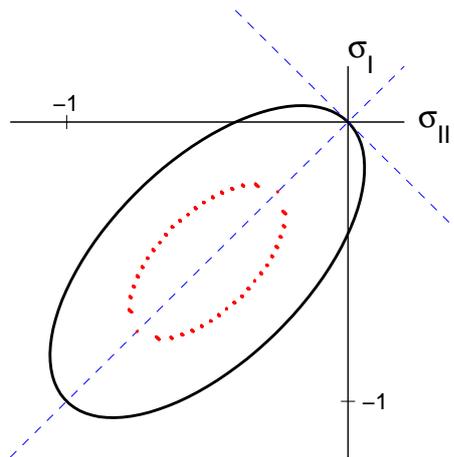


FIG. 2.12 – Représentation de points matériels pour lesquels  $0.965 \cdot 10^{-9} \leq \gamma \leq 10^{-9} \text{ s}^{-1}$  (couleur rouge). Ceux pour lesquels  $\gamma \geq 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$  se trouvent sur l'ellipse et sont en plasticité (traits continus).

Celle-ci constitue en fait une loi phénoménologique à deux paramètres  $p^*$  et  $C$ ,

$$P = p^* h e^{-C(1-A)}. \tag{2.11}$$

Elle est représentée à la Fig. 2.13 pour une épaisseur moyenne de 3 m. Il paraît d'abord

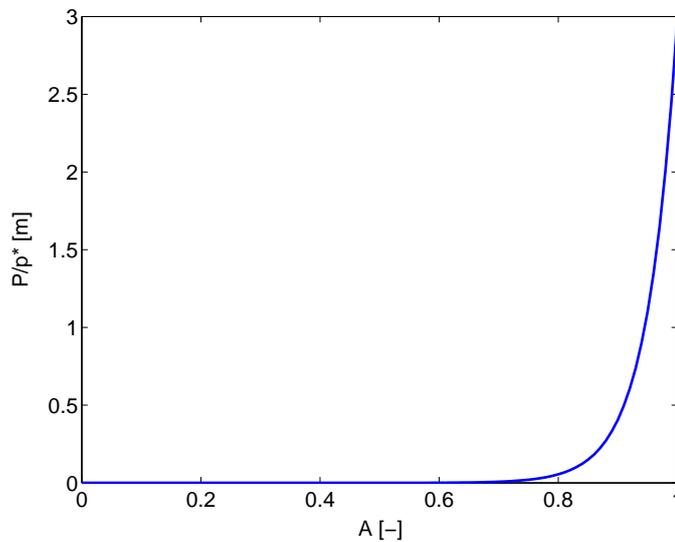


FIG. 2.13 – Evolution de la résistance de la glace avec la concentration.

logique que la résistance soit simplement proportionnelle à l'épaisseur. La dépendance avec la concentration est plus marquée, car en dessous d'une concentration de 0.7, la glace n'offre plus aucune résistance. Physiquement, la proportion de chenaux devient trop importante, laissant ainsi les floes se déplacer librement les uns par rapport aux autres. Ainsi si l'on passe de  $A = 1$  à  $A = 0.9$ , on perd 86% de la résistance !

Le paramètre  $p^*$  sert à ajuster le modèle rhéologique. A partir de données de dépla-

cements collectées depuis des balises, le modélisateur modifie généralement ce paramètre pour approcher ses résultats. On remarque que sa valeur dépend de la fréquence des données du vent. Pour un vent journalier, une valeur de  $30000 \text{ N/m}^2$  est généralement utilisée, si le vent est hebdomadaire, on diminuera jusqu'à  $5000 \text{ N/m}^2$  (Hibler et Ackley 1983).

En conclusion, la rhéologie visco-plastique permet de représenter, via sa composante plastique, les principales propriétés et caractéristiques de la glace tout en assurant une certaine simplicité numérique. Cet excellent compromis permet d'incorporer le comportement mécanique de la glace au sein de l'écoulement et en justifie l'utilisation largement répandue auprès des climatologues.

### 2.2.3 La rhéologie à travers un cas simple

L'influence de la rhéologie étant moins évidente en deux dimensions, nous allons mettre à profit la version unidimensionnelle de notre code à travers un cas simple. On dispose d'une étendue de  $2500 \text{ km}$  de glace qui flotte sur un océan immobile. La frontière ouest est libre et la frontière est est un mur d'une hauteur supposée infinie ( $u(x = L) = 0$ ). La résistance à la compression étant l'une des principales caractéristiques mécaniques de la glace de mer, nous lui appliquons donc une tension de vent constante et uniforme sur tout le domaine d'écoulement, de façon à la comprimer sur le bord est. On considère l'océan immobile avec une traînée linéaire. Les termes d'inertie sont supposés négligeables (voir annexe D) tout comme l'influence de la concentration en glace. Le problème est illustré par un schéma à la figure 2.14.

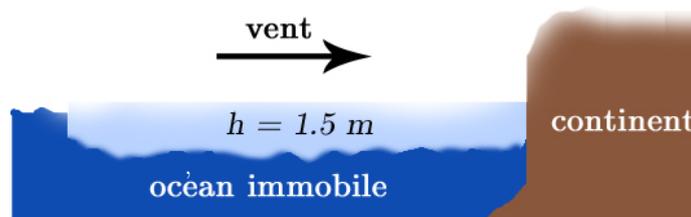


FIG. 2.14 – Schéma du problème 1D. Tension de vent constante, traînée linéaire de l'océan.

Les équations du problème sont les suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} \quad (2.12)$$

$$\rho_i h \frac{\partial u}{\partial t} = \tau_a - C_d u + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} + (\zeta - \eta) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p^* h}{2} \right) \quad (2.13)$$

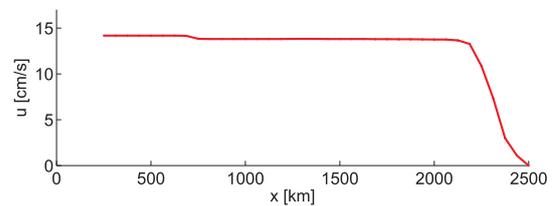
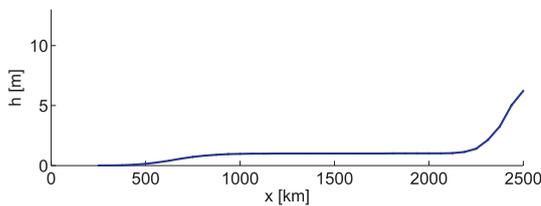
avec les paramètres suivants :

Vitesse du vent	$U_a$	10 m/s
Masse volumique de l'air	$\rho_a$	1.3 kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de traînée de l'air	$C_a$	0.0012
Tension de vent	$\tau_a = \rho_a C_a U_a^2$	0.1560 N/m <sup>2</sup>
Coefficient de traînée de l'océan	$C_d$	1.1

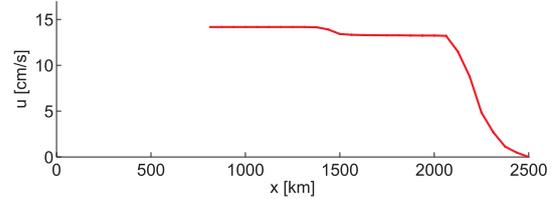
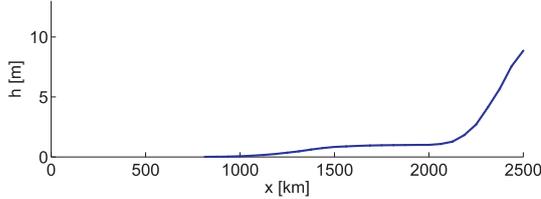
### Résistance à la compression et évolution des contraintes

Intuitivement nous devrions observer une accumulation progressive de glace sur la frontière est. Les résultats de la simulation de ce problème sont présentés à la figure 2.15.

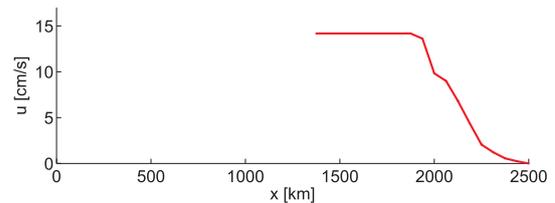
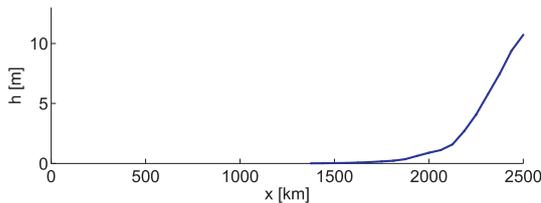
#### Jour 56



#### Jour 112



#### Jour 168



#### Jour 450

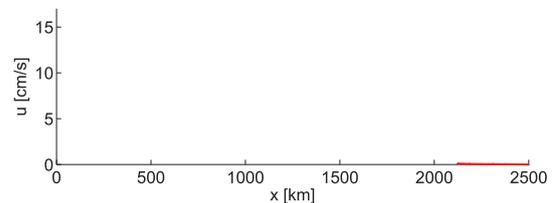
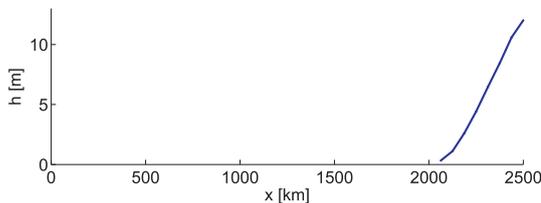


FIG. 2.15 – Epaisseur et vitesse de la glace pour le cas 1D (tension de vent constante, océan immobile, traînée linéaire).

Comme attendu, nous pouvons observer la formation de cette accumulation qui s'accompagne d'une diminution progressive de la vitesse. En effet, la pente de glace ainsi formée

produit un gradient de pression qui s'oppose à la tension du vent et ralentit donc la glace. On arrive ainsi à un état stationnaire avec une vitesse nulle partout et une pente de glace constante.

Le fait que cette pente soit constante est dû à la relation linéaire entre la résistance  $P$  et l'épaisseur de glace. Nous pouvons aisément calculer cette pente ainsi que la position de l'accumulation, grâce à la conservation du volume de glace. En annulant tous les termes de vitesse dans l'équation (2.13), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_a = \frac{p^* \Delta h}{2 \Delta x} \\ \frac{\Delta h \Delta x}{2} = h_0 L \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{2 h_0 L}{\Delta h} \\ \Delta h = \sqrt{\frac{4 \tau_a h_0 L}{p^*}} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Nous pouvons voir à la figure 2.16 la convergence des résultats. On voit le très bon accord entre ceux-ci et la solution analytique.

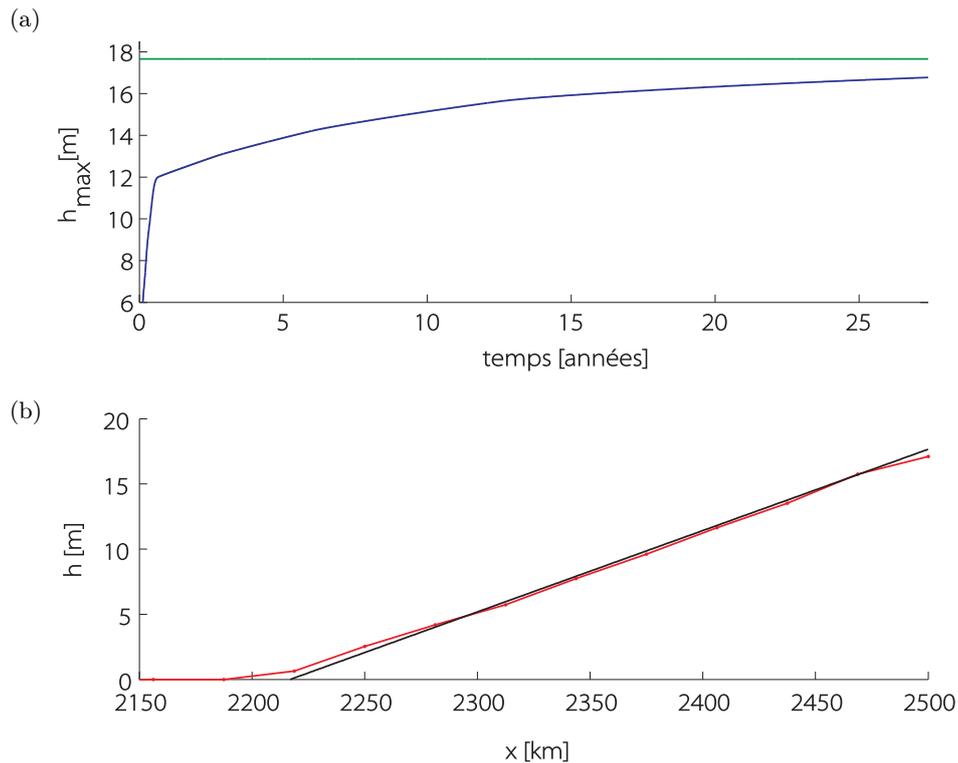


FIG. 2.16 – (a) Convergence du maximum de l'épaisseur vers sa valeur théorique (droite en trait vert) ; (b) détail de l'épaisseur de glace dans la zone de l'accumulation pour la simulation 1D (tension de vent constante, traînée linéaire de l'océan). La droite noire correspond à la solution analytique (équation (2.14)).

Notons que si nous avions opté pour une rhéologie linéaire visqueuse, aucune solution stationnaire n'aurait été atteinte, puisqu'il n'y a dans ce cas aucun couplage entre épaisseur

et vitesse au niveau de la rhéologie. Nous aurions alors observé un mur de glace d'une épaisseur infinie et de largeur nulle.

A présent concentrons-nous sur l'évolution des contraintes internes. Pour ce faire nous avons besoin de calculer les contraintes principales, qui dans ce cas-ci s'écrivent (Hunke 2001) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \begin{cases} \frac{\sigma_I}{P} = \left( \frac{\zeta - \eta}{P} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma_{II}}{P} = \left( \frac{\zeta + \eta}{P} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0 \begin{cases} \frac{\sigma_I}{P} = \left( \frac{\zeta + \eta}{P} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma_{II}}{P} = \left( \frac{\zeta - \eta}{P} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Deux choses sont à remarquer (voir Fig. 2.17) :

- si  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ , l'état de contrainte normalisé se trouve sur une droite de pente<sup>5</sup> 5/3 passant par le centre de l'ellipse,
- si  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ , l'état de contrainte normalisé se trouve sur une droite de pente 3/5 passant par le centre de l'ellipse.

L'état de contrainte ne peut donc se trouver que sur ces deux segments de droite et nous ne sommes par conséquent jamais en compression isotrope. Le cas de la compression peut néanmoins être analysé.

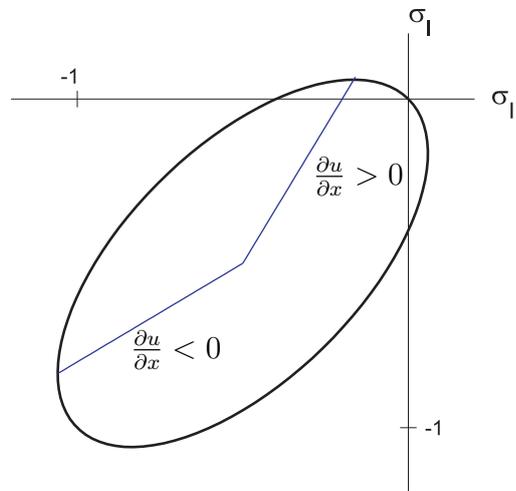


FIG. 2.17 – Courbe de seuil elliptique et contraintes principales pour le cas unidimensionnel.

Considérons maintenant l'évolution de l'état de contrainte d'un point matériel se trouvant au temps  $t = 0$  au milieu du bassin (Fig. 2.18). Au jour 6, l'état de contrainte se trouve très près du centre de l'ellipse puisque la valeur de  $\gamma$  est très faible. Au fur et à mesure que le point matériel se rapproche du bord est, la valeur de  $\gamma$  augmente et l'état de contrainte s'éloigne du centre de l'ellipse. Au jour 75,  $\gamma$  est supérieur à  $2 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ , le point

<sup>5</sup>En effet, le rapport  $\sigma_{II}/\sigma_I$  translaté à l'origine vaut  $\frac{\zeta + \eta}{\zeta - \eta} = \frac{5/4\zeta}{3/4\zeta}$  et l'inverse lorsque  $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ .

matériel se trouve donc dans une zone en plasticité. Il poursuit ensuite sa dérive et reste dans le même état de contrainte normalisé. N'oublions pas que tout au long de sa dérive, le point matériel voit sa résistance  $P$  augmenter (et donc également la taille de l'ellipse) puisque l'épaisseur augmente.

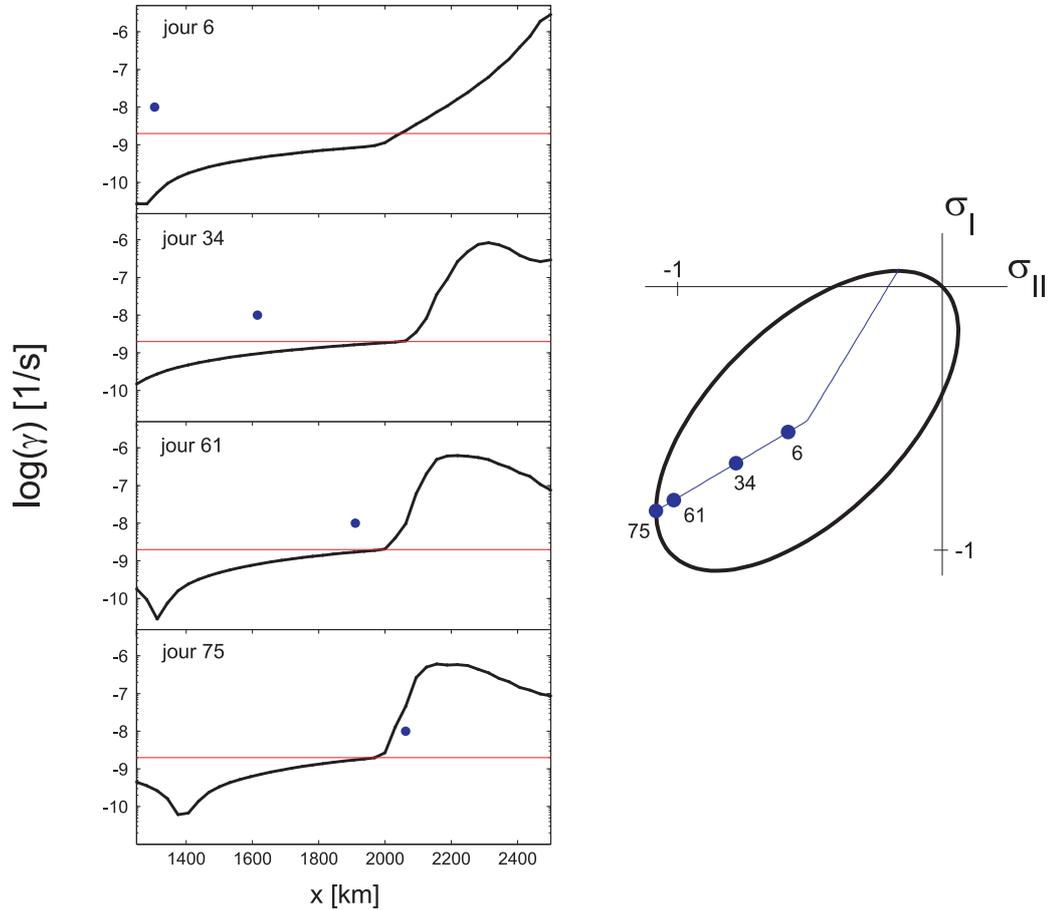


FIG. 2.18 – Evolution des contraintes principales d'un point matériel se trouvant au temps  $t = 0$  en  $x = L/2$ . L'affichage est réduit à  $[L/2 L]$ . La droite rouge représente la valeur  $\gamma_0$  au-dessus de laquelle il y a plasticité.

### Influence de $P$

La loi phénoménologique qui traduit la dépendance de  $P$  avec  $h$  et  $A$  peut faire ici l'objet d'une petite étude de sensibilité. Concentrons-nous plus particulièrement sur l'exposant de  $h$ . La relation linéaire qui lie  $P$  à  $h$  a été posée en vue d'obtenir une pente constante sous une tension de vent constante. En effet, si nous modifions cet exposant, la pente de l'accumulation se voit changée. Ceci est illustré à la figure 2.19. Nous réécrivons donc la relation en y incluant l'exposant  $s$  :

$$P = p^* h^s e^{-C(1-A)}$$

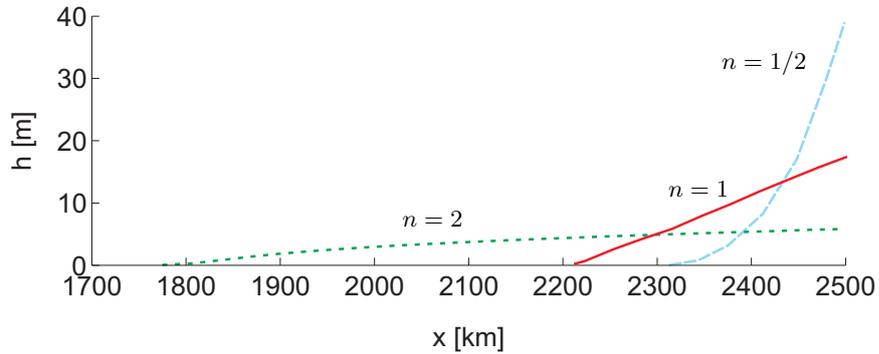


FIG. 2.19 – Influence de l'exposant de  $h$  dans la loi phénoménologique  $P = p^* h^s e^{-C(1-A)}$ . Résultats obtenus après 2000 jours :  $n=2$  (pointillés),  $n = 1$  (trait continu) et  $n = 1/2$  (trait interrompu).

Si  $s > 1$  la courbure est négative puisque la glace est freinée beaucoup plus rapidement, si  $s < 1$  elle est positive et si  $s = 1$  elle est nulle. Le bon sens physique veut en effet que cette accumulation soit linéaire, d'où la relation linéaire proposée dans le modèle d'Hibler.

L'importance de la rhéologie est, on le voit, capitale dans un modèle de glace de mer en raison des non linéarités observées dans le comportement de la glace. Cependant, toujours dans le souci de mieux simuler les dérives et concentrations en glace observées sur le globe, le modèle d'Hibler se doit évidemment d'incorporer la thermodynamique à travers les termes  $S_h$  et  $S_A$ .

### 2.3 Comment intégrer la thermodynamique ?

Les modèles à deux niveaux (glace fine-épaisse) permettent de mettre en évidence l'importance du rôle dynamique (résistance faible de la glace) mais surtout thermodynamique (impact sur les flux turbulents et radiatifs) des zones recouvertes par de la glace de faible épaisseur. Nous allons ici dévoiler la forme des termes sources qui interviennent dans les équations de conservation (2.1) et (2.2) et aborder le traitement des taux de croissance de la glace.

De façon générale, sur une région donnée, Hibler (1979) procède par pondération entre les zones recouvertes de glace épaisse et fine. En désignant par  $f(h)$  le taux de croissance d'une couche de glace d'épaisseur  $h$  et en se rappelant que  $h_0$  correspond à la hauteur limite en-dessous de laquelle on considère qu'il n'y a pas de glace, il propose :

$$\begin{cases} S_h &= Af(h/A) + (1 - A)f(0) \\ S_A &= S_{A1} + S_{A2} \end{cases} \quad (2.17)$$

où

$$S_{A1} = \begin{cases} (f(0)/h_0)(1 - A) & \text{si } f(0) > 0 \\ 0 & \text{si } f(0) \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_{A2} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_h \geq 0 \\ (A/2h)S_h & \text{si } S_h < 0 \end{cases}$$

Le terme  $S_h$  tient compte du taux de croissance de chacun des deux niveaux de notre modèle et évalue l'accrétion ou l'ablation de l'épaisseur moyenne de la glace. La hauteur de la couche épaisse est considérée comme constante de valeur  $h/A$  (figure 2.5) tandis que pour des raisons numériques, celle de la couche fine vaut uniformément 0. Lorsqu'une partie de l'océan est libre de glace ( $A \neq 1$ ), et que  $f(0) < 0$  (été) on garde la même équation même s'il n'y a plus de glace à fondre au-dessus de cette parcelle de l'océan. En fait on considère que la chaleur absorbée par les zones libres de glace se mélange horizontalement et alimente le flux de chaleur sensible océanique. Elle participe ainsi à la fonte de la banquise jusqu'à ce que la température de la couche mélangée atteigne sa température de congélation à nouveau.

Le terme  $S_A$  quant à lui rend compte des variations de la proportion de glace fine  $(1 - A)$  dues aux procédés thermodynamiques. En hiver, on observe que la proportion de surface libre de glace diminue rapidement, tandis qu'en été, la glace disparaît lentement de la surface de l'océan. Tout naturellement, Hibler modélise donc de façon différente les processus qui mènent à une emprise plus vaste de la glace sur l'océan ( $S_{A1}$ ) et à sa débacle ( $S_{A2}$ ). Lorsque le taux d'accrétion de glace à la surface de l'océan devient positif ( $f(0) > 0$ ), le terme  $S_{A1}$  permet à la fraction d'océan  $(1 - A)$  de décroître exponentiellement selon une constante de temps de  $h_0/f(0) \sim 5$  jours. Notons au passage que cette formulation entraîne une diminution voulue de l'épaisseur de glace épaisse  $h_r$  : la concentration en glace augmente plus rapidement que l'épaisseur en hiver et en conséquence le rapport  $h/A$  diminue.

Lorsque la glace commence à fondre, l'océan se découvre petit à petit. Hibler fait l'hypothèse que la glace épaisse est uniformément répartie entre 0 et  $2h/A$  et que la fonte latérale de la banquise ne dépend pas de l'épaisseur de la glace. En un temps  $\Delta t$ , toute la glace d'épaisseur inférieure à  $S_h \Delta t$  aura fondu. De par la distribution uniforme, cette glace recouvre une surface de  $\frac{S_h \Delta t}{2h/A}$ . Par unité de temps, on obtient donc le terme  $S_{A2}$ . En hiver, il se peut que de la glace très épaisse et concentrée ait un  $S_h < 0$ , ce qui va engendrer selon notre modèle une légère fonte latérale de la glace. Cette apparition d'eau libre à la surface, qui n'est pas physique, est cependant minime.

Les taux de croissance  $f(h)$  peuvent être déterminés de deux manières. La première possibilité qui s'offre à nous est de simplement utiliser des valeurs tabulées, en l'occurrence par Thorndike et al. (1975). Ces données ont été déduites au moyen de résultats empiriques (pour la glace fine), de calculs théoriques par le MU71 (pour la glace d'épaisseur 1-4 m) et en partie d'observations, de théorie et d'intuition pour la glace très épaisse, ce qui leur assure une très grande fiabilité. La deuxième possibilité est d'utiliser un modèle thermodynamique

qui déduit les taux de croissance ou de fonte des bilans thermiques. Le petit modèle que nous avons développé à la section 1.4 peut bien entendu remplir ce rôle, tout en gardant à l'esprit sa simplicité ainsi que les différentes hypothèses que nous avons faites. Nous avons comparé à la table 2.1 les taux de croissance pour différentes épaisseurs au 11 de chaque mois issus de Thorndike et al. (1975) et de notre modèle sans neige. Une simulation de contrôle a été effectuée afin de déterminer les températures à ces dates et de pouvoir les introduire comme conditions initiales au modèle.

Epaisseur [cm]	0	50	100	300	450
Janvier	12.15	1.97	0.51	0.21	0.06
	3.45	1.66	1.10	0.45	0.30
Février	12.67	2.11	0.68	0.25	0.10
	3.67	1.77	1.18	0.49	0.33
Mars	12.71	2.13	0.80	0.26	0.13
	3.27	1.74	1.15	0.48	0.32
Avril	10.82	1.63	0.36	0.25	0.14
	0.98	1.25	0.82	0.32	0.21
Mai	6.88	0.78	0.21	0.19	0.13
	0	0.39	0.24	0.06	0.03
Juin	0	0	0	0.09	0.10
	0	-0.51	-0.52	-0.48	-0.47
Juillet	-1.55	-1.35	-1.25	-1.14	-1.10
	0	-1.99	-1.84	-1.62	-1.57
Août	-0.65	-0.55	-0.52	-0.42	-0.38
	0	-0.56	-0.57	-0.52	-0.51
Septembre	5.50	0.56	-0.12	-0.06	-0.02
	0.15	0.44	0.27	0.08	0.04
Octobre	9.01	1.21	0.34	-0.06	-0.04
	2.13	1.05	0.68	0.26	0.16
Novembre	11.55	1.81	0.55	0	-0.03
	3.25	1.56	1.03	0.42	0.27
Décembre	12.04	1.94	0.44	0.15	0
	3.41	1.64	1.08	0.43	0.29

TAB. 2.1 – Comparaison des taux de croissance de la glace [cm/j] pour différentes épaisseurs au 11 de chaque mois. La première ligne de chaque mois correspond aux valeurs tabulées de Thorndike et al. (1975) tandis que la deuxième a été fournie par le modèle thermodynamique à "zéro couche" sans neige.

On s'aperçoit que les taux de croissance pour de la nouvelle glace sont largement sous-

estimés par notre modèle qui ne tient compte que des bilans énergétiques et simplifie donc le processus complexe de formation de la glace de mer. L'inverse se produit pour de la glace épaisse : en hiver, l'absence de neige dans notre modèle provoque un flux conductif anormalement élevé qui entraîne une accrétion trop importante à la base de la couche de glace. Entre ces deux extrêmes, notre modèle reproduit assez correctement les taux  $f(h)$ , en remarquant à nouveau que le manque de traitement des bulles de saumure provoque un déphasage de la fonte au printemps et du gel à la fin de l'été. L'avantage de ce petit modèle thermodynamique est qu'il nous permet d'étudier la réponse de la banquise sous différents forçages (qui peuvent évoluer dans le temps, selon la latitude, ...) ou paramètres (présence de neige, albédo, point de congélation de l'eau de mer, ...).

### Un couplage indispensable

Un aspect important de la modélisation de la glace de mer est le couplage qui doit intrinsèquement exister entre dynamique et thermodynamique. Comme nous l'avons vu, les mouvements de la glace modifient sa morphologie (à travers  $h$  et  $A$ ). Puisque les taux de croissance dépendent de l'épaisseur de glace en un point, ces mêmes mouvements affectent indirectement la thermodynamique. Il est donc nécessaire d'intégrer dans le modèle un schéma d'advection qui mette en relation les mouvements de la glace et sa morphologie, et établisse ainsi une dépendance de la thermodynamique envers la dynamique. Inversément, les processus thermodynamiques permettent la coexistence de glaces récentes et anciennes, qui réagissent différemment face aux forçages. La rhéologie doit donc tenir compte de ces comportements pour les incorporer à la dynamique. Ceci est assuré par la loi phénoménologique qui décrit la dépendance de la résistance de la glace avec l'épaisseur et la concentration, témoignant du couplage indéniable entre dynamique et thermodynamique.

## Chapitre 3

# Résolution numérique du modèle d'Hibler

Au vu de la complexité et de la non linéarité de notre système d'équations aux dérivées partielles, les solutions de notre problème ne peuvent être obtenues analytiquement, ce qui nous restreint à le résoudre numériquement. Nous présentons dans ce chapitre les différentes étapes nécessaires pour passer de notre système d'équations différentielles aux conditions aux limites à un système d'équations algébriques sur un espace-temps discrétisé. Cependant, la résolution d'un tel système d'équations ne se fait pas sans obstacles : erreurs dues aux discrétisations, problèmes de stabilité, conditions aux frontières multiples, . . . autant de problèmes qu'il a fallu analyser ou résoudre tout au long de notre travail afin de valider notre code.

### 3.1 Formulation discrète

Il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre un problème différentiel aux conditions aux limites : différences finies, éléments finis, méthodes spectrales, volumes finis, . . . Le but de notre mémoire est d'étudier la résolution par éléments finis du modèle d'Hibler. Parmi les principales étapes qui caractérisent cette méthode, on distingue : (i) la construction d'une formulation intégrale du système différentiel, appelée formulation faible ; (ii) le partitionnement du domaine d'écoulement en sous-domaines (mailles) ; (iii) le choix du type d'élément et des fonctions de forme associées aux noeuds et enfin, (iv) la discrétisation des champs (continus) en sommes de fonctions polynômiales évaluées aux noeuds du maillage.

### 3.1.1 Dérivation de la formulation faible

La formulation faible est une formulation quasiment équivalente à la formulation classique d'un problème différentiel (souvent dénommée formulation forte) qui présente l'avantage d'abaisser d'une unité l'ordre de dérivation le plus haut des équations ainsi que d'incorporer de façon naturelle les conditions aux frontières. Désignons par  $\Omega$  le domaine d'écoulement et  $\partial\Omega$  la frontière de ce domaine. On impose une vitesse nulle aux parois, une force de contact nulle sur la frontière libre ainsi qu'une condition initiale en vitesse, en épaisseur et en concentration. Les équations (voir annexe D) ainsi que les conditions aux frontières de notre problème sont donc :

*Conservation de la masse et de la concentration*

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{u}) + S_h \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \cdot (A\mathbf{u}) + S_A \quad (3.2)$$

*Conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho_i h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w - \rho_i h g \nabla \xi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

*Loi de comportement*

$$\sigma_{ij} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} + (\zeta - \eta) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \delta_{ij} - \frac{p^* h}{2} e^{-C(1-A)} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

*Conditions aux limites*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 && \text{sur } \Gamma_D, \forall t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_N, \forall t \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{sur } \Omega, \text{ en } t = t_0 \\ h &= h_0 && \text{sur } \Omega, \text{ en } t = t_0 \\ A &= A_0 && \text{sur } \Omega, \text{ en } t = t_0 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  représentent les frontières le long desquelles on applique respectivement des conditions aux frontières de Dirichlet et de Neumann ( $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ).

Introduisons encore les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle fg \rangle &= \int_{\Omega} fg \, d\Omega, \\ \ll fg \gg &= \int_{\partial\Omega} fg \, ds, \\ \ll fg \gg_{\Gamma_N} &= \int_{\Gamma_N} fg \, ds, \\ \ll fg \gg_{\Gamma_D} &= \int_{\Gamma_D} fg \, ds. \end{aligned}$$

La formulation faible s'obtient de façon assez systématique en multipliant chaque équation par une fonction *test* (appartenant au même espace de fonctions que les variables de l'équation) et en l'intégrant sur le domaine  $\Omega$ . Si on désigne par  $\hat{\mathbf{u}}$  les fonctions tests de la vitesse, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient alors :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho_i h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \rangle &= - \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \rho_i h f \mathbf{k} \times \mathbf{u} \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}_a \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}_w \rangle \\ &\quad - \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot (\rho_i g h \nabla \xi) \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

En effectuant une intégration par partie sur le dernier terme du membre de droite et en y appliquant le théorème de la divergence, celui-ci devient successivement, en imposant que les fonctions tests s'annulent sur  $\Gamma_D$  et puisque  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ ,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rangle &= \langle \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rangle - \langle \nabla \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \rangle \\ &= \ll (\hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} \gg - \langle \nabla \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \rangle \\ &= - \langle \nabla \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

Appliquons la même algèbre pour l'équation de conservation de la masse ou de la concentration (symbolisées par  $\Psi$ ) :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle &= - \langle \hat{\Psi} \nabla \cdot (\Psi \mathbf{u}) \rangle + \langle \hat{\Psi} S_\psi \rangle \\ \langle \hat{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle &= - \ll \hat{\Psi} \Psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \gg_{\Gamma_N} + \langle \hat{\Psi} S_\psi \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Discrétisation spatiale du problème

La formulation "éléments finis" consiste à approcher les fonctions inconnues  $f(x, y, t)$  continues par une approximation polynômiale par morceaux  $f^h(x, y, t)$  définie comme une somme de fonctions de forme  $\tau_j^f(x, y)$  multipliées par des valeurs nodales  $F_j(t)$ . Lorsque les fonctions tests utilisent les mêmes fonctions de base que les fonctions de forme, on parle de méthode de Galerkin.

On subdivise ensuite le domaine  $\Omega$  en  $n$  mailles triangulaires qui définissent les éléments  $\Omega_k$ . Nous pouvons alors discrétiser chaque variable de la façon suivante :

$$f(x, y, t) \approx f^h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N F_j(t) \tau_j^f(x, y)$$

où  $N$  correspond au nombre de noeuds du domaine  $\Omega$ . Les fonctions de forme définissent la précision de l'approximation  $f^h$ .

### 3.1.3 Choix des interpolations et des fonctions de forme

Par soucis de simplicité, nous optons pour une interpolation constante  $P_0$  pour l'épaisseur et la concentration, et une interpolation linéaire non conforme  $P_1^{NC}$  pour les vitesses.

Les conditions aux frontières et les calculs des flux sont effectivement plus faciles à imposer pour des vitesses calculées aux segments. Etant donné que les équations de conservation de la masse et de la concentration portent sur des grandeurs moyennées ( $h = Ah_r$ ) ou constantes sur une surface, il nous a paru logique d'utiliser une interpolation constante  $P_0$  pour discrétiser ces deux grandeurs. Cela a également l'avantage de faciliter le schéma d'advection qui est fondamental pour le couplage dynamique-thermodynamique. Nous avons donc opté pour une interpolation linéaire non conforme pour les vitesses et constante pour l'épaisseur et la concentration. Ce choix est peut-être contestable (une interpolation plus lisse de l'épaisseur ferait probablement partie des améliorations à apporter à notre code), mais il nous a toutefois permis d'obtenir des résultats probants.

Les solutions approchées et les fonctions test s'écrivent donc pour notre problème :

$$\mathbf{u}(x, y, t) \approx \mathbf{u}^h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j(t) \tau_j^u(x, y) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \begin{bmatrix} \tau_j^u \\ 0 \end{bmatrix} + V_j(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_j^u \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{u}} \approx \hat{\mathbf{u}}^h = \begin{bmatrix} \tau_i^u \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_i^u \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Psi(x, y, t) \approx \Psi^h(x, y, t) = \sum_{k=1}^n P_k(t) \tau_k^h(x, y) \quad (3.10)$$

$$\hat{\Psi} \approx \hat{\Psi}^h = \tau_l^h \quad (3.11)$$

où  $n$  et  $N$  sont le nombre d'éléments et de segments et  $\tau_j^u$  et  $\tau_k^h$  les fonctions de forme associées à la vitesse et à l'épaisseur ou la concentration.

Nous avons remarqué que des instabilités se produisent si l'on discrétise le gradient de pression par une approximation constante par élément. Ces instabilités n'affectent cependant pas de façon significative la solution en vitesse. Ce gradient sera, de façon préventive, lissé par moindres carrés pour la résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Avant de pousser plus en avant la discrétisation spatiale de nos équations, il s'agit de choisir un schéma d'intégration temporelle afin de pouvoir propager la solution dans le temps.

### 3.1.4 Discrétisation temporelle du problème

De la même façon que nous avons discrétisé spatialement notre système d'équations, nous divisons le temps (variable continue) en une série d'intervalles. Ceci permet une progression numérique dans le temps de façon discrète. La méthode qui définit cette progression de la solution est le schéma d'intégration temporelle. Insistons sur le fait que l'objectif de notre mémoire n'est pas d'utiliser les méthodes numériques les plus performantes, mais bien d'arriver à des résultats cohérents qui permettent de mettre en évidence les principales ca-

ractéristiques physiques de la glace de mer. A ce titre, le schéma  $\theta$  d'intégration temporelle offre à la fois des résultats satisfaisants ainsi qu'une certaine simplicité numérique.

### Schéma $\theta$ d'intégration temporelle

Puisque le temps est divisé en une série d'intervalles, la solution ne sera approchée qu'aux temps  $t_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N_t$ ). Dans notre modèle, seuls les termes  $\frac{\partial^*}{\partial t}$  nécessitent une discrétisation. Typiquement on remplace ces dérivées temporelles par des approximations linéaires sur un pas de temps. Pour un champ  $f(t)$ , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}$$

avec  $f^{n+1} = f(t_{n+1}) = f(t_n + \Delta t)$ . Il reste maintenant à décider à quel pas de temps seront évalués les autres termes des équations. Utiliser les valeurs des termes au temps  $t_n$  correspond à un schéma totalement explicite. Si au contraire on se sert d'une prévision de ces valeurs au temps  $t_{n+1}$ , il s'agit d'un schéma implicite. De façon à généraliser cette approche, le principe du schéma  $\theta$  est d'évaluer les termes au temps  $t_{n+\theta} = \theta t_{n+1} + (1 - \theta)t_n = t_n + \theta \Delta t$  où  $\theta \in [0, 1]$  représente le facteur d'implicité. Pour une valeur  $\theta = 0$  nous obtenons un schéma d'Euler explicite, pour  $\theta = 1$  un schéma d'Euler implicite, et  $\theta = 0.5$  correspond au schéma de Crank-Nicholson. Si l'on considère l'équation  $\frac{\partial f}{\partial t} = g$ , la discrétisation donne :

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = \theta g^{n+1} + (1 - \theta)g^n \quad (3.12)$$

Avant de discuter du schéma  $\theta$  à utiliser, nous avons à présent tous les outils nécessaires pour établir le système algébrique issu de la discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement ; les équations de conservation (3.1) et (3.2) nécessitent un traitement particulier et feront l'objet de la section suivante. En substituant les expressions (3.8), (3.9) et (3.12) dans l'équation (3.6), on obtient (voir annexe E) :

$$\sum_{j=1}^N M_{ij}^{n+\theta} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + (K_{ij} U_j)^{n+\theta} = F_i^{n+\theta} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

où on utilise la notation  $B^{n+\theta} = \theta B^{n+1} + (1 - \theta)B^n$ .

#### 3.1.5 Schéma d'advection

Il est essentiel de mettre au point un schéma d'advection qui assure les transports du volume et de la surface de glace tout en respectant strictement la conservation de la masse. La concentration impose une contrainte supplémentaire à laquelle il faut veiller :  $A \leq 1$ . Repartons de l'équation (3.7), dans laquelle nous introduisons les équations (3.10) et (3.11).

Comme l'intégrale sur le domaine  $\Omega$  vaut la somme des intégrales sur les éléments  $\Omega_k$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial H_k}{\partial t} \langle \tau_l^h \tau_k^h \rangle_{\Omega_k} = - \sum_{k=1}^n H_k \ll \tau_l^h \tau_k^h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \gg_{\partial\Omega_k} + \langle \tau_l^h S_h^k \rangle_{\Omega_k} \quad l = 1, \dots, n$$

Puisque  $\langle \tau_k^h \rangle_{\Omega_l} = \frac{Je_l}{2} \delta_{kl}$ , on a pour chaque élément  $l$  :

$$\frac{Je_l}{2} \frac{\partial H_l}{\partial t} = -H_l \ll \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \gg_{\partial\Omega_l} + \frac{Je_l}{2} S_h^l \quad (3.14)$$

où  $\frac{Je_l}{2}$  vaut la surface de l'élément  $l$ .

Etant donné que l'épaisseur est discontinue entre éléments, l'intégrale de bord n'est pas nulle. Il faut de ce fait l'évaluer sur la frontière de chaque élément du domaine. Le champ d'épaisseur ne pouvant en aucun cas être négatif (ce qui serait totalement contraire à la physique) et le schéma devant être strictement conservatif, cette équation nécessite un traitement particulier. Le calcul des intégrales de bord devra donc satisfaire ces deux contraintes :

$$H_l^{n+1} \geq 0, \quad (3.15)$$

$$\sum_k \frac{Je_k}{2} H_k^{n+1} = \sum_k \frac{Je_k}{2} \left( H_k^n + \Delta t (S_h^k)^n \right). \quad (3.16)$$

Les intégrales de bord deviennent

$$-H_l \ll \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \gg_{\partial\Omega_l} = - \sum_{i=1}^3 L_i u_{i,n} H_* \quad (3.17)$$

où les  $L_i$  sont les longueurs des segments,  $u_{i,n}$  les vitesses normales à ces segments, et  $H_*$  l'épaisseur d'un des deux éléments qui partagent le même segment. Celle-ci doit faire l'objet d'un critère de décision. Nous décidons ici de prendre l'épaisseur de l'élément pour lequel la vitesse normale est positive, c'est-à-dire l'élément qui « donne » de la glace. Ceci équivaut à une approche de type volumes finis où chaque élément est un volume de contrôle et où le calcul des flux est effectué en amont (*upwind*). Considérons un élément  $\Omega_k$  et ses trois voisins (Fig. 3.1). La somme des flux vaut dans ce cas-ci,

$$\sum_{i=1}^3 L_i u_{i,n} H_* = L_1 u_{1,n} H_l + L_2 u_{2,n} H_m + L_3 u_{3,n} H_s.$$

La résolution de l'équation (3.14) ne peut dès lors que se faire de manière explicite, nous obtenons donc finalement :

$$H_l^{n+1} = H_l^n - \frac{2\Delta t}{Je_l} \sum_{i=1}^3 L_i u_{i,n} H_*^n + \Delta t (S_h^l)^n \quad (3.18)$$

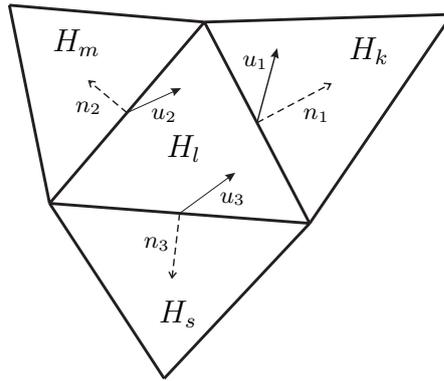


FIG. 3.1 – Calcul des flux sur un élément.

La condition 3.15 peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}
 H_l^{n+1} \geq 0 &\Leftrightarrow H_l^n - \frac{2\Delta t}{J_{el}} \sum_{i=1}^3 L_i u_{i,n} H_*^n + \Delta t (S_h^l)^n \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 L_i u_{i,n} H_*^n \leq \frac{J_{el}}{2} \left( \frac{H_l^n}{\Delta t} + (S_h^l)^n \right),
 \end{aligned}$$

ce qui fixe le flux de glace maximal que l'élément peut donner à l'instant  $t^{n+1}$  en fonction du volume de glace qu'il contenait en  $t_n$  et de l'accrétion/fonte de glace pendant le temps  $\Delta t$ .

La deuxième condition (3.16) est automatiquement vérifiée. Il suffit de sommer sur tous les éléments l'équation (3.18) et de remarquer que les flux s'annulent de part et d'autre de chaque segment. Les équations et l'algorithme liés à la concentration sont identiques à celles de l'épaisseur, si ce n'est qu'il faut imposer  $A \leq 1$ . La concentration n'est donc pas une grandeur conservative; la condition équivalente à (3.16) ne doit pas être satisfaite.

Notre schéma se basant sur des flux entre éléments directement adjacents (correspondant donc à un schéma utilisant des différences décentrées du premier ordre) et un schéma d'Euler explicite, l'erreur générée doit être au mieux  $\mathcal{O}(\Delta t, h)$ . Nous verrons plus loin si cela se vérifie. L'algorithme de calcul est détaillé à la page suivante.

```

fluxh_sortant % matrice (Nelem,Nseg) des flux sortants (nul si entrant)
flux_uHL      % flux sortant total de chaque élément
Shelem        % taux de croissance de h pour chaque élément
SAelem        % taux de croissance de A pour chaque élément
Hn            % épaisseur moyenne de chaque élément
Hn_reel       % épaisseur réelle de chaque élément

pour chaque élément i
  pour chaque segment is
    calcul de u_n & L
    si u_n > 0
      si l'élément adjacent n'est pas un mur
        fluxh_sortant(i,is) = L*u_n*Hn(i) ;
      fin
    fin
  fin

  % Check si les flux sortants > flux max pour l'élément courant
  sommeh = sum(fluxh_sortant(i,:)) ;
  fluxh_max = max(0,Jac(i)/2*(Hn(i)/dt + Shelem(i))) ; % On ne peut avoir un flux négatif
  si sommeh > fluxh_max % Pondération
    fluxh_sortant(i,:) = fluxh_sortant(i,+)/sommeh*fluxh_max ;
  fin
fin

% Calcul des Hnp1(i) en tenant compte des flux entrants -> flux_uHL
pour chaque élément i
  pour chaque segment is
    si fluxh_sortant(i,is) == 0 % flux entrant = -flux sortant de l'élément adjacent
      si l'élément adjacent n'est pas un mur
        flux_uHL(i) += -fluxh_sortant(elem_adj) ;
      fin
    fin
  fin
  flux_uHL(i) += sum(fluxh_sortant(i,:)) ;
  Hnp1(i) = max(0,Hn(i) - 2*flux_uHL(i)*dt/Jac(i) + Shelem(i)*dt) ;

  % On tient compte du "lateral growth" de la glace
  si SAelem(i) > 0 % de la glace d'épaisseur h0 a été créée
    Hnp1(i) += h0*SAelem(i)*dt ;
  ou si SAelem(i) < 0 % de la glace d'épaisseur Shelem*dt a été enlevée
    Hnp1(i) = max(0,Hnp1(i) + Hn_reel(i)*SAelem(i)*dt) ;
  fin
fin

% Frontiere ouverte : calcul du volume sortant
vol_out += fluxh_sortant(élém_front)*dt ;

pour chaque élément i
  si Anp1(i) != 0
    Hnp1_reel(i) = Hnp1(i)/Anp1(i) ;
  sinon % Concentration nulle => H_reel nul
    Hnp1_reel(i) = 0 ;
  fin
fin

```

### 3.1.6 Pas de temps, stabilité et précision

La résolution numérique d'une équation aux dérivées ordinaires (EDO)(3.19) doit être confrontée à une analyse de stabilité (Winckelmans 2004).

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (3.19)$$

En effet, le schéma d'intégration utilisé pour propager la solution dans le temps doit nécessairement être stable, c'est-à-dire que la solution doit rester bornée. L'analyse de stabilité d'une EDO étant un concept linéaire, la fonction  $f(u, t)$  doit être linéarisée autour du point  $(u_0, t_0)$  :

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) = \underbrace{f(u_0, t_0)}_{\beta} + (u - u_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, t_0)}_{\lambda} + (t - t_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(u_0, t_0)}_{\gamma} \quad (3.20)$$

en posant  $u' = u - u_0$  et  $t' = t - t_0$ , on a :

$$\frac{du'}{dt'} - \lambda u' = \beta + \gamma t' \quad (3.21)$$

La stabilité d'un schéma est gouvernée par la partie homogène de l'équation :

$$\frac{du'}{dt'} = \lambda u'$$

La partie non homogène de l'équation fournit en effet une composante bornée de la solution. Quel que soit le schéma d'intégration, si l'on discrétise cette équation dans le temps, on obtient une relation entre la solution au pas de temps  $n + 1$  et celle au pas de temps  $n$  :

$$U^{n+1} = \rho U^n = \rho^{n+1} U^0$$

$\rho$  est le facteur d'amplification de la solution numérique à chaque pas de temps. Le schéma est donc stable si  $|\rho| \leq 1$ .

Appliquons maintenant ce concept à notre équation de quantité de mouvement. Pour plus de facilité, nous considérons le cas unidimensionnel et analysons chaque terme indépendamment des autres. Nous pouvons ici enlever les termes indépendants de  $u$  qui n'ajoutent aucune contrainte. En appliquant ensuite notre schéma d'intégration, nous pouvons en déduire des conditions de stabilité pour chacun des autres termes :

#### - tension de l'océan

Ce terme doit être linéarisé autour de  $u = 0$  et se simplifie comme suit :

$$\tau_w = \rho_w C_w (U_w - u)^2 = -2\rho_w C_w |U_w| u$$

La discrétisation fournit :

$$\begin{aligned} \rho_i \bar{h} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= -2\rho_w C_w |U_w| [(1 - \theta) U^n + \theta U^{n+1}] \\ U^{n+1} &= \frac{1 - (1 - \theta) D \Delta t}{1 + D \Delta t} U^n \end{aligned}$$

où  $D = 2\rho_w C_w |U_w| / \rho_i h$ . La condition s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \theta < 1/2 & : \quad \Delta t \leq \frac{\rho_i h}{\rho_w C_w |U_w| (1 - 2\theta)} \\ \theta \geq 1/2 & : \quad \text{inconditionnellement stable} \end{aligned}$$

#### - rhéologie

Puisque les viscosités sont non linéaires, on fait l'analyse en les considérant constantes et égales à leurs valeurs maximales. Ce terme devient donc  $\nabla \cdot \sigma = (\zeta_{max} + \eta_{max}) \frac{d^2 u}{dx^2}$ . Ceci mène à une équation de diffusion, dont la condition de stabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} \theta < 1/2 & : \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x_{min}^2}{2(\zeta_{max} + \eta_{max})(1 - 2\theta)} \\ \theta \geq 1/2 & : \quad \text{inconditionnellement stable} \end{aligned}$$

où  $\Delta x_{min}$  est la plus petite maille de la grille.

#### - force de Coriolis

Nous considérons ici le cas bidimensionnel, car la force de Coriolis n'a pas de sens à une dimension. Des considérations énergétiques fournissent une condition de stabilité : le schéma ne peut en aucun cas créer de l'énergie. Si l'on pose  $w = u + iv$ , où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse, et  $i = \sqrt{-1}$ , on peut montrer que l'équation de Coriolis se ramène à :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ifw$$

En discrétisant l'équation il vient :

$$W^{n+1} = \rho W^n \quad \text{où } \rho = \frac{1 + if\Delta t(1 - \theta)}{1 - if\Delta t\theta}$$

en imposant  $|\rho| \leq 1$  on obtient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \theta < 1/2 & : \quad \text{inconditionnellement instable} \\ \theta \geq 1/2 & : \quad \text{inconditionnellement stable} \end{aligned}$$

La table 3.1 reprend les différents temps caractéristiques pour différentes valeurs de  $\theta$ . On remarque que le schéma est instable en-dessous de  $\theta = 0.5$ . Une valeur de 0.5 constitue généralement un bon compromis entre la précision de l'explicite et la stabilité de l'implicite.

La stabilité de nos équations de conservation de la quantité de mouvement résulte du couplage des différents processus, et non de chacun des processus pris indépendamment. Le pas de temps critique sera donc finalement déterminé par la condition de stabilité résultant de ce couplage. Néanmoins, l'analyse faite ici donne déjà une bonne idée de l'ordre de grandeur des pas de temps à utiliser et des valeurs de  $\theta$  à éviter.

	$\theta = 0$	$\theta = 0.49$	$\theta \geq 0.5$
force de Coriolis	incond.	instable	
tension de l'océan	0.5	24.77	incond. stable
rhéologie	$4 \cdot 10^{-3}$	0.1978	

TAB. 3.1 – Pas de temps critiques en heures des trois termes dépendant de  $u$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Pour  $\theta < 0.5$ , le pas de temps est fortement restreint par le terme rhéologique.

Cependant, il faut rappeler que notre système d'équations algébriques (3.13) est un système d'équations implicites non linéaires dès que  $\theta \neq 0$ . En effet, les matrices de masse, de raideur et le vecteur  $\mathbf{F}^{n+\theta}$  se composent d'éléments non linéaires en  $U^{n+1}$  et/ou  $H^{n+1}$  et  $A^{n+1}$ . La résolution d'un tel système nécessite donc un processus itératif pour converger vers la solution  $U^{n+1}$ , comme par exemple le schéma de Newton-Raphson. Un tel processus peut augmenter considérablement le temps de calcul à chaque pas de temps. Une solution pour pallier à ce problème est de remplacer la matrice  $\mathbf{K}^{n+1}$  par celle qui est connue au pas de temps  $n$ , c'est-à-dire  $\mathbf{K}^n$ . Cette méthode est plus communément appelée *l'implicite du pauvre*. Elle a l'avantage de supprimer le caractère implicite du système d'équations algébriques, qui se résout alors très facilement. Par contre, le schéma d'intégration étant modifié, nous perdons son caractère inconditionnellement stable, même avec des valeurs de  $\theta$  supérieures à 0.5. De même, ne disposant pas de  $H^{n+1}$  ni de  $A^{n+1}$ , on considère uniquement les matrices  $\mathbf{M}^n$  et  $\mathbf{F}^n$ . On retrouve donc presque un schéma d'Euler explicite, à la différence que le terme  $\mathbf{K}^n U^{n+1}$  stabilise le schéma et permet ainsi d'opérer avec des pas de temps d'autant plus raisonnables que  $\theta$  est grand. Nous avons opté pour une valeur de  $\theta = 1$ , ce qui nous permet d'utiliser des pas de temps de l'ordre de quelques heures sans apporter trop d'imprécisions dans la solution.

Notre système algébrique pour les équations de la conservation de la quantité de mouvement devient donc :

$$\mathbf{M}^n \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \mathbf{K}^n U^{n+1} = \mathbf{F}^n \quad (3.22)$$

Insistons sur le fait que le choix du pas de temps doit tenir compte des termes qui n'influent pas sur la stabilité du schéma d'intégration. Chaque terme possède en effet un temps caractéristique, qui correspond à celui du processus qu'il modélise. Il est dès lors essentiel de considérer un pas de temps qui soit au moins un ordre de grandeur inférieur à celui des phénomènes observés. Les forçages externes ainsi que les valeurs tabulées de la thermodynamique sont généralement hebdomadaires, il convient donc de ne pas choisir un pas de temps supérieur à un jour. Cette condition est liée à la condition de stabilité de Courant-Friedrich-Lewy (CFL).

Elle s'applique à notre schéma d'advection et impose que  $\frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1$ . Autrement dit, un point matériel ne peut pas sauter une maille complète en un pas de temps. Cependant,

notre schéma d'advection n'est pas instable si celle-ci n'est pas respectée : il empêche un point matériel de se déplacer de plus d'un élément en un pas de temps car il est basé sur des bilans de masse entre éléments adjacents. Au-dessus du pas de temps critique, le problème ne sera plus physique mais algébrique. Ainsi, si l'on considère notre problème unidimensionnel, le front se déplacera d'une maille en un pas de temps.

Notre stratégie de résolution se résume finalement en une résolution découplée d'un problème couplé en vitesse, épaisseur et concentration. Elle est relativement simple. Au pas de temps  $n$ , on dispose de  $U^n$ ,  $H^n$  et  $A^n$ , on calcule alors  $U^{n+1}$  grâce au système (3.22). Connaissant  $U^{n+1}$ , on calcule ensuite  $H^{n+1}$  et  $A^{n+1}$  grâce au schéma d'advection. On obtient ainsi la solution au pas de temps  $n + 1$ . Cette résolution sera d'autant plus précise que le pas de temps est petit et que la maille est serrée.

Notre schéma d'intégration temporelle n'étant pas purement explicite ni rigoureusement celui de Crank-Nicholson, il devrait donc produire une erreur en  $\mathcal{O}(\Delta t^p)$ , avec  $1 \leq p \leq 2$ . Une résolution avec le schéma de Crank-Nicholson non modifié ou de Runge-Kutta (3-4-6) aurait produit des erreurs de plus haut ordre, mais nous rappelons que le but ici n'est pas la recherche d'un code performant.

Nous avons à présent parcouru toutes les étapes qui mènent à l'écriture du code. Mentionnons encore que nous avons rédigé celui-ci à l'aide du programme Matlab. L'inconvénient de ce langage non compilé et donc lent ne se fait ressentir que pour un grand nombre d'éléments ( $n > 1500$ ). Même si nous aurions pu tirer profit d'un langage plus rapide, Matlab nous a suffi pour les applications que nous avons envisagées. A ce stade-ci du travail, il est temps de confronter notre code à quelques situations connues.

## 3.2 Validation du code

Un code qui tourne ne signifie évidemment pas que la solution fournie soit juste. De nombreuses étapes de validation sont nécessaires pour s'en convaincre. Les convergences en réseau et temporelle sont une première vérification de la cohérence des résultats. Puisque nous ne disposons pas de solutions analytiques, cette cohérence doit être validée sur base de résultats issus de la littérature, afin de vérifier que le code que nous avons implémenté résout effectivement les équations du modèles d'Hibler.

### 3.2.1 Convergence

Une solution physiquement correcte doit tout d'abord produire des résultats tendant vers la solution exacte lorsque l'on raffine progressivement le maillage (voir Fig. 3.2). Il convient alors de calculer l'erreur des solutions en ne faisant varier que la taille des éléments ( $h, h/2, h/4, \dots$ ), les autres paramètres restant bien sûr constants. L'étude de convergence

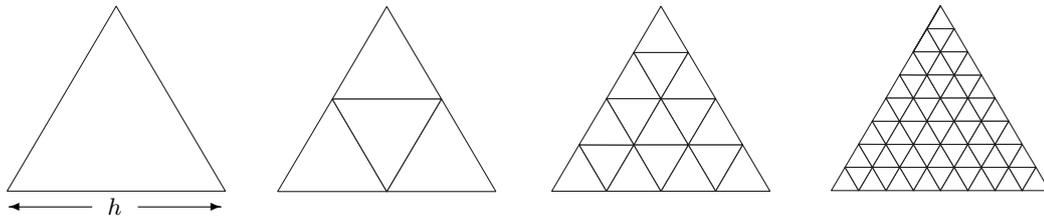


FIG. 3.2 – Raffinage typique d'un élément pour l'étude de la convergence en réseau.

temporelle consiste elle à analyser la progression de l'erreur pour un maillage fixé en diminuant le pas de temps ( $\Delta t$ ,  $\Delta t/2$ ,  $\Delta t/4, \dots$ ).

Ne disposant pas de solution analytique, nous calculons l'erreur par rapport à une solution de référence obtenue avec le maillage le plus fin et un pas de temps plus petit. L'erreur globale se calculera selon la norme  $L^2$  sur base de l'épaisseur de glace  $h$  :

$$e = \sqrt{\sum_k \int_{\Omega_k} (h^h - h_{ref}^h)^2 d\Omega}$$

Vérifions maintenant que le schéma de résolution que nous avons implémenté produit effectivement une erreur  $\mathcal{O}(\Delta t^p, h)$ . La figure 3.3 présente les résultats de cette étude de convergence. Les solutions convergent bien dans les deux cas et avec un ordre d'erreur espéré. Nous avons approximé les deux pentes de convergence et l'on obtient une erreur en  $\mathcal{O}(\Delta t^{1.436}, h^{1.005})$ .

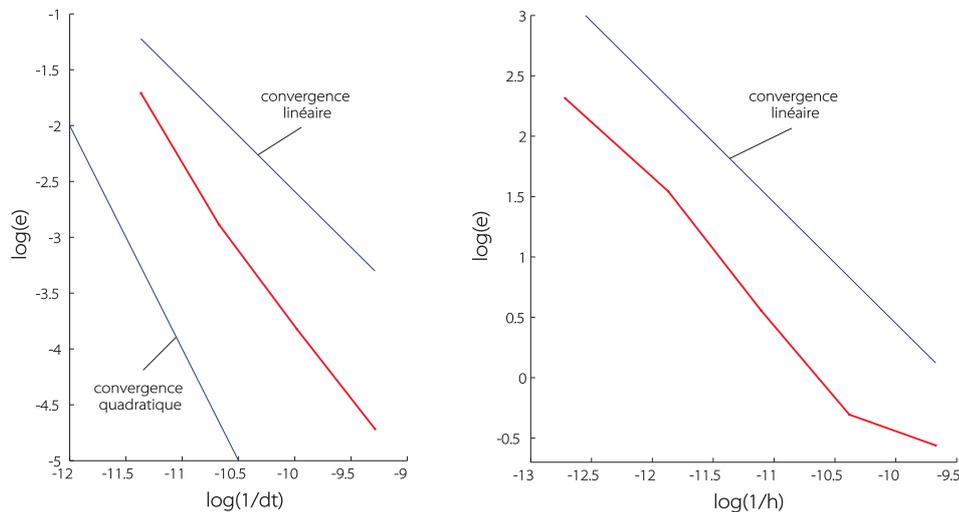


FIG. 3.3 – Convergence temporelle et en réseau pour une simulation 1D.

Nous avons voulu réaliser la même expérience pour un problème bidimensionnel. Cependant, étant donné la taille des maillages à utiliser et les petits pas de temps qu'ils imposent, il semble que les contributions pour propager la solution dans le temps sont alors du même

ordre de grandeur que les erreurs d'arrondis générées par Matlab. La convergence temporelle n'est pas assurée une fois que le pas de temps devient inférieur à 15 minutes. Les pas de temps utilisés dans les simulations habituelles sont largement supérieurs à cette valeur, ce qui ne remet donc pas en cause la pertinence de nos résultats.

### 3.2.2 Cas test de Wang et Ikeda

Le but de ce travail était au départ de reproduire les résultats de la simulation publiée par Wang et Ikeda (2004). Pour celle-ci, ils ont considéré :

- **domaine d'écoulement** : bassin hexagonal partiellement ouvert de 450 km de côté, avec 216 éléments triangulaires équilatéraux de 75 km de côté (voir Fig. 3.4)

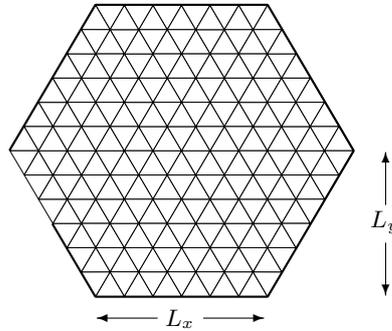


FIG. 3.4 – Maillage hexagonal de côté  $L_x$  et de demi hauteur  $L_y$  pour la simulation de Wang et Ikeda. Il comporte une entrée de longueur  $L_x/2$ .

- **forçage océanique** : courant géostrophique constant dans le temps, donné par :

$$\begin{cases} U_g = 0.14(2y - L_y)/2L_y \\ V_g = -0.14(2x - L_x)/2L_x \end{cases} \quad \begin{cases} -L_y \leq x \leq L_y = 390 \text{ km} \\ -L_x \leq y \leq L_x = 450 \text{ km} \end{cases}$$

- **forçage atmosphérique** : tension de vent d'une période de 8 jours, donnée par :

$$\begin{aligned} \tau_{a,x} &= \left[ 0.05 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 0.15 \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \\ \tau_{a,y} &= \left[ 0.05 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 0.15 \right] \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \end{aligned}$$

- **thermodynamique** : constante dans le temps et fixée au début du mois de janvier (Thorndike et al. 1975)

- **condition initiale :**

$$H_k = 3 \text{ m}$$

$$A_k = 1$$

$$U_j = 0$$

- **période d'intégration :** 90 jours

Les tensions au temps  $t = 0$  sont représentées à la figure 3.5. Nous avons dû multiplier par un facteur 3 leur forçage océanique afin d'obtenir les mêmes forces externes au temps  $t = 0$  que celles représentées dans leur article, ne disposant pas de la valeur des paramètres qu'ils ont utilisés. Nous pensons que ce facteur est dû aux valeurs des paramètres  $C_w$  et  $C_a$ , qui sont probablement différentes de celles proposées par Hibler.

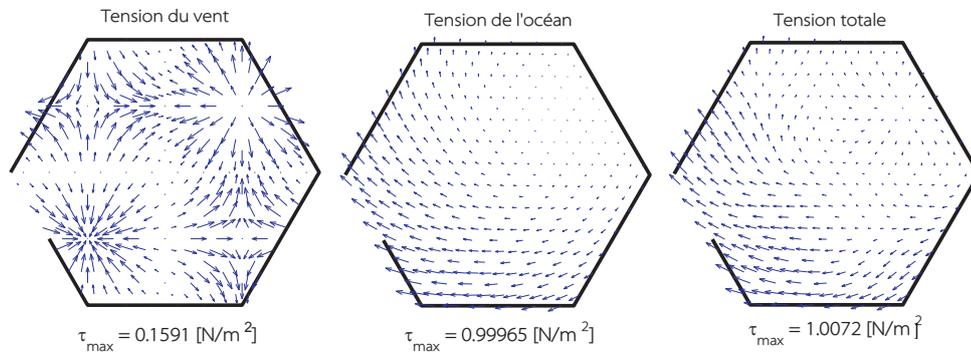


FIG. 3.5 – Forçages au temps  $t = 0$  : tension du vent, de l'océan et tension totale.

Nous comparons nos résultats à ceux qu'ils ont obtenus aux figures 3.6 et 3.7. On peut voir le bon accord entre les distributions d'épaisseur et de concentration. Les différences qui existent entre les flux sortants proviennent du fait que nos vitesses sont globalement plus faibles. De nouveau, ceci s'explique par l'incertitude sur la valeur des paramètres utilisés. Etant donné le caractère hautement non linéaire du modèle, une petite variation d'un de ces paramètres suffit pour engendrer de grandes modifications dans les résultats.

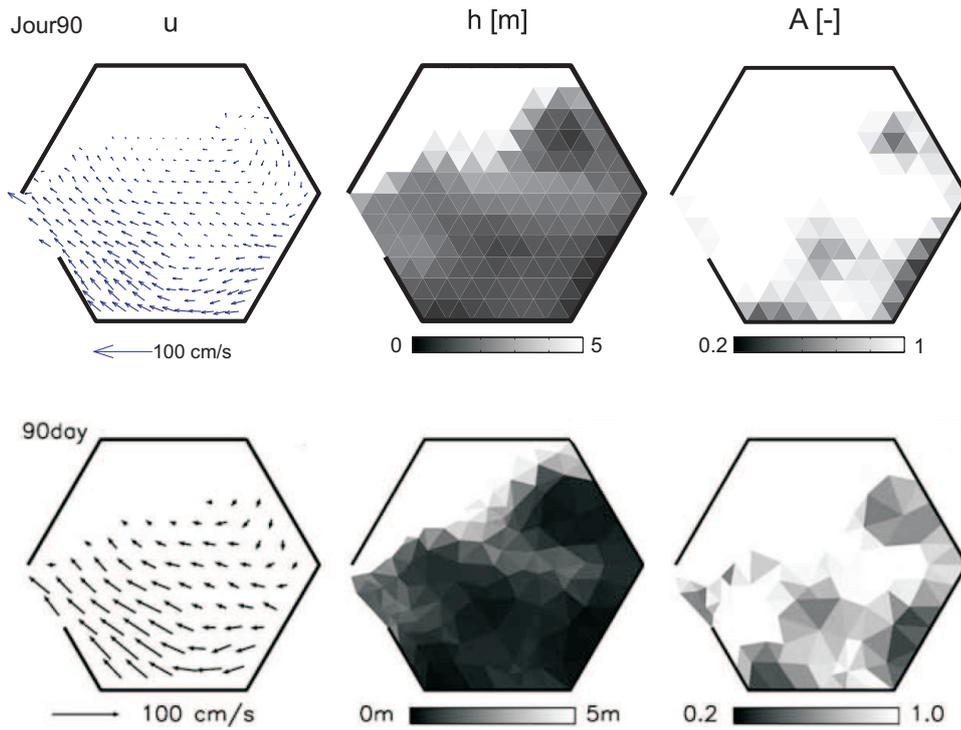


FIG. 3.6 – Comparaison de nos résultats (première ligne) avec ceux de Wang et Ikeda (seconde ligne) : vitesse, épaisseur et concentration. La couleur blanche représente de la glace pour laquelle  $h = 5$  m ou plus.

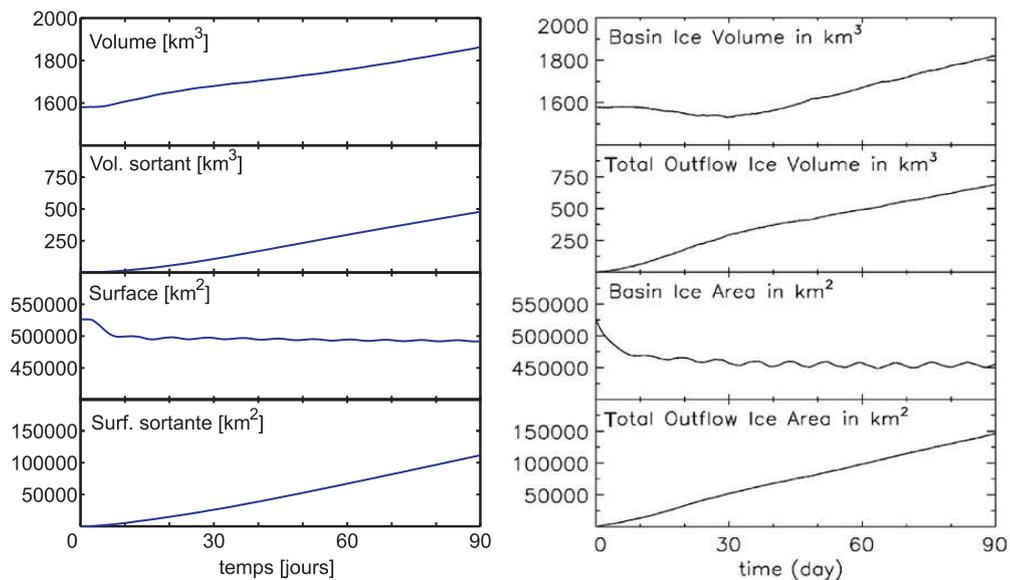


FIG. 3.7 – Comparaison de nos résultats (à gauche) avec ceux de Wang et Ikeda (à droite) : volume de glace dans le bassin, volume total sortant, surface de glace dans le bassin et surface totale sortante.

### 3.3 Problèmes numériques

La résolution numérique d'un tel modèle ne se fait pas sans obstacles. Le front de glace nous a d'ailleurs posé un certain nombre de problèmes sur le plan numérique, que nous allons maintenant analyser en détail.

#### 3.3.1 Annulation de l'épaisseur

Le front est la limite entre glace et océan. Puisque nous traitons un modèle de glace de mer, il convient de se demander ce qu'il faut faire dans le cas où l'épaisseur s'annule, ce qui est typiquement le cas en été. Si l'épaisseur s'annule sur un élément, il n'y a plus de raison physique d'y résoudre les équations de conservation de la quantité de mouvement. Celles-ci deviennent dans ce cas

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_a + \tau_w \\ &= \tau + C_d \mathbf{u} \end{aligned}$$

Si l'on décide de ne rien faire, la dérive calculée sera la dérive maximale en fonction des forçages, car s'il n'y a plus d'épaisseur, il n'y a plus de viscosité et donc plus de résistance à l'écoulement. Le problème qui se pose maintenant est de savoir si cette solution en eau libre ne va pas altérer la solution dans la zone de glace. De même, il ne faut pas négliger la condition de collement à la paroi qui pourrait influencer la solution au front par l'intermédiaire de la solution en eau libre.

Une première solution consiste à multiplier les forçages par la concentration en glace. Cette mise à l'échelle a été présentée par Connolley et al. (2004) et paraît logique dans une certaine mesure puisque une fraction  $1-A$  des forçages est alors cédée à l'océan, ce qui se fait dans les OGCM. Cette méthode implique une diminution progressive des vitesses dans les zones à divergence. Dans le cas d'un front de glace qui se déplace, on retrouverait derrière lui une langue de glace dont l'épaisseur moyenne diminuerait de plus en plus lentement, ce qui résout le problème des vitesses maximales observées plus haut. Comme la concentration en glace subit le même traitement que celui de l'épaisseur moyenne, l'épaisseur réelle de la traînée resterait constante. On peut y trouver une interprétation physique : le front se morcelle et laisse derrière lui des blocs de même épaisseur et de plus en plus espacés. Lorsque la concentration tombe à zéro, par exemple en été à cause de la fonte, les forçages s'annulent et l'on obtient une vitesse effectivement nulle.

La meilleure solution à nos yeux est de ne calculer les vitesses sur un élément que si l'épaisseur y est non nulle. On restreint ainsi le domaine d'écoulement de la glace, ce qui demande des conditions aux frontières supplémentaires. Une condition de tension nulle doit donc être appliquée au front de glace. Ceci se fait implicitement par annulation de l'intégrale de bord dans l'équation (3.6). Il suffit donc d'assembler dans les différentes

matrices du système uniquement les contributions des éléments dont l'épaisseur est non nulle.

Nous avons comparé ces trois possibilités lors d'une simulation pour notre cas unidimensionnel, mais où nous imposons une vitesse nulle sur le bord ouest, pour voir l'influence éventuelle de la condition aux frontières (voir Fig. 3.8). On remarque directement que la deuxième possibilité fournit une solution fort différente des deux autres. Comme nous nous y attendions, une traînée de glace persiste derrière le front. Par contre, on peut voir le parfait accord entre les deux autres solutions. L'influence de la condition de paroi ne se fait donc pas ressentir au front. En effet, la viscosité s'annulant partout entre la paroi et le front, il n'y a pas de couche limite, et donc pas d'influence spatiale.

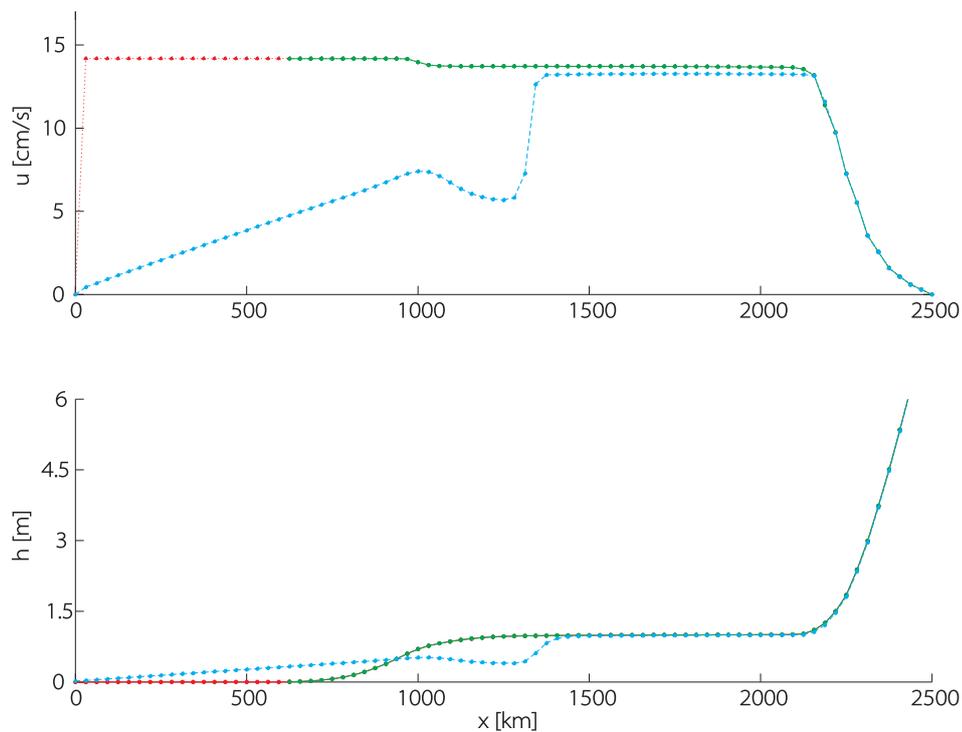


FIG. 3.8 – Comparaison des trois solutions en cas d'épaisseur nulle pour la simulation 1D (forçage constant et traînée linéaire); forçages multipliés par  $A$  (trait interrompu bleu); ne rien faire (trait pointillé rouge); résolution réduite au domaine non nul (pointillés verts).

### 3.3.2 Diffusion numérique

La zone du front est fortement soumise à la diffusion numérique. Ceci dépend essentiellement de notre schéma d'advection. Il existe différentes manières de résoudre numériquement une équation de transport. Si nous voulons la résoudre en différences finies, nous devons choisir :

- l'ordre d'approximation des dérivées spatiales

- la manière de les calculer, c'est-à-dire centrée ou décentrée.

De ces choix dépendent le degré de précision de la solution ainsi que la présence ou non de diffusion numérique (Winckelmans 2004). Dans notre schéma d'advection, nous calculons les flux sur un élément uniquement avec les contributions des éléments qui lui sont directement adjacents. Ceci correspond donc à des différences décentrées du premier ordre. Considérons d'abord une équation de transport pur (vitesse  $c > 0$ ) :

$$\frac{d}{dt}H_i = -c \left( \frac{dH}{dx} \right)_i$$

Si nous choisissons une dérivée spatiale centrée du second ordre, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}H_i = -c \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x}$$

Si nous choisissons maintenant une dérivée décentrée à gauche (car  $c > 0$ ) du premier ordre, on a alors :

$$\frac{d}{dt}H_i = -c \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dt}H_i = -c \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x} + c \frac{H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{d}{dt}H_i = -c \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{c\Delta x}{2} \frac{H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}}{\Delta x^2}$$

On voit apparaître un terme qui multiplie une approximation du second ordre d'une dérivée seconde, c'est-à-dire un terme de diffusion. Cette diffusion, appelée diffusion *numérique* puisqu'elle n'a aucun sens physique, est caractéristique des schémas amont (*upwind*). Notre schéma d'advection fonctionnant de cette façon, nous n'échappons pas à cette diffu-

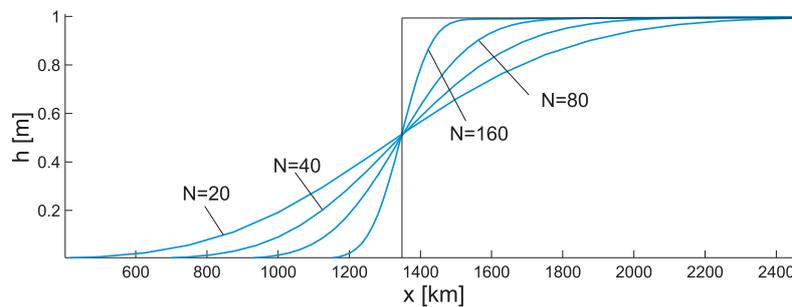


FIG. 3.9 – Diffusion numérique au front pour différents maillages.  $N$  est le nombre d'éléments du maillage.

sion numérique. La figure 3.9 montre ce phénomène dans la zone du front pour notre cas unidimensionnel. Puisque  $\epsilon_{num} = \frac{c\Delta x}{2}$ , la zone de diffusion augmente linéairement avec la taille d'un élément, comme on peut l'observer.

Une solution pour réduire cette diffusion numérique est naturellement de réduire la taille des éléments, mais ceci se fait avec une augmentation du temps de calcul. Une autre possibilité est de recourir à des schémas d'advection moins diffusifs, généralement beaucoup plus complexes (en utilisant par exemple des approximations linéaires discontinues pour l'épaisseur et la concentration). Celui que nous avons utilisé a néanmoins le mérite d'être facile à implémenter.

### 3.3.3 La vitesse au front

La meilleure solution pour résoudre le problème de l'épaisseur nulle n'est cependant pas optimale. En effet, on observe des vitesses au front importantes, qui témoignent des difficultés à résoudre numériquement un champ discontinu. La figure 3.10 présente le profil de vitesse et d'épaisseur au front.

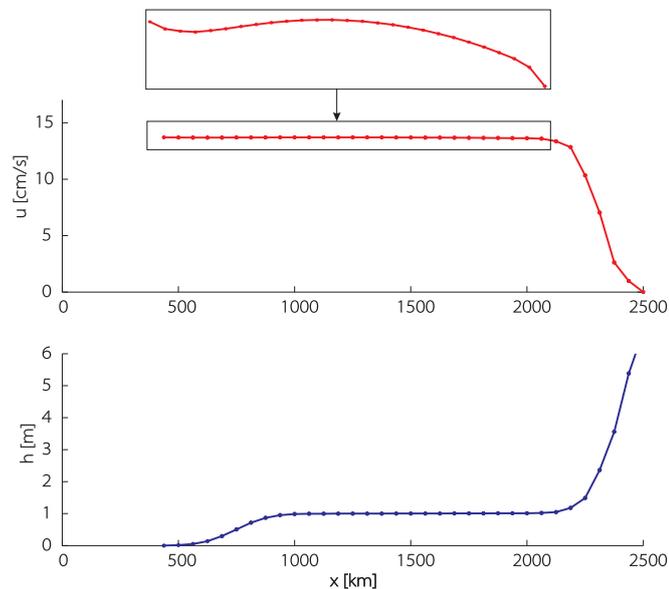


FIG. 3.10 – Épaisseur et détail de la vitesse au front. Le profil de vitesse présente un minimum inattendu.

Contrairement à toute attente, la vitesse du point matériel au bord du front diffusé est la vitesse maximale de l'écoulement. Ceci s'explique par le fait que l'épaisseur de glace  $y$  est minimale (mais non nulle) et, en conséquence, l'inertie de la glace ainsi que sa résistance (et donc ses viscosités) sont très faibles. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement est alors dominée par la tension du vent et la traînée de l'océan. On tend ainsi vers la valeur maximale discutée plus haut. A priori, on pourrait s'attendre à un profil de vitesse plus ou moins linéaire entre le front et le début de l'accumulation. Or, le gradient de pression, qui est directement l'image de la dérivée du profil de l'épaisseur, provoque une diminution de la vitesse dans la zone du front victime de la diffusion numérique. Ce phénomène, entièrement numérique, est inévitable et intrinsèque à notre schéma

d'advection.

L'augmentation progressive de la vitesse du point matériel se situant sur le front est particulièrement marquée lorsqu'on approche de la solution établie de notre problème unidimensionnel. En effet, cette vitesse est alors l'intermédiaire entre une solution de vitesse maximale et une vitesse nulle (voir Fig. 3.11).

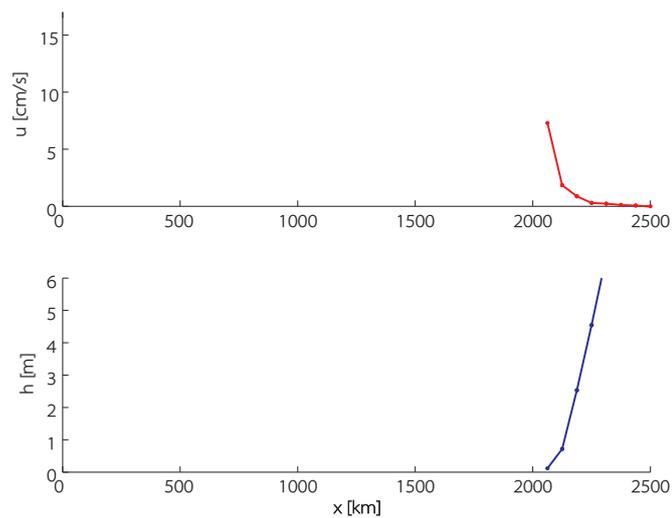


FIG. 3.11 – Epaisseur et vitesse près de la solution établie.

Maintenant que nous connaissons les capacités de résolution de notre code, nous sommes en mesure de simuler le comportement de la glace de mer pour une géométrie et des forçages quelconques (du moins dans les ordres de grandeurs observés). Nous allons donc en profiter pour faire une brève étude de sensibilité du modèle d'Hibler appliqué au Bassin Arctique.

### 3.4 Etude de sensibilité

Il nous a d'abord paru intéressant de confronter notre code à la réalité en tentant de simuler les grandes dérives et distributions d'épaisseur observées dans le Bassin Arctique. Un exemple de maillage utilisé est présenté à la figure 3.12.

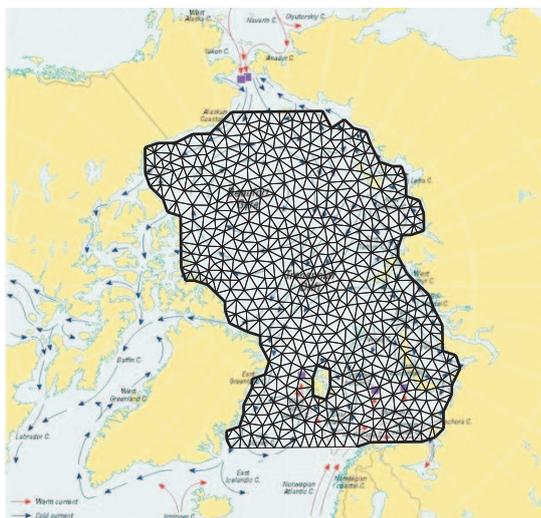


FIG. 3.12 – Maillage le plus fin du Bassin Arctique. Crédit : S. Legrand et V. Dulière.

Nous considérons ici des forçages analytiques inspirés des grands courants et vents observés. Ceux-ci nous permettent d'obtenir des résultats relativement proches de la réalité. La figure 3.13 montre les résultats d'une simulation au bout de 146 jours. On y distingue la

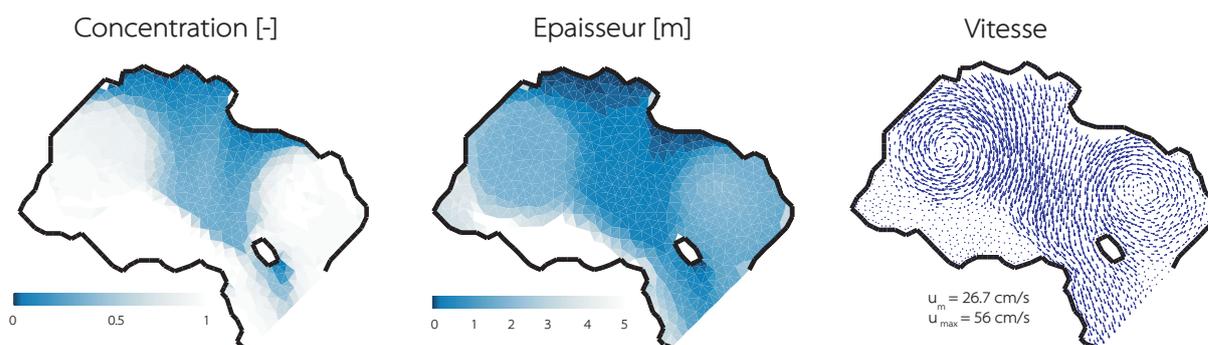


FIG. 3.13 – Résultats d'une simulation sur le Bassin Arctique : concentration, épaisseur et vitesse de la glace à la fin du mois de mai.

gyre de Beaufort et la dérive transpolaire qui se prolonge par le courant est groenlandais. On remarque également une gyre dans le bassin au nord de la Scandinavie, ainsi que les prémices de l'été au bord de la Russie. Les vitesses de glace sont néanmoins nettement supérieures à celles observées. Ceci pourrait être réglé par une diminution des forçages,

mais le but est ici de représenter les grands mouvements de la banquise. Au nord et sur la côte est du Groenland, on observe une accumulation de glace, conformément à la réalité.

Nous avons ensuite voulu tester l'impact de la concentration en glace sur le volume du bassin. Lorsque l'on tient compte de la présence de polynies, chenaux et autres zones libres de glace, deux effets antagonistes influent sur les variations saisonnières de ce volume.

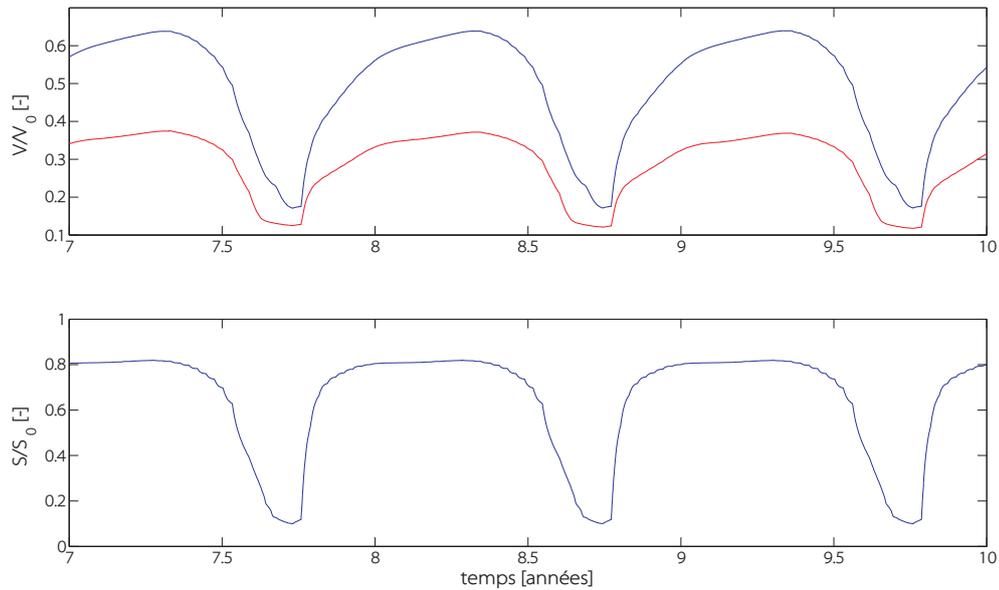


FIG. 3.14 – Volume et surface totaux de glace dans le bassin de l'année 7 à 10. La courbe bleue correspond au cas normal et la rouge au cas  $A = 1$ .

En été, ces zones libres de glace absorbent une partie importante du rayonnement solaire, intensifiant la fonte de la glace. En hiver, par contre, ces zones se comportent comme des *usines à glace*, de par les pertes de chaleur importantes dont elles sont le siège. En imposant  $A = 1$ , on néglige leur influence. On voit à la figure 3.14 que l'amplitude des variations saisonnières est plus marquée dans le cas où  $A$  varie, et que le volume moyen de glace est plus important. Ceci témoigne d'une plus grande influence de l'effet d'hiver, et donc du terme  $S_{A1}$  dans l'équation (2.17).

Nous nous proposons dans la simulation suivante de mettre en évidence le caractère non linéaire des viscosités. Nous avons ainsi considéré le cas de viscosités constantes ( $\zeta = 10^{10}$  kg/s) et obtenons les résultats à la figure 3.15. On constate tout de suite que les vitesses moyennes sont beaucoup plus faibles dans le cas constant. Ceci est dû à la suppression du comportement non linéaire de la rhéologie, qui ne permet plus au viscosités de s'adapter près des côtes (rappelons qu'elles valent normalement  $\sim 10^8$  kg/s). Des viscosités élevées dans ces régions augmentent considérablement l'épaisseur des couches limites visqueuses, qui freinent ainsi l'écoulement loin des côtes. Ceci a pour effet majeur d'effacer presque totalement les deux gyres observées normalement.

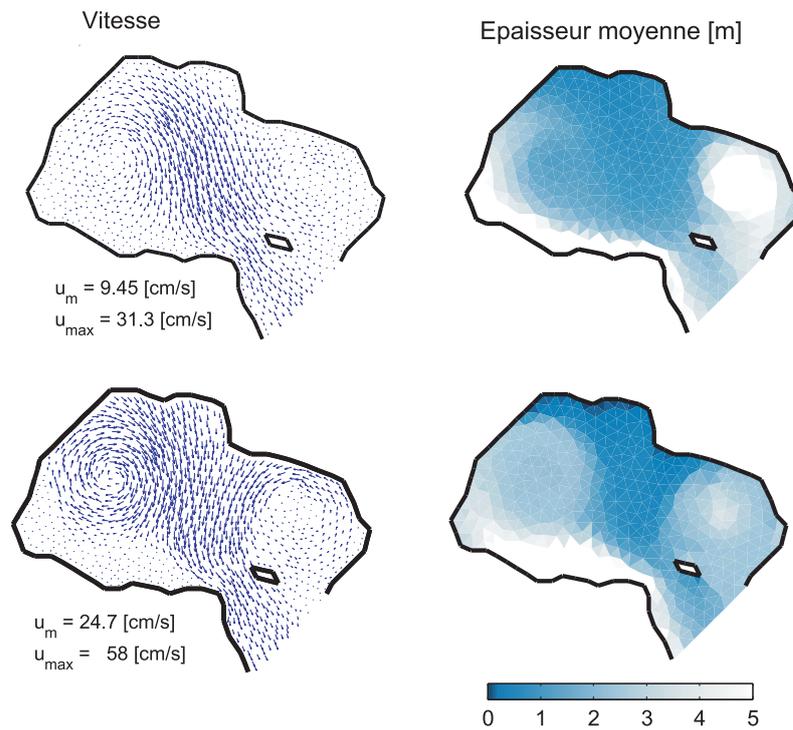


FIG. 3.15 – Influence de la non linéarité des viscosités. Viscosité constante de  $10^{10}$  kg/s (première ligne) ; modèle complet (seconde ligne). Les résultats sont montrés au jour 144.

Nous aurions pu pousser cette étude de sensibilité plus loin en analysant l'influence des autres paramètres du modèle. Cependant, vu le manque de données précises sur les forçages, nous n'en aurions peut-être pas tiré de conclusions satisfaisantes.

# Conclusion

L'objet de ce mémoire était de réaliser une étude de faisabilité de l'utilisation de méthodes d'éléments finis pour la modélisation de la glace de mer. Le modèle de glace utilisé est celui d'Hibler (1979), véritable référence en la matière. Celui-ci intègre un couplage entre processus thermodynamiques et dynamiques.

Nous nous sommes d'abord penchés sur la physique de la banquise, notamment sa formation ainsi que les processus qui régissent l'ablation et l'accrétion de la glace marine. Le modèle à "zéro couche" de Semtner offre à ce propos une alternative aux valeurs tabulées des taux de croissance de la glace de mer.

Ensuite, nous avons étudié le modèle proposé par Hibler et plus particulièrement la rhéologie visco-plastique au travers d'un cas simple. Celle-ci s'avère être hautement non linéaire, complexifiant la résolution du système d'équations du modèle.

Sa résolution numérique comprend une formulation de type eulérienne intégrant des interpolations  $P_1^{NC}$  pour les vitesses et  $P_0$  pour l'épaisseur et la concentration. La stricte conservation de la masse était un impératif et a été respectée dans notre schéma d'advection de type volumes finis. Nous avons dû faire face à divers problèmes numériques, essentiellement liés à la discontinuité du front de glace.

Nos résultats, qui ont été confrontés à ceux de Wang et Ikeda (2004), ainsi que l'étude de sensibilité que nous avons réalisée pour le Bassin Arctique, sont très prometteurs. Malgré la simplicité des forçages et des données que nous utilisons, nous sommes arrivés à reproduire globalement les grandes dérives qui caractérisent la banquise boréale. Ces résultats semblent attester que l'utilisation de méthodes d'éléments finis pour la modélisation de la banquise est appropriée.

Sur le plan de la modélisation comme sur le plan numérique, de nombreuses améliorations sont envisageables. Ainsi, l'intégration d'une interpolation linéaire pour l'épaisseur et la concentration permettrait d'affiner les résultats. Le schéma d'advection associé serait vraisemblablement plus complexe, mais il permettrait d'amoinrir la diffusion numérique. Le schéma d'intégration temporelle bénéficierait certainement d'un développement plus poussé. Enfin et surtout, il est impératif d'adapter le code dans un langage compilé (du type C/C++ par exemple), ce qui permettrait de réduire considérablement le temps de

calcul, et ainsi de réaliser des simulations sur des maillages plus fins (raffinement aux côtes, adaptativité,...). Nous avons pensé nous investir dans ce travail de programmation, mais en avons abandonné l'idée, préférant nous consacrer davantage à la compréhension du modèle qu'à un débogage long et pas franchement nécessaire pour les applications visées.

Depuis son apparition, le modèle visco-plastique d'Hibler a été amélioré à différents niveaux (distribution d'épaisseur de glace, paramétrisation des crêtes de compression,...). D'autre part, il existe à l'heure actuelle deux nouvelles catégories de modélisation de la glace de mer. D'un côté, pour des raisons principalement numériques, Hunke et Dukowicz (1997) ont ajouté une composante élastique dans l'équation de constitution du modèle d'Hibler. D'un autre côté, Tremblay et Mysak (1997) assimilent la glace à un matériau granulaire, ce qui permet d'intégrer de façon naturelle la formation de fractures au sein de la banquise. En ce qui concerne la thermodynamique, les nouveaux modèles comportent plusieurs niveaux (différents types de glace, neige,...) et incluent les effets de la salinité sur les propriétés de la glace.

Comme nous pouvons le constater, les perspectives d'améliorations sont nombreuses et feront l'objet d'investigations dans le cadre du projet SLIM.

# Bibliographie

- Connolley, W. M., Gregory, J. M., Hunke, E. & McLaren, A. J. (2004), ‘On the consistent scaling of terms in the sea-ice dynamics equation’, *Journal of Physical Oceanography* pp. 1776–1780.
- Cox, G. F. N. & Weeks, W. F. (1974), ‘Salinity variations in sea ice’, *Journal of Glaciology* **13**, 109–120.
- Doronin, Y. P. (1970), ‘On a method of calculating the compactness and drift of ice floes’, *AIDJEX Bull.* **3**, 22–39.
- Fichefet, T. (2004), ‘Eléments d’océanographie physique’, *notes de cours PHYS2391 (Université Catholique de Louvain)* .
- Fichefet, T. (2005), ‘Introduction à la modélisation du climat’, *notes de cours PHYS2392 (Université Catholique de Louvain)* .
- Fichefet, T., Goosse, H. & Morales Maqueda, M. A. (1998), ‘On the large-scale modeling of sea ice and sea ice-ocean interactions’, *Ocean Modelling and Parametrization* pp. 399–422.
- Hibler, W. (1977), ‘A viscous sea ice law as stochastic average of plasticity’, *Journal of Geophysical Research* **82**(27), 3932–3938.
- Hibler, W. D. (1974), ‘Differential sea ice drift II : comparison of meso-scale strain measurements to linear drift theory predictions’, *Journal of Glaciology* **13**, 457–471.
- Hibler, W. D. (1979), ‘A dynamic thermodynamic sea ice model’, *Journal of Physical Oceanography* pp. 815–846.
- Hibler, W. D. (2003), *Mass Balance of the Cryosphere : Observations and Modelling of Contemporary and Future Changes*, Cambridge University Press.
- Hibler, W. D. & Ackley, S. F. (1983), ‘Numerical simulation of the Weddell Sea pack ice’, *Journal of Geophysical Research* **88**, 2873–2887.
- Hibler, W. D. & Hutchings, J. (2003), *Multiple equilibrium arctic ice cover states induced by ice mechanics*, 16th IAHR Conference on Sea Ice Processes, Dunedin, New Zealand.
- Hunke, E. C. (2001), ‘Viscous-plastic sea ice dynamics with the evp model : linearization issues’, *Journal of Computational Physics* pp. 18–38.

- Hunke, E. C. & Dukowicz, J. K. (1997), 'On elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics', *Journal of Physical Oceanography* **27**, 1849.
- Kulakov, I. Y., Maslovsky, M. I. & Timokhov, L. A. (1979), 'Seasonal variability of Antarctic Sea Ice Extent : Its numerical modeling', *Proc. ICSI/AIDJEX Symp. on Sea Ice Processes and Models* .
- Legat, V. (2004), 'Introduction aux éléments finis', *notes de cours MECA2120 (Université Catholique de Louvain)* .
- Legat, V. (2005), 'Méthodes numériques', *notes de cours FSAB1701 (Université Catholique de Louvain)* .
- Martin, S. (1979), 'A field study of brine drainage and oil entrainment in first-year sea ice', *Journal of Glaciology* **22**, 473–502.
- Maykut, G. A. (1985), *An introduction to ice in the polar oceans*, APL-UW 8510, Applied Physics Laboratory, University of Washington, Seattle, WA.
- Maykut, G. A. (1986), 'The surface heat and mass balance', *The Geophysics of Sea Ice* **146**, 395–463.
- Maykut, G. A. & Untersteiner, N. (1971), 'Some results from time-dependent thermodynamic model of sea ice', *Journal of Geophysical Research* **76**, 1550–1575.
- Morales Maqueda, M. A. & Holland, D. (1997), 'Physics and climatology of sea ice', *poly-copiés (New York University)* .
- Sanderson, T. (1988), *Ice mechanics - risks to offshore structures*, Graham et Trotman, London.
- Semtner, A. J. (1976), 'A model of the thermodynamic growth of sea ice in numerical investigations of climate', *Journal of Physical Oceanography* **6**, 379–389.
- Thorndike, A. S., Rothrock, D. A., Maykut, G. A. & Colony, R. (1975), 'The thickness distribution of sea ice', *Journal of Geophysical Research* **80**, 4501–4513.
- Tremblay, L. B. & Mysak, L. A. (1997), 'Modeling sea ice as a granular material, including the dilatancy effect', *Journal of Physical Oceanography* **27**(11), 2342–2360.
- Vancoppenolle, M. (2003), *Dynamique et Rhéologie de la Banquise*.
- Wang, L. R. & Ikeda, M. (2004), 'A lagrangian description of sea ice dynamics using the finite element method', *Ocean Modelling* **7**, 21–38.
- Winckelmans, G. S. (2004), 'Méthodes numériques en mécanique des fluides', *notes de cours MECA2660 (Université Catholique de Louvain)* .
- WMO (1970), 'WMO sea-ice nomenclature, terminology, codes and illustrated glossary', *WMO/OMM/BMO* (No. 259).

## Annexe A

# La couche de mélange océanique

La couche de mélange (ou couche mélangée) correspond à la partie superficielle de l'océan dans laquelle la température et la salinité restent constantes avec la profondeur (donc la densité aussi en négligeant les effets de la pression). Cette homogénéité des propriétés physiques de l'eau de mer est assurée par le brassage superficiel de l'océan qui est principalement dû à trois facteurs : l'action turbulente du vent, les flux d'eau douce et les échanges de chaleur.

Le premier facteur dépend de la vitesse du vent ainsi que de l'intensité des vagues. Le second varie en fonction du bilan évaporation-précipitations : l'une fait croître la salinité de la couche superficielle qui s'alourdit et a tendance à plonger par gravité, tandis que les autres augmentent au contraire la stabilité de la couche puisque de l'eau moins dense se trouve au-dessus de la colonne d'eau. Le troisième facteur est saisonnier : en hiver, le flux de chaleur latente ainsi qu'à moindre échelle le flux de chaleur sensible (dû à la différence de température entre air et eau) refroidissent l'eau de surface dont la densité augmente ; en été, c'est l'inverse : l'eau qui se réchauffe en surface gagne en stabilité et s'isole des couches inférieures plus denses et froides.

Dans les régions intertropicales, ce dernier phénomène est particulièrement important et est à l'origine d'une zone de fort gradient de température (appelée thermocline) située entre la partie inférieure de la couche de mélange et la couche océanique sous-jacente. Aux températures caractéristiques de ces régions, la densité est surtout contrôlée par la température, ce qui fait coïncider la thermocline avec une pycnocline (zone de forte variation de la densité). Dans les régions tempérées et polaires, la couche mélangée surmonte une zone de fort gradient vertical de salinité (halocline). Etant donné que la densité dépend principalement du taux de salinité dans les eaux froides, cette zone correspond à la pycnocline. Dans les zones tempérées enfin, l'épaisseur de la couche mélangée dépend fortement de la saison : elle est maximale en hiver, lorsque le brassage est important et minimale en été.

## Annexe B

# Le courant géostrophique

Lorsque l'on considère la dynamique océanique à grande échelle loin des côtes (Fichefet 2004), une étude adimensionnelle des équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement fait apparaître un nécessaire équilibre entre les forces dues au gradient horizontal de la pression et la force de Coriolis, qui définit le courant géostrophique  $\mathbf{u}_g$  :

$$\rho_0 f \mathbf{u}_g = \mathbf{k} \times \nabla p \quad (23)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique de référence de l'eau de mer,  $f$  le paramètre de Coriolis,  $\mathbf{k}$  un vecteur unitaire normal à la surface et  $p$  la pression. Notons que cette approximation n'est pas valable au voisinage de l'équateur où le paramètre de Coriolis tend vers zéro. Le courant géostrophique est directement proportionnel au gradient de pression et est parallèle aux isobares.

La pression dans une colonne d'eau peut se décomposer entre la pression atmosphérique (supposée constante), la pression exercée par l'élévation de l'océan  $\xi$  et la pression de la colonne d'eau se situant entre la profondeur 0 et  $z$  :

$$p(z) = p_{atm} + \rho_0 g \xi + \int_z^0 g \rho dz'$$

En prenant le gradient de l'équation précédente, il vient :

$$\nabla p = \rho_0 g \nabla \xi + \nabla \left( \int_z^0 g (\rho - \rho_0) dz' \right),$$

que l'on remplace dans l'équation (23) :

$$\mathbf{u}_g = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla \xi + \frac{g}{\rho_0 f} \mathbf{k} \times \nabla \left( \int_z^0 (\rho(z) - \rho_0) dz' \right).$$

Le premier terme du membre de droite est la composante barotrope et le second terme la composante barocline (qui dépend de la distribution spatiale de  $\rho$ ). Pour une masse volumique constante, on retrouve bien l'équation (2.4) qui relie le courant géostrophique à l'élévation de l'océan :

$$\mathbf{u}_g = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla \xi$$

## Annexe C

# La spirale d'Ekman

La spirale d'Ekman est la représentation de la mise en mouvement d'une masse d'eau par le vent. Lorsqu'un vent établi souffle à la surface de l'océan et que la tension qu'il exerce est équilibrée par la force de Coriolis, on peut montrer que le courant de surface qu'il en résulte a une direction de  $45^\circ$  à droite (hémisphère Nord) par rapport à la tension du vent. Ce courant de surface entraîne à son tour la couche d'eau sous-jacente par frottement qui est également déviée. La vitesse diminue rapidement avec la profondeur à cause des pertes d'énergie. Le transport moyen d'Ekman se fait à  $90^\circ$  par rapport à la tension exercée par le vent.

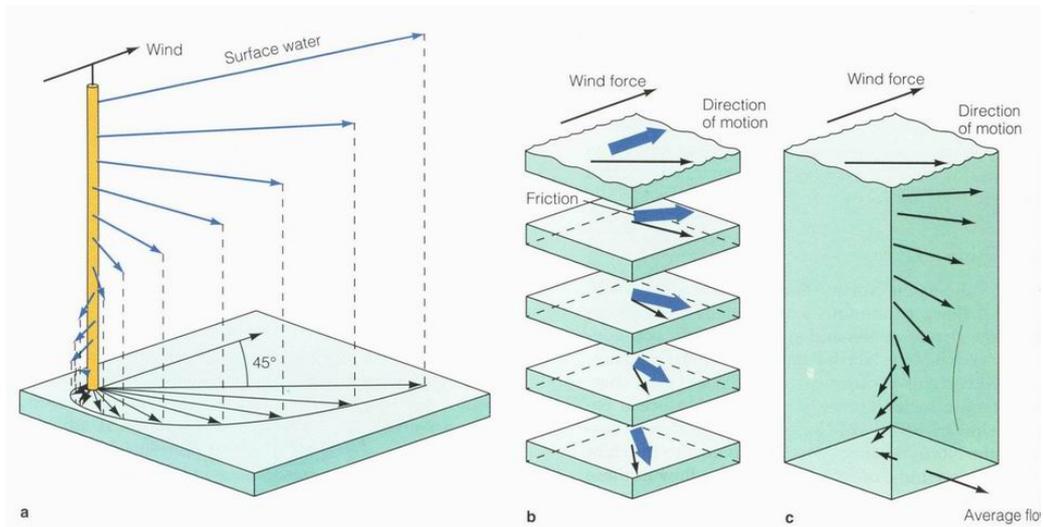


FIG. 16 – Représentation de la spirale et du transport d'Ekman dans l'hémisphère Nord : (a) déviation des vitesses en spirale, la première étant à  $45^\circ$  de la tension du vent ; (b) cisaillement des couches de fluide, qui sont chacune déviées par la force de Coriolis ; (c) transport résultant sur la colonne d'eau.

## Annexe D

# Adimensionnalisation

Afin de bien saisir l'importance des différents termes présents dans les équations de notre modèle de glace, nous allons adimensionnaliser notre problème. Nous en rappelons ici toutes les équations pour la facilité du lecteur.

### EQUATIONS DU MODÈLE

#### 1. Equations de conservation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{u}) + S_h \quad (24)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \cdot (A\mathbf{u}) + S_A \quad (25)$$

$$\rho_i h \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\rho_i h f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w - \rho_i h g \nabla \xi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (26)$$

#### 2. Forces externes

$$\rho_i h g \nabla \xi = -\rho_i h f(\mathbf{k} \times \mathbf{U}_w) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\tau}_a = \rho_a C_a |\mathbf{U}_g| (\mathbf{U}_g \cos \theta_a + \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g \sin \theta_a) \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\tau}_w = \rho_w C_w |\mathbf{U}_w - \mathbf{u}| [(\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \cos \theta_w + \mathbf{k} \times (\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \sin \theta_w] \quad (29)$$

#### 3. Loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\zeta - \eta) \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{I} - \frac{P}{2} \mathbf{I} \quad (30)$$

$$P = p^* h e^{-C(1-A)} \quad (31)$$

$$\eta = \frac{P}{2\gamma e^2} \quad (32)$$

$$\zeta = \frac{P}{2\gamma} \quad (33)$$

$$\gamma = [(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2)(1 + 1/e^2) + 4\dot{\epsilon}_{xy}^2/e^2 + 2\dot{\epsilon}_{xx}\dot{\epsilon}_{yy}(1 - 1/e^2)]^{1/2} \quad (34)$$

Si nous substituons les équations (28) à (34) dans l'équation (26), celle-ci devient :

$$\begin{aligned}
\rho_i h \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\rho_i h f (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) + \rho_a C_a |\mathbf{U}_g| (\mathbf{U}_g \cos \theta_a + \mathbf{k} \times \mathbf{U}_g \sin \theta_a) \\
&+ \rho_w C_w |\mathbf{U}_w - \mathbf{u}| [(\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \cos \theta_w + \mathbf{k} \times (\mathbf{U}_w - \mathbf{u}) \sin \theta_w] \\
&- \rho_i h g \nabla \xi + \frac{p^*}{2} \nabla \cdot \left[ h e^{-C(1-A)} \left( \frac{2\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\gamma e^2} + \frac{(e^2 - 1)}{\gamma e^2} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \mathbf{I} - \mathbf{I} \right) \right]
\end{aligned} \tag{35}$$

Les différents champs et variables sont adimensionnalisés comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= U \mathbf{u}' \\
\mathbf{U}_w &= U \mathbf{U}'_w \\
\mathbf{U}_g &= U_G \mathbf{U}'_g \\
t &= T t' \\
h &= H h' \\
\xi &= B \xi' \\
\nabla &= \frac{\nabla'}{L}
\end{aligned}$$

où  $U$  est une vitesse caractéristique des courants marins,  $U_a$  une vitesse caractéristique du vent,  $T$  un temps caractéristique des phénomènes observés,  $H$  une épaisseur caractéristique,  $B$  une élévation caractéristique et  $L$  une longueur caractéristique de l'écoulement.

L'équation (24) devient, après substitution,

$$\begin{aligned}
\frac{H}{T} \frac{\partial h'}{\partial t'} &= -\frac{HU}{L} \nabla' \cdot (h' \mathbf{u}') + S_h \\
\frac{\partial h'}{\partial t'} &= -\frac{TU}{L} \nabla' \cdot (h' \mathbf{u}') + \frac{T}{H} S_h
\end{aligned} \tag{36}$$

De même pour l'équation (35), en effectuant une mise à l'échelle par rapport au terme de Coriolis :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_i H U}{T} h' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{\rho_i H U^2}{L} h' \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' &= -\rho_i H U f h' (\mathbf{k} \times \mathbf{u}') + T_a \boldsymbol{\tau}'_a + T_w (\boldsymbol{\tau}'_w - \mathbf{K}'_w \mathbf{u}') \\
&- \frac{\rho_i H g B}{L} h' \nabla' \xi' + \frac{p^* H}{L} \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' \right) \\
&+ \frac{p^* H}{2L} \frac{e^2 - 1}{e^2} \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}') \right) - \frac{p^* H}{2L} \nabla' \cdot (h' e^{-C(1-A)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{fT}h'\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U}{fL}h'\mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' &= -h'(\mathbf{k} \times \mathbf{u}') + \frac{T_a}{\rho_i H U f} \tau'_a + \frac{T_w}{\rho_i H U f} (\tau'_w - \mathbf{K}'_w \mathbf{u}') \\
&- \frac{gB}{LUf} h' \nabla' \xi' + \frac{p^*}{\rho_i LUf} \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' \right) \\
&+ \frac{p^*}{2\rho_i LUf} \frac{e^2 - 1}{e^2} \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}') \right) \\
&- \frac{p^*}{2\rho_i LUf} \nabla' \cdot (h' e^{-C(1-A)})
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
T_a &= \rho_a C_a U_G^2 \\
T_w &= \rho_w C_w U^2 \\
\boldsymbol{\tau}'_a &= |\mathbf{U}'_g| \begin{bmatrix} U'_g \cos \theta_a - V'_g \sin \theta_a \\ U'_g \sin \theta_a + V'_g \cos \theta_a \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\tau}'_w &= |\mathbf{U}'_w - \mathbf{u}'| \begin{bmatrix} U'_w \cos \theta_w - V'_w \sin \theta_w \\ U'_w \sin \theta_w + V'_w \cos \theta_w \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}'_w &= |\mathbf{U}'_w - \mathbf{u}'| \begin{bmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En faisant apparaître des nombres adimensionnels, on a finalement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h'}{\partial t'} &= -Ad_h \nabla \cdot (h' \mathbf{u}') + \frac{T}{H} S_h \tag{37} \\
Ad_i h' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + Ro h' \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' &= -h' \mathbf{k} \times \mathbf{u}' + Ad_a \boldsymbol{\tau}'_a + Ad_w (\boldsymbol{\tau}'_w - \mathbf{K}'_w \mathbf{u}') \\
&- Ad_b h' \nabla' \xi' + Ad_\eta \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' \right) \\
&+ Ad_\zeta \nabla' \cdot \left( \frac{h' e^{-C(1-A)}}{\gamma'} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}') \right) - Ad_p \nabla' \cdot (h' e^{-C(1-A)}) \tag{38}
\end{aligned}$$

Notons que le nombre adimensionnel  $Ro$ , qui porte le nom de nombre de Rossby, est fort utilisé en mécanique des fluides géophysiques et mesure le rapport entre les forces d'inertie et la force de Coriolis.

## Ordres de grandeur

Dans notre cas, les différentes grandeurs caractéristiques et paramètres prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 L \cong 10^6 \text{ m} & \rho_i = 920 \text{ kg/m}^3 \\
 U \cong 10^{-2} \text{ m/s} & \rho_a = 1.3 \text{ kg/m}^3 \\
 U_G \cong 10 \text{ m/s} & \rho_w = 1035 \text{ kg/m}^3 \\
 H \cong 1 \text{ m} & f = 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\
 B \cong 10^{-2} \text{ m} & g = 9.81 \text{ m/s}^2 \\
 T \cong 10^5 \text{ s} & p^* = 5000 \text{ N/m}^2 \\
 & C_a = 0.0012 \\
 & C_w = 0.0055
 \end{array}$$

L'ordre de grandeur des différents nombres adimensionnels intervenant dans l'équation en vitesse peut alors être déduit :

$$\begin{array}{llll}
 Ad_t & = & \frac{1}{fT} & = 6.8 \cdot 10^{-2} \cong 10^{-1} \\
 Ro & = & \frac{U}{fL} & = 6.8 \cdot 10^{-5} \cong 10^{-4} \\
 Ad_a & = & \frac{\rho_a C_a U_G^2}{\rho_i H U f} & = 1.2 \cdot 10^2 \cong 10^2 \\
 Ad_w & = & \frac{\rho_w C_w U^2}{\rho_i H U f} & = 4.2 \cdot 10^{-1} \cong 10^{-1} \\
 Ad_b & = & \frac{gB}{LUf} & = 6.7 \cdot 10^{-2} \cong 10^{-1} \\
 Ad_\eta & = & \frac{p^*}{\rho_i L U f} & = 15 \cong 10 \\
 Ad_\zeta & = & \frac{p^*}{2\rho_i L U f} & = 7.4 \cong 10 \\
 Ad_p & = & \frac{p^*}{2\rho_i L U f} & = 7.4 \cong 10
 \end{array}$$

Ces résultats recourent les analyses dimensionnelles que l'on trouve dans la littérature. Ainsi, selon Morales Maqueda et Holland (1997), le terme le plus important est celui dû à la tension du vent qui peut expliquer jusqu'à 70% de la variance de  $\mathbf{u}$ . Viennent ensuite les forces internes, la tension de l'océan et la force de Coriolis. L'importance des forces internes de la banquise est cependant fortement conditionnée par la concentration en glace (Fig. 2.13). Etant donné que la glace de mer agit comme une barrière qui limite les transferts de quantité de mouvement de l'air vers l'océan, les courants marins de surface sont souvent moins intenses que les mouvements de la glace. Par équilibre géostrophique, la contribution de la pente de l'océan dans l'équation du mouvement sera donc généralement plus faible que la force de Coriolis, même si des observations ont montré que les deux forces sont pratiquement égales sur des périodes d'un mois. Le terme d'accélération inertielle devient non négligeable lorsque les floes sont libres de bouger les uns par rapport aux autres, ce qui est typiquement le cas en été. Le terme d'advection est quant à lui négligeable.

En ce qui concerne l'équation de conservation de  $h$ ,  $Ad_h \cong 10^{-3}$  et  $\frac{T}{H}S_h \cong 10^{-2}$  pour  $S_h \cong 1cm/jour$ . Comme nous nous y attendions, l'épaisseur de la banquise est avant tout contrôlée par les processus thermodynamiques, même si le transport de glace peut sensiblement perturber cette distribution. L'équation en concentration (25), de même forme que l'équation en épaisseur, mène bien sûr à des conclusions identiques.

# Annexe E

## Matrices globales

$$\mathbf{M}_{ij}^n = \rho_i \left[ \begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^n H_k^n \langle \tau_i^u \tau_j^u \rangle_{\Omega_k} & 0 \\ \hline 0 & \sum_{k=1}^n H_k^n \langle \tau_i^u \tau_j^u \rangle_{\Omega_k} \end{array} \right] \quad (39)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^n = \left[ \begin{array}{c|c} \langle A_w^n \tau_i^u \tau_j^u \rangle & - \langle B_w^n \tau_i^u \tau_j^u \rangle \\ \hline \langle B_w^n \tau_i^u \tau_j^u \rangle & \langle A_w^n \tau_i^u \tau_j^u \rangle \end{array} \right]$$

$$+ \left[ \begin{array}{c|c} \langle (\eta^n + \zeta^n) \tau_{j,x}^u \tau_{i,x}^u \rangle + \langle \eta^n \tau_{j,y}^u \tau_{i,y}^u \rangle & \langle (\zeta^n - \eta^n) \tau_{j,y}^u \tau_{i,x}^u \rangle + \langle \eta^n \tau_{j,x}^u \tau_{i,y}^u \rangle \\ \hline \langle (\zeta^n - \eta^n) \tau_{i,x}^u \tau_{j,y}^u \rangle + \langle \eta^n \tau_{i,y}^u \tau_{j,x}^u \rangle & \langle (\eta^n + \zeta^n) \tau_{j,y}^u \tau_{i,y}^u \rangle + \langle \eta^n \tau_{j,x}^u \tau_{i,x}^u \rangle \end{array} \right]$$

$$+ \rho_i f \left[ \begin{array}{c|c} 0 & - \sum_{k=1}^n H_k^n \langle \tau_i^u \tau_j^u \rangle_{\Omega_k} \\ \hline \sum_{k=1}^n H_k^n \langle \tau_i^u \tau_j^u \rangle_{\Omega_k} & 0 \end{array} \right] \quad (40)$$

$$\mathbf{F}_i^n = \left[ \begin{array}{c} \langle \tau_i^u \tau_x \rangle \\ \langle \tau_i^u \tau_y \rangle \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^n \frac{p^*}{2} e^{-C(1-A_k^n)} \langle \tau_{i,x}^u \tau_j^u \tilde{H}_j^n \rangle_{\Omega_k} \\ \sum_{k=1}^n \frac{p^*}{2} e^{-C(1-A_k^n)} \langle \tau_{i,y}^u \tau_j^u \tilde{H}_j^n \rangle_{\Omega_k} \end{array} \right] \quad (41)$$

où

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & -B_a \\ B_a & A_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g \\ V_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_w & -B_w \\ B_w & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_w \\ V_w \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$A_w = \rho_w C'_w \left| \mathbf{U}_w - \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^n \tau_j^u \right| \cos \theta_w \quad (43)$$

$$B_w = \rho_w C'_w \left| \mathbf{U}_w - \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^n \tau_j^u \right| \sin \theta_w \quad (44)$$

$$A_a = \rho_a C'_a |\mathbf{U}_g| \cos \theta_a \quad (45)$$

$$B_a = \rho_a C'_a |\mathbf{U}_g| \sin \theta_a \quad (46)$$

et où  $\tilde{H}_j$  correspond à l'approximation au sens des moindres carrés des  $H_k$  sur les segments des éléments. La règle d'intégration utilisée est la règle à 4 points de Hammer. L'évaluation en 4 points n'est réellement nécessaire que pour les termes non linéaires. Néanmoins, pour plus de facilité, nous utilisons la même règle pour toutes les intégrales.