

Thèse de Doctorat d'état

Thème

Systemes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs

Présentée par

Djillali BOUAGADA

Soutenue le 19 décembre 2007

Devant le Jury

Président :	N.GHOUALI	Université de Tlemcen
Rapporteurs :	P.VAN DOOREN	CESAME-UCL.Belgique
	T.KACZOREK	Université de Varsovie
Co-Rapporteur :	H.M-KHARROUBI	Université d'Oran Es-sénia
Examineurs :	A.SMAIL	Université d'Oran Es-sénia
	B.BENDOUKHA	Université de Mostaganem.

Thèse préparée au Centre d'Ingénierie des Systèmes, d'Automatique et de Mécanique Appliquée-UCL. Louvain-La-Neuve- Belgique.

Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier ceux qui m'ont aidé et soutenu tout au long de la réalisation de cette thèse. Parmi eux, mon Professeur Paul Van DOOREN [Centre d'Ingénierie des Systèmes, d'Automatique et de Mécanique Appliquée-UCL, Belgique] qui m'a surtout au long de mon travail, me guider, m'orienter par son soutien permanent, ses conseils utiles et encouragements qu'il n'a cessés de me prodiguer. Je lui suis profondément reconnaissant pour ne pas seulement participer à enrichir non discussions mais aussi, m'a aidé dans la préparation de cette thèse. Un spécial merci à mon Professeur pour son accueil chaleureux lors de plusieurs visites dans son laboratoire, de m'avoir donné l'occasion à participer aux "Graduate School in Systems and Control" et aux journées : IAP V/22, Systems and Control "Large Graphs and Networks"; IAP VI/4 Dynamical Systems, Control, and Optimization "DYSCO"; d'avoir aussi initié mes premières recherches en LMIs et positivité. Je remercie aussi mon Professeur Tadeusz KACZOREK [Institut of Control and Industrial Electronics-Warsaw University of Technology] d'avoir surtout initié mes premières recherches en théorie des systèmes bidimensionnels et positifs; de m'avoir accueilli dans son laboratoire. Des remerciements très spéciaux au Professeur Hocine Mokhtar KHARROUBI [Université d'Es-senia Oran-Département de Mathématiques] d'avoir accepté de superviser le travail, je le remercie pour son aide et collaboration et je lui exprime toute ma reconnaissance. Mes remerciements vont également au Professeur Noredine GHOUALI Recteur de l'université de Tlemcen pour avoir accepté de juger mon travail et qui me fait un grand honneur de présider ce jury. Je tiens aussi à remercier les professeurs Berrabah BENDOUKHA et SMAIL Abderrehmene qui ont accepté de faire partie du jury et d'examiner cette thèse. Mes remerciements vont également au département de Mathématiques de l'université de Mostaganem qui m'a donné l'occasion d'assister à plusieurs rencontres, conférences et stages. Je remercie également le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique pour le financement d'une année de formation à l'UCL-Belgique. Mes vifs remerciements vont également à tout le staff du Centre d'Ingénierie des Systèmes, d'Automatique et de Mécanique Appliquée de l'UCL, Belgique. Merci à mes collègues du

département de Mathématiques de l'université de Mostaganem et de l'université d'Essenia-Oran. Un très spécial merci à mon épouse, à mes parents, ma famille et à ma belle famille ; sans leur support et encouragement, ce long et difficile travail n'aurait pas été possible. Finalement, j'aime dédier cette thèse à mes deux petites adorables filles Hanae et Besma qui est née en période où je rédigeais cette thèse.

Table des matières

0.1	Introduction :	9
I	Notions de base sur la théorie des matrices	13
1	Matrices particulières	15
1.0.1	Matrices non-négatives, positives et de Metzler	15
1.0.2	Matrices Monomiales	17
1.0.3	Produit de Kronecker	18
II	Systèmes Linéaires Singuliers Positifs à une Dimension (1D)	20
2	Systèmes Linéaires Singuliers Positifs à Temps Continu	21
2.1	Trajectoire d'états et réponse de systèmes singuliers en temps continu . .	23
2.1.1	Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps continu :	23
2.1.2	Réponse de système singuliers en temps continu :	29
2.2	Positivité de systèmes linéaires singuliers en temps continu	30
2.2.1	Positivité externe :	31
2.2.2	Positivité interne :	32
2.3	Observabilité de systèmes linéaires singuliers positifs en temps continu (Extension) :	33
3	Systèmes Linéaires Singuliers Positives à Temps Discret	35
3.1	Trajectoire d'état et réponse de systèmes singuliers en temps discret . . .	35
3.1.1	Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps discret	35
3.1.2	Réponse impulsionnelle :	37
3.2	Positivité de systèmes singuliers en temps discret :	39

3.2.1	Positivité externe :	39
3.2.2	Positivité interne :	39
3.3	Atteignabilité et contrôlabilité des systèmes positifs en temps discret : . .	40
3.4	Discrétisation et Influence de la Valeur du pas de Discrétisation sur l'Atteignabilité et la Contrôlabilité de Systèmes Linéaires Standards Positifs : .	43
3.4.1	Discrétisation	43
3.4.2	Influence de la valeur du pas de discrétisation sur l'atteignabilité .	43
3.5	Atteignabilité de systèmes linéaires positifs en temps discret avec retour d'état (state-feedback) :	44

III Systèmes Linéaires Singuliers Positifs Bidimensionnel (2D) 48

4	Etude de quelques systèmes linéaires positifs à deux dimensions	49
4.1	Solvabilité de systèmes linéaires singuliers positifs à temps discret-continu	49
4.1.1	Solution du Problème	51
4.2	Etude de la positivité	54
4.3	Influence de la valeur du pas de Discrétisation sur la Positivité de Modèles Linéaires à temps discret-continu	55
4.3.1	Modèles Linéaires à temps discret-continu-Trajectoire et Réponse impulsionnelle	55
4.3.2	Modèle général discret-Trajectoire et réponse impulsionnelle . . .	57
4.4	Atteignabilité de systèmes linéaires positifs à 2D : Modèle de Fornasini-Marchesini	61
4.4.1	Trajectoire d'état	61
4.4.2	Condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité du modèle positif de Fornasini-Marchesini	61
4.4.3	Atteignabilité du modèle positif de Fornasini-Marchesini avec retours d'état (state-feedbacks)	62
4.5	Observabilité de systèmes linéaires positifs à deux dimensions à temps discret : Modèle de Roesser	69
4.5.1	Trajectoire d'état	69
4.5.2	Observabilité du système discret de Roesser	70

IV	Inégalités Matricielles Linéaires et \mathcal{D}-stabilité	71
5	Marge de stabilité et \mathcal{D}-stabilité de systèmes à espace d'état généralisé	72
5.1	Contexte et Motivation	72
5.2	Systèmes linéaires à temps invariants LTI incertains	73
5.3	Modèles d'états incertains	73
5.4	Stabilité robuste	74
5.5	Les formulations IMLs	74
5.6	Convexité	76
5.7	Complément de Schur	77
5.8	Propriétés	77
5.8.1	Intersection	77
5.8.2	Mise à échelle	78
5.9	Applications	78
5.9.1	Optimisation	78
5.9.2	Problème de la valeur propre généralisée	79
5.9.3	Stabilité de Lyapunov	79
5.10	Résolution	79
5.11	Historique	80
5.12	Norme H_2 -Norme H_∞	81
5.12.1	Norme H_2	83
5.12.2	Norme H_∞	83
5.13	Marge de stabilité pour des systèmes singuliers	84
5.13.1	Minimalité	85
5.13.2	Marge de stabilité	85
5.14	Régions IMLs et \mathcal{D} -stabilité nominale	89
5.14.1	Les régions IMLs	90
5.14.2	\mathcal{D} -stabilité nominale d'une matrice réelle	90
5.15	\mathcal{D} -stabilité de systèmes singuliers	91
5.16	Conclusion	93
6	Commentaires finaux	94
6.1	Conclusion générale	94
6.2	Perspectives	97

Notations :

\otimes	Produit de Kronecker
\mathbb{Z}_+	Corps des nombres entiers non-négatifs
\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}_+	Corps des nombres réels non-négatifs
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs à n entiers réelles
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+^{n \times 1}$	Espace des vecteurs à entrées réelles non-négatives
$\mathbb{R}_+^{m \times n}$	Espace des matrices à entrées réelles non-négatives
A^T	Transposée de matrice
A^{-1}	Matrice inverse de A
I_n	Matrice identité d'ordre n
\underline{n}	Ensemble des n premiers entiers naturels
$\rho(A)$	Rayon spectral de A
$\lambda(A)$	Ensemble des valeurs propres de A
$\sigma(A)$	Valeur singulière de A
$\bar{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de A
$X(s)$	Transformée de Laplace
$X(z)$	Z-Transformée
$\ G(\cdot)\ _2$	Norme 2 de la matrice G
$\ G(\cdot)\ _\infty$	Norme ∞ de la matrice G
$\Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\Im(z)$	Partie imaginaire du nombre complexe z

Abréviations :

IML	Inégalité matricielle linéaire (en anglais, LMI :Linear matrix inequality)
IMLs	Inégalités matricielles linéaires
SISO	Single input-Single output (une seule entrée-une seule sortie)
LTI	Linéaire invariant dans le temps.

0.1 Introduction :

Dans de nombreux systèmes physiques les variables sont par nature positives or les modèles usuels en particulier linéaires n'intègrent en général pas cette contrainte. Des modèles particuliers ont été développés par nombreux scientifiques, les modèles à compartiments pour la médecine et la biologie, les modèles électriques (circuits RLC), d'autres modèles apparaissent dans le domaine des sciences sociales, en micro et macro économie, en manufacture, en science de la communication et de l'information, les processus industriels impliquant des réacteurs chimiques, voir [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] et [10]. Dans la première partie de thèse, nous étudions les systèmes linéaires positifs. La principale propriété de ces systèmes est que si l'état initial est positif (ou au moins non-négatif), alors la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non-négatif. Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces linéaires. En conséquence, certaines propriétés connues des systèmes linéaires ne peuvent être appliquées pour les systèmes positifs. Une vue d'ensemble de ces systèmes est donnée dans [11] et [12], nos principales références pour cette théorie. Dans ce large domaine de nombreux problèmes ont déjà été étudiés et le sont encore actuellement. L'objectif du chapitre 1 est de rappeler certains concepts élémentaires concernant l'étude des systèmes positifs. Une analyse de ces systèmes fera l'objet des chapitres 2, 3 et 4. Nous rappelons également dans la dernière partie du chapitre 1, la définition du produit de Kronecker et quelques de ses propriétés utile à l'étude de la \mathcal{D} -stabilité d'un système ce qui correspond à l'appartenance des valeurs propres dans une région IML (Inégalité Matricielle Linéaire) en anglais LMI (Linear Matrix Inequality) \mathcal{D} du plan complexe. Nous exposerons en parallèle la définition d'une IML et ses propriétés tout en donnant un bref historique. Le travail est structuré en trois partie, la première comporte deux chapitres qui traite les systèmes linéaires singuliers positifs à une dimension en temps continu et en temps discret, nous présentons alors des caractérisations sur la positivité, tout en rappelons les notions d'atteignabilité et de contrôlabilité pour des systèmes en temps continu. Une extension des résultats de [13] sur l'observabilité sera dans ce cas introduite. Nous adapterons dans le chapitre suivant les résultats aux systèmes linéaires singuliers à temps discret. Une analyse sur l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur l'atteignabilité des systèmes linéaires standards positifs est introduite. Le principal objectif de ce problème est de maintenir les conditions d'atteignabilité pour le modèle discrétisé obtenu par discrétisation à partir d'un système linéaire positif à temps continu. Enfin, bien que l'atteignabilité des systèmes linéaires standards est invariante sous retour d'état, elle ne l'est pas pour les systèmes standards positifs en temps discret [14]. Nous proposons alors une extension des résultats aux systèmes linéaires singuliers positifs en temps discret, autrement dit, on montre que pour un système singulier positif l'atteigna-

bilité est non invariante sous retour d'état. Le chapitre 4 sera donc consacré à l'étude de quelques modèles linéaires à deux dimensions. Une nouvelle classe de modèles linéaires positifs à deux dimensions a été introduite par Roesser (Roesser,1975) [15], Fornasini-Marchesini (Fornasini et Marchesini, 1976) [16], (Fornasini et Marchesini, 1978) [17], J. Kurek (Kurek, 1985) [18]. Ces modèles ont été ensuite étendu par T. Kaczorek (Kaczorek, 1988) [19] et (Kaczorek, 1990) pour des modèles singuliers discret. En 1994, une récente classe de modèles bidimensionnel à temps discret-continu a été introduite par T. Kaczorek. Dans les systèmes à temps discret-continu, la première variable est continue et la seconde est discrète. Ce type de modèle apparaissent en traitement d'image numérique (Roesser), traitement du signal, en contrôle des processus itératifs voir (Rogers et Owens, 1992), en contrôle itérative voir par exemple (Kurek et Zaremba, 1993), aussi les modèles traitant la pollution des fleuves, la discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) décrivant les phénomènes d'observations des gaz, en séismologie, rayon X ainsi que dans nombreux domaines pratiques. Dans une première section, on s'intéresse au problème de solvabilité et de positivité de systèmes linéaires singuliers à deux dimensions à temps discret-continu. Des conditions nécessaires et suffisantes pour que de tels modèles soit positifs seront alors établis. Nous avons étudié par la suite le problème de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité comme extension des résultats du chapitre 3 et de [20]. Il est bien connu que l'atteignabilité et la contrôlabilité des systèmes linéaires standards à une dimension est invariante sous retour d'état. Nous montrons alors que l'atteignabilité du modèle général discret à deux dimensions de Fornasini-Marchesini est non invariante sous retour d'états. Dans ce contexte, nous avons adapté les résultats aux modèles linéaires singuliers à temps continu voir [chapitre 3]. Enfin, après avoir rappeler les trajectoires et les réponses impulsionnelles du système linéaire discret à deux dimensions de Roesser ; des caractérisations sur l'observabilité comme extension des résultats de [13] et du [chapitre 3] sont établis.

Les Inégalités Matricielles Linéaires ou IML prennent une place plus importante dans les méthodes modernes de l'automatique. De nombreux résultats trouvent une formulation IML et ce formalisme permet aussi de résoudre de nouveaux problèmes qui n'avaient pas trouvé jusqu'alors de solution. Le succès des IMLs vient du développement des méthodes dites du point intérieur (interior point methods) qui permet de résoudre de manière efficace ces problèmes [21]. Il est également lié au fait que de nombreux problèmes, notamment de l'automatique, peuvent être formuler sous forme d'IMLs. Dans cette dernière partie de thèse, on s'intéresse donc à la \mathcal{D} -stabilité et à la marge de stabilité. Dans une première étape, nous rappelons quelques notions utiles comme la norme H_2 et la norme H_∞ pour définir ensuite la notion de marge de stabilité (rayon de stabilité). Le problème de base du rayon de stabilité est défini comme suit : Etant donné une matrice A avec tous ses pôles enclouonnés dans une région de stabilité noté

D (qui représente le demi plan gauche ou le disque unitaire). Le rayon de stabilité est défini par la norme de la plus petite perturbation S permettant au moins à une valeur propre de $A + S$ d'être instable. Ce problème a été étudié par nombreux scientifiques voir [22] et [23]. Dans ce contexte, Il existe des formulations analytiques permettant au rayon de stabilité d'être calculé moyennant des algorithmes numériques. Ce problème a ensuite fait l'objet d'une extension aux systèmes à espace d'état généralisé par P. Van Dooren, Y.Genin, P.Nesterov, C. Oara, J. Sreedhar, A. Tits ainsi que V. Vermaut. Une autre étude sur le calcul du rayon de stabilité pour le problème des valeurs propres généralisées a fait l'objet d'extension par P.Van Dooren, V. Vermaut voir [22]. Ce même problème a été étendu aux matrices polynomiales par [23] et aux matrices structurées. Plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature ; parmi celles-ci, cela vaut la peine de mettre en évidence [24], [25], [26] et [27].

Récemment, ces méthodes ont été étendu aux systèmes positifs par D. Hinrichsen, N.K. Son, A. J. Pritchard. Dans ce cadre, une simple formulation du rayon de stabilité a été introduite pour le cas de systèmes linéaires incertains à temps continu. Citons aussi que N.K. Son et D. Hinrichsen [25] et [26] montrent de plus que le cas complexe coïncide avec le cas réel. Nos questions ne prétendent pas traiter ces approches, elles visent uniquement à faire rappeler dans un premier temps, les deux versions du lemme borné réel (bounded real lemma) dû à Kalman Yakubovich Popov dans sa version continu et discrète pour ensuite rappeler l'extension de ces derniers aux systèmes à espace d'état généralisé (pour cela voir P. Van Dooren [28], [29] et [30]). Nous proposons donc, une autre formulation du rayon de stabilité pour une classe de systèmes linéaires singuliers perturbés qu'ils soient à temps continu ou à temps discret, pour ensuite déduire des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. A la fin des généralisations de ces dernières aux modèles à espace d'état non standard avec E inversible sont introduites. Nous proposerons des conditions IML dans le cas continu comme dans le cas discret qui sont équivalentes au lemme borné réel. Enfin, la seconde étape de cette dernière partie de thèse est consacrée à la \mathcal{D} -stabilité. Dans la conception de commande, on s'intéresse à la robustesse d'un système nominal, en présence d'incertitudes dans les paramètres de modèles. Des inégalités linéaires matricielles sont souvent employées dans ce contexte parce qu'elles rapportent des conditions suffisantes exprimant qu'une certaine classe de perturbations ne stabilise pas un système nominal. Dans cette partie, nous étudions les résultats obtenus précédemment par Chilali et Gahinet [77] concernant la conception H_∞ avec des contraintes de placement de pôles dans une certaine région du plan complexe. Ces conditions décrivent une classe de régions convexes dans lesquelles les pôles sont contraints à se cloisonner, ceci pour toutes perturbations données. Les résultats dérivés dans [32] sont formulés en termes de modèle à espace d'état standard. Dans notre cas, nous les prolongeons à la classe de modèles à espace d'état généralisé, pour le cas des

systèmes à temps continu et au cas de systèmes à temps discret. Nous proposons également des essais modifiés en utilisant des inégalités linéaires matricielles de dimension réduite. Ces prolongements ont l'avantage de réduire la complexité de l'approche et de rapporter les essais numériques qui sont plus fiables puisque la réduction à un modèle à espace d'état standard n'est plus exigée.

Première partie

Notions de base sur la théorie des matrices

Dans cette première partie introductive, nous présentons la théorie générale de matrices particulières telles les matrices non-négatives, les matrices de Metzler ou encore les matrices monomiales. Nous nous basons pour ce faire sur les nombreuses références qui existent dans ce cadre comme, par exemple, [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [11], [12] et [40], Nous ferons régulièrement référence à cette première partie présentant les propriétés intéressantes de ces matrices particulières, puisque, lors de notre étude, nous utiliserons cette classe de matrices.

Chapitre 1

Matrices particulières

Nous présentons dans ce premier chapitre la théorie générale des matrices non-négatives et des matrices de Metzler. Il existe un grand nombre de références sur cette classe de matrices ; nous nous basons principalement sur les références suivantes : ([33], chap1), ([39], chap15), ([35], chap2), ([42], chap1), [37], ([34], chap2) et [41]. Nous commençons par les définitions ainsi que les propriétés générales de ces matrices. Nous étudions alors plus particulièrement les matrices non-négatives, les matrices positives et les matrices de Metzler qui permettent de caractériser la positivité de systèmes linéaires. Une analyse de ces systèmes fera l'objet des chapitres 2, 3 et 4. Enfin, nous examinerons une autre classe de matrices, à savoir les matrices monomiales et certaines de leurs propriétés, voir [7], [38], ([35], chap5). Ces matrices interviennent lors de l'étude du problème de positivité. Finalement, nous rappelons également, enfin de chapitre, la définition du produit de Kronecker ainsi que quelques une de ses propriétés importantes, comme son utilisation pour l'équation de Lyapunov, voir [43], [44] et [37]. Nous utiliserons ce produit de Kronecker lors de l'étude du problème de D -stabilité.

1.0.1 Matrices non-négatives, positives et de Metzler

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des matrices à coefficients réels. Par la suite, nous notons I_n , la matrice identité d'ordre n ou plus brièvement I , A^T la transposée d'une matrice A , \underline{n} , l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, \dots, n$.

Définition 1 – A est une matrice **non-négative** si $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m} : a_{ij} \geq 0$, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives. Nous noterons une telle matrice par : $A \geq 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

– A est une matrice **positive** si A est non-négative et $\exists k \in \underline{n}, \exists l \in \underline{m} : a_{kl} > 0$, c'est

à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée (strictement) positive. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.

- A est une matrice **strictement positive** si $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m} : a_{ij} > 0$, i.e. toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par : $A \gg 0$. Ces définitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension $n, n \geq 2$. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif $\alpha \gg 0$ coïncide avec $\alpha > 0$.
- A est une matrice de **Metzler** si $\forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$ i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.

Exemple 2 La matrice A suivante est une matrice de Metzler,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Le résultat suivant est immédiat,

Proposition 3 : [1]

A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geq 0, e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.

ou de manière équivalente, $\forall t \geq 0$, l'orthant positif, \mathbb{R}_+^n , est e^{At} -invariant, c'est à dire $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^n, e^{At}x \in \mathbb{R}_+^n$.

Preuve.

- Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A + \lambda I_n) > 0$. Sachant que

$$(A + \lambda I_n)(-\lambda I_n) = (-\lambda I_n)(A + \lambda I_n)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I_n)t(-\lambda I_n)t} \\ &= e^{(A+\lambda I_n)t} e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \end{aligned}$$

du fait que $e^{(A+\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $e^{(-\lambda I_n)t} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$

– Suffisance :

Supposons que $\forall t \geq 0, e^{At} \geq 0$. Ainsi, puisque

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{At} - I}{t},$$

Prenons comme e_j le j^{me} vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle e^{At} e_j - e_j, e_i \rangle}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\langle e^{At} e_j, e_i \rangle}{t} - \frac{\langle e_j, e_i \rangle}{t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\langle e^{At} e_j, e_i \rangle}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

puisque $\langle e_j, e_i \rangle = 0$. Dés lors, $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler. ■

1.0.2 Matrices Monomiales

Dans cette section, nous présentons une autre classe de matrices : les matrices monomiales. Une caractérisation de telles matrices en fonction de leur inverse sera donnée à partir de [38], ([38],chap5), [44] et [45]. L'utilité d'une telle matrice sera mis en évidence lors de l'étude de l'atteignabilité de modèles linéaires positifs.

Définition 4 Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n ,

- A est une matrice **monomiale** ou **matrice de permutation généralisée** si les entrées de A sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.

Exemple 5 – La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

est une matrice de permutation généralisée.

- En particulier, une matrice de permutation est une matrice monomiale dans laquelle chaque entrée non nulle est égale à 1.

Le résultat suivant est bien connu dans la littérature, voir par exemple [11].

Proposition 6 : [42]

Une matrice A non singulière telle que, $A^{-1} \in \mathbb{R}_{n \times n}^+$ si et seulement si, A est une matrice monomiale.

1.0.3 Produit de Kronecker

Pour les besoins de l'étude de la \mathcal{D} -stabilité, nous définissons le produit de Kronecker qui est une autre manière de définir la notion de produit pour des matrices. Il est aussi appelé produit direct de deux matrices ou produit tensoriel. Il se note \otimes . Nous faisons donc un bref rappel en nous basant, par exemple sur [43] ou encore [44].

Définition 7 Le produit de **Kronecker** de deux matrices $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ est la matrice $A \otimes B \in \mathbb{R}^{np \times nq}$ donnée par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Exemple 8 Avec les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},$$

on obtient,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 12 & 14 & 18 & 21 \\ 8 & 9 & 16 & 18 & 24 & 27 \end{pmatrix}$$

Quelques propriétés du Produit de Kronecker

Les propriétés suivantes du produit de Kronecker peuvent être utiles (en outre, elles justifient l'appellation de produit). Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans Henderson et Searle (1981), Magnus et Neudecker (1989) et Searle (1982).

1. Le produit de Kronecker est associatif : Pour tout triplet de matrices A, B et C , on obtient :

$$A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \tag{1.3}$$

2. Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition : Pour tout quadruplet A, B, C et D , tel que $(A + B)$ et $(C + D)$, existent on obtient :

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D) \quad (1.4)$$

3. Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : Pour tout quadruplet A, B, C et D , tel que, AB et CD , existent on obtient :

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D) \quad (1.5)$$

4. L'opérateur de transposition se distribue par rapport au produit de Kronecker,

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (1.6)$$

5. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif;

6.

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1}) \quad (1.7)$$

7.

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B) \quad (1.8)$$

Deuxième partie

Systemes Linéaires Singuliers Positifs à une Dimension (1D)

Chapitre 2

Systemes Linéaires Singuliers Positifs à Temps Continu

Ce chapitre traite les systèmes linéaires singuliers positifs en temps continu. Nous verrons dans la partie suivante, les résultats adaptés en temps discret. De manière générale, la classe des systèmes linéaires positifs est une classe particulière importante et fascinante des systèmes linéaires qu'on retrouve en ingénierie, en économie, en sciences sociales, en biologie, en médecine, en gestion et en électronique. Les variables d'états représentent typiquement une population, quantité de marchandise, masses chimiques etc. Ces systèmes peuvent être modélisés en tant que systèmes positifs dans lesquels la trajectoire d'état est toujours positive toutes les fois que l'état initiale est positif. Une vue d'ensemble de la situation actuelle de la théorie des systèmes positifs est donnée dans [12] et [11]. Nous nous basons sur ces différentes références pour donner des définitions et caractérisations des systèmes positifs en temps continu. Nous rappelons les notions d'atteignabilité et de contrôlabilité pour ce type de systèmes. Une extension des résultats de [13] sur l'observabilité des systèmes singuliers en temps continu est établi.

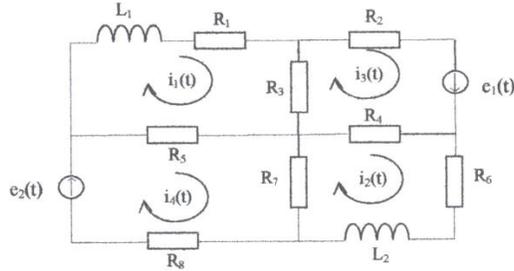


FIG. 2.1 – circuit RLC

Exemple 9 *Considérons le circuit à quatre mailles représenté par la figure (2.1), où R_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ sont les résistances données, L_1 , L_2 les inductances et e_1 , e_2 les sources de voltages. On note par i_1 , i_2 , i_3 , i_4 les intensités du courant dans les quatre mailles. En appliquant la lois des mailles, on obtient alors,*

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = -(R_1 + R_3 + R_5)i_1(t) + R_3i_3(t) + R_5i_4(t), \quad (2.1)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = -(R_4 + R_6 + R_7)i_2(t) + R_4i_3(t) + R_7i_4(t), \quad (2.2)$$

$$0 = R_3i_1(t) + R_4i_2(t) - (R_2 + R_3 + R_4)i_3(t) + e_1, \quad (2.3)$$

$$0 = R_5i_1(t) + R_7i_2(t) - (R_5 + R_7 + R_8)i_4(t) + e_2. \quad (2.4)$$

et si on pose $x_1 = i_1(t)$, $x_2 = i_2(t)$, $x_3 = i_3(t)$, $x_4 = i_4(t)$, on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

avec,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{24}}{L_2} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & -R_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

où,

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_5, R_{22} = R_4 + R_6 + R_7, R_{24} = R_{42} = R_7 \quad (2.7)$$

$$R_{13} = R_{31} = R_3, R_{14} = R_{41} = R_5, R_{23} = R_{32} = R_4 \quad (2.8)$$

$$R_{33} = R_2 + R_3 + R_4, R_{44} = R_5 + R_7 + R_8 \quad (2.9)$$

Nous avons donc un système linéaire singulier.

2.1 Trajectoire d'états et réponse de systèmes singuliers en temps continu

Nous rappelons brièvement dans cette section l'expression des trajectoires d'états et des réponses de systèmes linéaires singuliers en temps continu, voir [11], [46] et [47] pour plus de détails.

2.1.1 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps continu :

Considérons le système linéaire continu suivant,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.10)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.11)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et E, A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Définition 10 – Le système (2.10) est dit **singulier** si $\det E = 0$.
 – Dans le cas contraire, c'est à dire si $\det E \neq 0$, il est dit **standard**.
 – Si $E = I_n$, le système est aussi appelé **standard** (ou **explicite**).

Définition 11 Le système (2.10) est dit **régulier** si et seulement si

$$\det(Es - A) \neq 0, \quad (2.12)$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Remarque 12 Si $\det E \neq 0$, alors en multipliant (2.10) par E^{-1} , on obtient le système suivant,

$$\dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \quad (2.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.14)$$

qui est un système explicite.

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $\det(Es - A) \neq 0$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent autour de l' ∞ [F.L.Lewis, 1984; T.Kaczorek, 1993]

$$(sE - A)^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-i} \quad (2.15)$$

où μ est appelé **indice de nilpotence** du faisceau $(sE - A)$ voir [?], [51], [49] et [50], il est décrit par,

$$\mu = \text{rg}E - \text{deg}[\det(Es - A)] + 1 \quad (2.16)$$

ϕ_i est appelée la **matrice fondamentale** de (2.10). Il s'ensuit directement de la relation (2.15) que la matrice fondamentale ϕ_i satisfait les équations suivantes,

$$E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I \quad (2.17)$$

$$\phi_i E - \phi_{i-1}A = \delta_{0i}I \quad (2.18)$$

où δ_{0i} est le **delta de Kronecker** [51], [52], [1] et [53].

Dans [53], l'auteur montre comment calculer les ϕ_i tout en supposant disponibles ϕ_0 et ϕ_{-1} . Par contre, dans [51], la matrice fondamentale est calculée à partir des matrices E et A en utilisant l'inverse de Drazin [55], qui a été développé ensuite par T.Kaczorek voir [54].

Nous avons quelques propriétés de la matrice fondamentale.

1. $\phi_i = 0$, pour $i < -\mu$,

2.

$$\phi_0 A \phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

3.

$$-\phi_{-1} E \phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \geq 0 \\ \phi_{-i-1} & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

4.

$$\phi_i = (\phi_0 A)^i \phi_0, \text{ pour } i \geq 0$$

5.

$$\phi_0 E \phi_i = \begin{cases} \phi_i & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

6.

$$-\phi_{-1} A \phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \geq 0 \\ \phi_i & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

7.

$$\phi_0 A \phi_i = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

8.

$$-\phi_{i-1} E \phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \geq 0 \\ \phi_{i-1} & \text{pour } i < 0 \end{cases}$$

Exemple 13 *Considérons les matrices E et A suivantes,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$(Es - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{pmatrix}$$

Ici l'indice de nilpotence est $\mu = 2$. Les matrices fondamentales sont,

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pour $i \geq 0$,

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Remarque 14 1. Si $E = I_n$, alors

$$\phi_i = 0 \quad \text{pour } i < 0 \quad (2.19)$$

$$\phi_i = A^i \quad \text{pour } i \geq 0 \quad (2.20)$$

2. Si E est inversible,

$$(sE - A)^{-1} = (I - (s^{-1}E^{-1}A))^{-1}E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty} (E^{-1}A)^i s^{-i} \right] E^{-1}s^{-1} \quad (2.21)$$

On en déduit alors,

$$\phi_i = 0, \text{ pour } i < 0,$$

$$\phi_0 = E^{-1}; \quad \phi_1 = (E^{-1}A)E^{-1};$$

$$\phi_2 = E^{-1}A\phi_1 = (E^{-1}A)^2E^{-1};$$

\vdots

$$\phi_i = (E^{-1}A)\phi_{i-1} = (E^{-1}A)^i E^{-1}, \text{ pour } i \geq 0.$$

La solution $x(t)$ du système (2.10) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et le contrôle $u(\cdot)$ est donnée par (voir par exemple [56]) :

$$x(t) = e^{\phi_0 A(t-t_0)} E x_0 + \int_{t_0}^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} (B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)}) \quad (2.22)$$

où $u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^j}$, $j = 1, \dots, \mu - 1$.

Preuve. Par application de la transformée de Laplace à l'équation (2.10) on obtient,

$$EsX(s) - Ex_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$EsX(s) - AX(s) = Ex_0 + BU(s)$$

$$(Es - A)X(s) = Ex_0 + BU(s)$$

Le système (2.10) étant régulier, donc $(Es - A)^{-1}$ existe pour un certain nombre $s \in \mathbb{C}$, par suite

$$X(s) = (Es - A)^{-1}(Ex_0 + BU(s))$$

De la relation (2.15), il s'ensuit,

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} (Ex_0 + BU(s))$$

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s)$$

$$X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s).$$

Enfin, nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théorème de convolution pour obtenir la solution du système, sachant que

$$L(e^{\phi_0 At} \phi_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)}$$

on aura alors,

$$x(t) = Ex_0 e^{\phi_0 At} \phi_0 + BL^{-1}[L(e^{\phi_0 At} \phi_0)L[u(t)]] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t)$$

$$x(t) = Ex_0 e^{\phi_0 At} \phi_0 + ([e^{\phi_0 At} \phi_0] * B[u(t)]) + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \delta^{(i-1)} + B \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t)$$

Par conséquent,

$$x(t) = e^{\phi_0 At} \phi_0 Ex_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 Bu(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} (Bu^{(i-1)}(t) + Ex_0 \delta^{(i-1)}(t))$$

■

Exemple 15 Si on considère le système (2.10) avec :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 1), D = 2$$

alors,

$$\det(Es - A) = -s,$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$, par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

par suite,

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{\phi_0 A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'après la propriété 2, on obtient,

$$\phi_i = \phi_0 A \phi_{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } i \geq 0,$$

La solution du système est par suite donnée par,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\phi_0 A t} \phi_0 E x_0 + \phi_{-1} B u(t) + \phi_{-1} E x_0 + \phi_{-2} B u^{(1)}(t) + \phi_{-1} E x_0 \delta^{(1)}(t) \\ x(t) &= \begin{pmatrix} -u(t) - x_{2,0} \delta(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ x_{3,0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer une autre caractérisation qui nous permettra de vérifier l'existence de la solution de l'équation (2.10).

Théorème 16 Si la relation (2.12) est vérifiée, alors l'équation (2.10) et l'équation,

$$\dot{x} = \phi_0 A x + \phi_0 B u + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} (B u^{(j)} + E x_0 \delta^{(j)}) \quad (2.23)$$

$x(0) = x_0$ possèdent la même solution,

$$x(t) = e^{\phi_0 A t} \phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A (t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} (B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)}) \quad (2.24)$$

Preuve. D'après ce qui précède, La relation (2.24) est solution de (2.10). Inversement, moyennant (2.24) et les propriétés 7 et 8, on vérifie facilement que,

$$\begin{aligned}
& \phi_0 Ax + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) = \phi_0 A(e^{\phi_0 At} + \phi_0 Ex_0 + \\
& \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 Bu(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)})) + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) \\
& = \phi_0 Ae^{\phi_0 At} \phi_0 Ex_0 + \phi_0 A \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 Bu(\tau) d\tau + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) = \dot{x}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

ce qui achève notre preuve. ■

2.1.2 Réponse de système singuliers en temps continu :

Cas standard :

Considérons le système linéaire standard en temps invariant suivant,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

pour tout $t \geq t_0$, nous obtenons,

– Trajectoire d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.27}$$

– Réponse du système :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D(\tau) \tag{2.28}$$

– Matrice de réponse impulsionnelle :

$$G(t, t_0) = Ce^{A(t-t_0)}B + D\delta(t - t_0) \tag{2.29}$$

Après avoir rappelé les trajectoires d'état et les réponses d'un système standard, la notion de réponse impulsionnelle sera donc développé dans le cas de systèmes singuliers à temps continu. Nous expliciterons en parallèle la notion de fonction de transfert pour ce type de systèmes.

Cas singulier :

La sortie du système singulier (2.10) est donnée par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = Ce^{\phi_0 A t} E x_0 + \int_0^t Ce^{\phi_0 A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C \phi_{-j} (B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)}) + Du(t) \quad (2.30)$$

En substituant $x_0 = 0$ et $u(t) = \delta(t)$ dans (2.30), on obtient la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système (2.10)

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{\phi_0 A t} \phi_0 B & \text{pour } t > 0 \\ Ce^{\phi_0 A t} \phi_0 B + \sum_{j=1}^{\mu} C \phi_{-j} (B \delta^{(j-1)}(t) + D \delta(t)) & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

La matrice de transfert du système est,

$$T(s) = C(Es - A)^{-1} B + D \quad (2.31)$$

Une substitution de (2.15) dans (2.31) donne,

$$T(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C \phi_i B s^{-(i+1)} + \sum_{j=1}^{\mu} C \phi_{-j} B s^{(j-1)} + D \quad (2.32)$$

Si on remplace la propriété 4 dans (2.32), on obtient,

$$T(s) = C \left[\sum_{i=0}^{\infty} (\phi_0 A)^i s^{-(i+1)} \right] \phi_0 B + \sum_{j=1}^{\mu} C \phi_{-j} B s^{(j-1)} + D \quad (2.33)$$

enfin, en appliquant, la transformée de Laplace, on aura alors la relation (2.1.2).

2.2 Positivité de systèmes linéaires singuliers en temps continu

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

2.2.1 Positivité externe :

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité de systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 17 *Un système linéaire standard est dit **externement positif** si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour, $x_0 = x(0) = 0$ et pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, on a $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, pour $t \geq 0$.*

Nous obtenons alors une caractérisation de la positivité externe en terme de la matrice impulsionnelle, voir [57] et [58]

Théorème 18 (Condition pour la positivité externe) *Un système linéaire est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle est non-négative, i.e. $g(t) \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$, pour $t \geq 0$.*

Nous considérons maintenant le cas de la positivité externe pour des systèmes linéaires singuliers à temps continu.

Définition 19 *Le système **singulier** (2.10) est dit **externement positif** si pour $x_0 = 0$ et tout contrôle non-négatif $u(t) \geq 0$ avec $u^{(j)}(t) \geq 0$ pour $j = 1, \dots, \mu - 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, la sortie est aussi non-négative i.e $y(t) \geq 0$ pour $t > 0$.*

Une caractérisation de la positivité externe de systèmes linéaires singuliers est donnée par le théorème suivant. Nous donnerons la preuve du théorème puisqu'elle aide à la compréhension du contenu.

Théorème 20 *Le système singulier (2.10) avec $D = 0$ est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle $g(t)$ est non-négative i.e $g(t) \in \mathbb{R}_+$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.*

Preuve. La nécessité découle immédiatement de la définition de la réponse impulsionnelle et de la définition de positivité. Pour la suffisance, on suppose que $g(t) \in \mathbb{R}_+$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et à partir de la relation (2.30), pour $x_0 = 0$ et $u^{(j)}(t) \geq 0$ pour $j = 0, 1, \dots, \mu - 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on obtient $y(t) \geq 0$ pour $t > 0$, ce qui achève la preuve. ■

2.2.2 Positivité interne :

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition 21 *Le système (2.26) est dit **internement positif** si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$ on a $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$.*

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif \mathbb{R}_+^n (frontières incluses) de l'espace d'état \mathbb{R} , obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

Remarque 22 *La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.*

Nous allons alors caractériser la positivité interne des systèmes linéaires standards en temps continu telle que dans [57] et [58].

Théorème 23 *Le système (2.26) est internement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$*

Maintenant, nous allons donner la définition de la positivité interne de systèmes linéaires singuliers en temps continu.

Définition 24 *Le système singulier (2.10) est dit **internement positif** si pour tout état initial admissible $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et tout contrôle non-négatif $u(t) \geq 0$ avec $u^{(j)}(t) \geq 0$, $j = 0, 1, \dots, \mu - 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^n$, l'état $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$.*

Remarque 25 *Un système singulier internement positif est toujours externement positif.*

Une autre définition de la positivité interne pour les systèmes singuliers est donnée par, voir [11].

Définition 26 *Le système (2.10) est faiblement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler, $E \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$*

Dans l'exemple du circuit RLC, et à partir de (2.6), il s'ensuit que $E \in \mathbb{R}_+^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}_+^{4 \times 2}$ et A est une matrice de Metzler. Nous avons donc un système linéaire singulier positif.

2.3 Observabilité de systèmes linéaires singuliers positifs en temps continu (Extension) :

L'observabilité de systèmes linéaires a été étudiée dans nombreux ouvrages [59], [60]. Cette section expose les notions d'observabilité des systèmes singuliers positifs en temps continu. Nous nous basons sur [13], pour adapter les résultats obtenus aux systèmes singuliers positifs en temps continu. Sur la base de ces résultats, nous obtiendrons certaines caractérisations sur l'observabilité pour le modèle discret de Roesser à deux dimensions voir [Chapitre 4, Section 3]. Des conditions nécessaires et suffisantes sont alors établies. Définissons d'abord, l'observabilité pour les systèmes singuliers à temps continu.

Définition 27 *Le système positif (faiblement positif) (2.10) est dit observable si la sortie $y(t)$ est nulle pour tout $t \geq 0$ implique $Ex_0 = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quand le contrôle $u(t)$ est nul.*

Si $u(t) = 0, \forall t \geq 0$, alors,

$$y(t) = Ce^{\phi_0 At} \phi_0 E + \sum_{j=1}^{\mu} C \phi_0 E x_0 \delta^{(j-1)}$$

$$y(t) = [Ce^{\phi_0 At} \phi_0 + C \phi_{-1} \delta + C \phi_{-2} \delta^{(1)} + \dots + C \phi_{-\mu} \delta^{(\mu-1)}] E x_0 = W_{\mu} E x_0$$

Une extension des résultats obtenus dans [13] pour l'existence de solutions au problème d'observabilité est adaptée à des systèmes singuliers positifs en temps continu. Nous en venons alors à la caractérisation suivante,

Théorème 28 *Le système régulier positif (faiblement positif) (2.10) est observable si et seulement si la condition suivante est satisfaite,*

$$\text{Ker} W_{\mu} \cap \text{Im} E = 0 \tag{2.34}$$

où,

$$W_{\mu} = \begin{bmatrix} Ce^{\phi_0 At} \phi_0 \\ C \phi_{-1} \delta \\ \vdots \\ \vdots \\ C \phi_{-\mu} \delta^{(\mu-1)} \end{bmatrix}$$

Preuve. Si la condition est vérifiée, le système est observable. Inversement, supposons que le système (2.10) est observable et montrons que $KerW_\mu \cap ImE \subset 0$ du fait que l'autre inclusion est trivialement satisfaite puisque le système est supposé observable. Pour cela, prenons $\alpha \in KerW_\mu \cap ImE$, alors $W_\mu\alpha = 0$ et $\alpha = Ex_0$ pour certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$, par suite $\alpha = Ex_0 = 0$. ■

Chapitre 3

Systemes Linéaires Singuliers Positives à Temps Discret

Nous présentons dans ce chapitre les systèmes positifs singuliers en temps discret. Nous adaptons les résultats obtenus dans le chapitre 2 sur les systèmes singuliers en temps continu. Nous prendrons donc exactement la même structure que dans ce chapitre. Rappelons qu'une vue d'ensemble de la situation actuelle de la théorie des systèmes positifs est donnée par [11], [12] et [50].

3.1 Trajectoire d'état et réponse de systèmes singuliers en temps discret

Dans cette section, nous considérons les systèmes linéaires singuliers discret en temps invariant. Nous regardons alors comment s'écrivent les trajectoires d'état et les réponses de tels systèmes.

3.1.1 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps discret

Considérons le système linéaire singulier en temps discret suivant,

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \tag{3.1}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \tag{3.2}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u_i \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y_i \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Définition 29 *Le système (3.1) est dit **singulier** si $\det E = 0$. Dans la cas contraire, il sera dit **standard**.*

On suppose que

$$\det(Ez - A) \neq 0 \quad (3.3)$$

pour certain $z \in \mathbb{C}$; si cette dernière relation est satisfaite, alors,

$$(Ez - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} \quad (3.4)$$

où μ est l'indice de nilpotence et les ϕ_i sont les matrices fondamentales données par,

$$E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I, \quad (3.5)$$

$$\phi_i E - \phi_{i-1} A = \delta_{0i}I \quad (3.6)$$

où δ_{0i} est le **delta de Kronecker** [53] et [61].

Notons que nous avons les mêmes propriétés que dans le cas continu. Cependant, l'application de la z-transformée au système (3.1) donne,

$$(zE - A)X(z) = zEx_0 + BU(z) \quad (3.7)$$

ou encore,

$$X(z) = (zE - A)^{-1}zEx_0 + (zE - A)^{-1}BU(z), \quad (3.8)$$

d'après (3.4), on obtient,

$$X(z) = \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-(i+1)} BU(z) + \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i z^{-i} Ex_0$$

Utilisons maintenant la z-transformée inverse pour obtenir la solution du système,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i BU(z) z^{(n-i-2)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i z^{n-i-1} Ex_0$$

par conséquent, la solution du système est,

$$x(n) := x_n = \phi_n E x_0 + \sum_{-\mu}^{\infty} \phi_i B u(n-i-1)$$

$$x(n) := x_n = \phi_n E x_0 + \sum_0^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} B u(i)$$

Il s'ensuit par suite,

$$x_n = \phi_n E x_0 + \sum_{n=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} B u_i, n \in Z_+ \quad (3.9)$$

qui représente la solution du système singulier à temps discret.

3.1.2 Réponse impulsionnelle :

La sortie du système est déterminée par la formule,

$$y_n = C \phi_n E x_0 + \sum_{n=0}^{n+\mu-1} C \phi_{n-i-1} B u_i, : n \in Z_+ \quad (3.10)$$

la réponse impulsionnelle est alors,

$$g_n = C \phi_{n-1} B, \quad (3.11)$$

pour $n = 1 - \mu, \dots, 0, 1, \dots$. En utilisant (3.11), on peut écrire (3.10) sous la forme suivante,

$$y_n = C \phi_n E x_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} g_{n-i} u_i, n \in Z_+ \quad (3.12)$$

La matrice de transfert de (3.1) est donnée par,

$$T(z) = C(Ez - A)^{-1} B \quad (3.13)$$

de (3.4), (3.13) et (3.11), on obtient,

$$T(z) = \sum_{n=-\mu}^{\infty} C \phi_n B z^{-(n+1)} = \sum_{i=1-\mu}^{\infty} g_i z^{-i} \quad (3.14)$$

Exemple 30 Dans cet exemple, on considère le système (3.1) avec les matrices,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 1 \ 0), D = 1$$

alors,

$$\det(Es - A) = -z,$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$, par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

par suite,

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_i = \phi_0 A \phi_{i-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ pour } i \geq 1$$

alors la solution est donnée par,

$$x_n = \phi_{-2} B u_{n+1} + \phi_{-1} B u_n + \phi_0 B u_{n-1}$$

$$x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_{n+1} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{n-1}$$

soit encore,

$$x_n = \begin{bmatrix} -u_n \\ u_{n-1} \\ -u_{n+1} \end{bmatrix}$$

La sortie du système sera cependant égale à,

$$y_n = u_{n+1} + 2u_n$$

3.2 Positivité de systèmes singuliers en temps discret :

Comme dans le chapitre 2 sur les systèmes singuliers en temps continu, nous sommes amenés à considérer deux types de positivité : la **positivité externe** et la **positivité interne**.

3.2.1 Positivité externe :

Rappelons d'abord la définition de positivité externe, voir [57] et [58].

Définition 31 *Un système linéaire singulier est dit **externement positif** si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e., $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i \in \mathbb{Z}_+$: $y_i \in \mathbb{R}_+^p$, pour $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Nous obtiendrons la même caractérisation que dans le cas continu, faisant intervenir la matrice de réponse impulsionnelle.

Théorème 32 (Condition pour la positivité externe) *Un système linéaire singulier est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle est non-négative, i.e., $g_i \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ pour $i = 1 - \mu, \dots, 0, 1, \dots$.*

Preuve. La nécessité découle immédiatement de la définition. Pour la suffisance, notons que pour $x_0 = 0$ et $u_k \in \mathbb{R}_+^m$, $k \in \mathbb{Z}_+$, de la relation (3.12), on obtient,

$$y_i = \sum_{j=0}^{i+\mu-1} g_{i-j} u_j \in \mathbb{R}_+^p \quad (3.15)$$

Si $g_i \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ pour $i = 1 - \mu, \dots, 0, 1, \dots$ ■

3.2.2 Positivité interne :

Etudions à présent la positivité interne de systèmes linéaires singuliers en temps discret. Les définitions de positivité sont les mêmes que dans le cas continu.

Définition 33 *Le système linéaire singulier décrit par (3.1) est dit (**internement**) positif si pour des conditions initiales admissibles $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute suite de contrôle $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i \in \mathbb{Z}_+$ on a $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_i \in \mathbb{R}_+^p$, pour $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Définition 34 *Le système (3.1) singulier avec $E^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ est un système standard positif.*

Remarque 35 *Si le système est internement positif, alors il est externement positif. La réciproque est fausse.*

3.3 Atteignabilité et contrôlabilité des systèmes positifs en temps discret :

Les définitions et les résultats concernant les notions importantes d'atteignabilité, de contrôlabilité et d'observabilité pour des systèmes singuliers en temps discret sont exactement les mêmes que ceux développés dans le cas continu, excepté le fait que le temps t est à présent l'entier i . Considérons d'abord le système linéaire standard en temps discret décrit par

$$x_{i+1} = Fx_i + Gu_i, \quad (3.16)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \quad (3.17)$$

où $F \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $G \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$

- Définition 36** – *Le système positif (3.16) est dit **atteignable au pas** h si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et $x_0 = 0$, il existe une suite de contrôle $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, \dots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
- *Le système positif (3.16) est dit **atteignable** si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ et $x_0 = 0$, il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, \dots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
 - *Le système positif (3.16) est dit **contrôlable** si pour chaque état non nul $x_f, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, \dots, h-1$ tels que $x_h = x_f$.*
 - *Le système positif (3.16) est dit **contrôlable en zéro** si pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, il existe $h \in \mathbb{Z}_+$ et $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, \dots, h-1$ tels que $x_h = 0$.*

Voyons alors deux caractérisations de tels systèmes, voir [57], [11], [62], [63], [9].

Théorème 37 *Le système positif (3.16) est dit **atteignable au pas** n si et seulement si,*

- $\text{rang} R_n = n$,
- *il existe une sous matrice monomiale de R_n où*

$$R_n = [G, FG, \dots, F^{n-1}G] \in \mathbb{R}_+^{n \times nm}, \quad (3.18)$$

Remarque 38 *Si le système positif (3.16) est atteignable alors il est atteignable au pas n , voir [62], [63].*

Théorème 39 *Le système positif (3.16) est dit **contrôlable** si et seulement si,*

- la matrice R_n est monomiale;
- le rayon spectrale $\rho(A)$ de la matrice A est tel que $\rho(A) < 1$ si le transfert de x_0 à x_f est permis en un nombre fini de pas et $\rho(A) = 0$ si le transfert de x_0 à x_f est exigé en un nombre fini de pas.

Nous allons maintenant nous intéresser aux cas de systèmes singuliers positifs en temps discret. Considérons alors le système singulier décrit par (3.1),

Définition 40 - *Le système singulier positif (3.1) est dit **atteignable au pas h** si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, $i = 0, 1, \dots, h - 1$ qui transfère le système d'un état initial nul $x_0 = 0$ à un état final x_f .*

- *Le système singulier positif (3.1) est dit **atteignable** si pour chaque $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, il existe un entier positif h tel que le système sera atteignable au pas h .*

Nous avons alors une caractérisation de l'atteignabilité en terme de matrices fondamentales, voir [11].

Théorème 41 *Le système singulier positif (3.1) est atteignable au pas n si et seulement si,*

1. $\text{rang} R_n = n$,
2. Il existe une sous matrice monomiale de R_n où

$$R_n = [\phi_{n-1}B, \phi_{n-2}B, \dots, \phi_0B, \phi_{-1}B, \dots, \phi_{-\mu}B] \quad (3.19)$$

Preuve. Sachant que la solution du système est ,

$$x_i = \phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i+\mu-1} \phi_{i-j-1} B u_j = R_n U_{0,n+\mu-1}, \quad i \in Z_+ \quad (3.20)$$

où,

$$U_{0,n+\mu-1} = [u_0^T, u_1^T, \dots, u_{n-1}^T, u_n^T, \dots, u_{n+\mu-1}^T]^T \in \mathbb{R}_+^{(n+\mu) \times m} \quad (3.21)$$

Notons que pour chaque x_f , il existe une suite de commandes $u_i \in \mathbb{R}_+^m$, $i = 0, 1, \dots, n + \mu - 1$ si et seulement si les deux conditions sont satisfaites. ■

Exemple 42 *Considérons le système (3.1) avec,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors,

$$(Ez - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -z \end{pmatrix}$$

par suite les matrices fondamentales sont

$$\phi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $i \geq 0$,

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

par conséquent, la matrice d'atteignabilité sera,

$$R_3 = \begin{pmatrix} \phi_2 B \\ \phi_1 B \\ \phi_0 B \\ \phi_{-1} B \\ \phi_{-2} B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Notons que $\text{rang}R_3 = 3$ mais la condition 2/ n'est pas satisfaite du fait que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$$

Le système n'est donc pas atteignable au pas 3.

3.4 Discrétisation et Influence de la Valeur du pas de Discrétisation sur l'Atteignabilité et la Contrôlabilité de Systèmes Linéaires Standards Positifs :

La relation entre la valeur du pas de discrétisation, la positivité et la stabilité des systèmes linéaires standards à une dimension est introduite dans [20]. Dans cette sous section, on s'intéresse à l'analyse de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur l'atteignabilité de systèmes linéaires standards à temps discret obtenu par discrétisation à partir de systèmes linéaires à temps continu. Des conditions nécessaires et suffisantes sont alors établies.

3.4.1 Discrétisation

Pour ce faire, considérons le système linéaire en temps continu (2.26) et substituons dans l'équation (2.26) la dérivée $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ par $\frac{(x_{i+1}-x_i)}{\Delta t}$; à partir de la, on obtient (3.16) où $x_i = x(i\Delta t)$, $y_i = y(i\Delta t)$, $u_i = u(i\Delta t)$, $F = I_n + \Delta t A$ et $G = \Delta t B$

3.4.2 Influence de la valeur du pas de discrétisation sur l'atteignabilité

Supposons que le système (2.26) est atteignable, sous quelles conditions le système (3.16) obtenu par discrétisation est-il aussi atteignable ? La matrice d'atteignabilité après discrétisation étant égale à,

$$R_n = [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = \tag{3.22}$$

$$= [\Delta t B, (I_n + \Delta t A)\Delta t B, \dots, (I_n + \Delta t A)^{n-1}\Delta t B] \tag{3.23}$$

Posons $h = \Delta t$ et formulons la condition pour qu'un système discrétisé soit atteignable une fois que le système à temps continu l'est. Nous caractérisons ceci par le théorème suivant,

Théorème 43 *Le système positif à temps discret (3.16) obtenu par discrétisation est atteignable au pas n si le système à temps continu est atteignable au pas n et de plus $h > 0$.*

Preuve. Supposons que (2.26) est atteignable au pas n , autrement dit, il existe une sous matrice monomiale de R_n . Or

$$R_n = [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = h[B, (I_n + h)A, \dots, (I_n + h)^{n-1}A^{n-1}B]$$

Dans ce cas $(I_n + h)A$ n'est monomiale que si $h > 0$. ■

3.5 Atteignabilité de systèmes linéaires positifs en temps discret avec retour d'état (state-feedback) :

L'atteignabilité et la contrôlabilité sont des concepts de base de la théorie de contrôle moderne. Il est bien connu que l'atteignabilité et la contrôlabilité des systèmes linéaires standards sont invariants sous retours d'états par contre elle ne le sont pas pour les systèmes linéaires standards positifs en temps discret [14]. Nous allons alors proposer une extension des résultats aux systèmes linéaires singuliers positifs en temps discret, autrement dit, montrons que si un modèle singulier positif n'est pas atteignable, il peut l'être sous un choix d'une matrice de gain par retour d'état (state feedback).

Supposons $m = 1$ et choisissons E , A et B tels que,

$$E = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline & a \end{array} \right) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, \quad (3.24)$$

où

$$a = [-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}]$$

A fin de ne peut pas encombrer les calculs, on préfère choisir,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5 \times 5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5 \times 5}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5 \times 1}$$

On a,

$$\det(Ez - A) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0),$$

par suite l'indice de nilpotence est $\mu = 1$, il s'ensuit alors,

$$[Ez - A]^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0)} \\ \frac{z}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0)} \\ \frac{z^2}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0)} \\ \frac{z^3}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0)} \\ \frac{z^4}{a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + (1 + a_0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=-1}^{\infty} \phi_i B z^{-(i+1)} =$$

$$\phi_{-1} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi_0 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ a_3 \end{pmatrix}, \phi_1 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a_3 \\ a_3^2 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\phi_2 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_3 \\ a_3^2 + a_2 \\ a_3^3 + 2a_3 a_2 + a_1 \end{pmatrix}, \phi_3 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_3^2 + a_2 \\ a_3^3 + 2a_3 a_2 + a_1 \\ a_3^4 + 3a_3^2 a_2 + 2a_3 a_1 + a_2^2 + a_0 \end{pmatrix},$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 & (\phi_{-1}B, \phi_0B, \phi_1B, \phi_2B, \phi_3B) = \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & a_3^2 + a_2 \\ 0 & 1 & a_3 & a_3^2 + a_2 & a_3^3 + 2a_3a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 & a_3^2 + a_2 & a_3^3 + 2a_3a_2 + a_1 & \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

est de rang égale à 5, par contre la condition 2/ n'est pas satisfaite si au moins l'un des $a_i \neq 0$, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Dans ce cas, le système n'est pas atteignable au pas 5. Considérons le système (3.1) avec le feedback d'état,

$$u_i = v_i + Kx_i \quad (3.25)$$

où $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et v_i est une nouvelle commande. Une substitution de (3.25) dans l'équation (3.1) donne,

$$Ex_{i+1} = A_K x_i + Bv_i \quad (3.26)$$

où,

$$A_K = A + BK \quad (3.27)$$

Choisissons K tel que,

$$K = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

La matrice (3.25) sera donc égale à

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \\
 & = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left(\phi_{-1}^K B, \phi_0^K B, \phi_{-2}^K B, \phi_{-3}^K B, \phi_{-4}^K B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui satisfait les deux conditions du théorème et la boucle fermée est atteignable au pas 5. Ceci se généralise si on considère les matrices E , A et B prise au début, dans ce cas la matrice de gain K sera choisie telle que,

$$K = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad (3.28)$$

et la matrice A_K aura la forme suivante,

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & & & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Ceci se résume dans le théorème suivant,

Théorème 44 *Supposons le système (3.1) non atteignable avec E, A, B définies par (3.24). Le système en boucle fermée (3.26) est atteignable au pas h si la matrice de gain par feedback sur l'état prend la forme (3.28).*

Corollaire 45 *L'atteignabilité du modèle positif singulier (3.1) avec les formes canoniques (3.24) n'est pas invariante sous feedback sur l'état.*

Remarque 46 *Dans cette section, nous avons exposé la notion d'atteignabilité par feedback d'état au modèle linéaire singulier positif en temps continu. Notons que nous avons considéré un cas très spécifique mais nous voudrions des conditions plus générales. On peut de même avoir des résultats similaires pour la contrôlabilité.*

Troisième partie

Systemes Linéaires Singuliers Positifs Bidimensionnel (2D)

Chapitre 4

Etude de quelques systèmes linéaires positifs à deux dimensions

4.1 Solvabilité de systèmes linéaires singuliers positifs à temps discret-continu

Une nouvelle classe de systèmes linéaires singuliers discret-continu à deux dimensions est introduite par T.Kaczorek [20], Fornasini-Marchesini [16], [17], J.Klamka [65], J.Kurek [18] ainsi que d'autres scientifiques. Dans les systèmes à deux dimensions discret-continu, l'une des variables indépendante est continue, la seconde est discrète. Ces systèmes trouvent leurs applications en biomathématiques, en économie et en électronique.

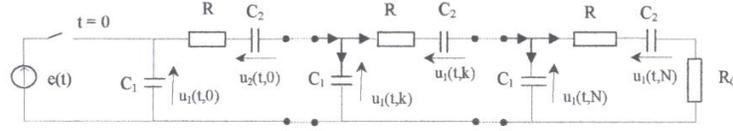


FIG. 4.1 – circuit RC bidimensionnelle

Exemple 47 *Considérons $(N + 1)$ circuits (à deux ports) tous connectés en séries, représenté par la figure (4.1) Etant donnée C_1, C_2 les capacités respectives de chaque condensateur ; la résistance R et connaissant les valeurs initiales des tensions au bords de chaque condensateur $u_1(0, k)$ et $u_2(0, k)$ pour $k = 0, 1, \dots, N$, la résistance R_0 et la source de voltage $e(t)$, on définit $u_1(t, k)$ et $u_2(t, k)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k = 0, 1, \dots, N$. Moyennant les lois de Kirchoff, on obtient les équations suivantes,*

$$C_1 \dot{u}_1(t, k + 1) + C_2 \dot{u}_2(t, k + 1) - C_2 \dot{u}_2(t, k) = 0, \quad (4.1)$$

$$u_1(t, k) - RC_2 \dot{u}_2(t, k) - u_2(t, k) - u_1(t, k + 1) = 0 \quad (4.2)$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k = 0, 1, \dots, N - 1$ et

$$e(t) = u_1(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.3)$$

$$u_1(t, N) - RC_2 \dot{u}_2(t, N) - u_2(t, N) - R_0 C_2 \dot{u}_2(t, N) = 0, \quad (4.4)$$

Définissons,

$$x(t, k) := \begin{bmatrix} u_1(t, k) \\ u_2(t, k) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

dans ce cas, on peut écrire les deux systèmes d'équations (4.1) à (4.4) sous la forme,

$$E \dot{x}(t, k + 1) + Ax(t, k + 1) + A_0 x(t, k) + A_1 \dot{x}(t, k) = f(t, k) \quad (4.6)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\dot{x}(t, k) := \frac{\partial x(t, k)}{\partial t}$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$, $x(0, k) = x_k$, pour $k = 0, 1, \dots, (N < \infty)$

$$Bx(t, 0) + Cx(t, N) + D\dot{x}(t, N) = f_1(t, 0, 1, \dots, N) \quad (4.7)$$

avec,

$$E = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -C_2 \\ 0 & -RC_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{R}C_2 \end{bmatrix}, \bar{R} = R + R_0, f_1(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}, f(t, k) = 0 \quad (4.10)$$

Dans cette section, nous étudions le problème de solvabilité et de positivité de systèmes linéaires singuliers discret-continu. Nous considérons alors le système suivant,

$$E\dot{x}(t, k+1) = A_0x(t, k) + A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k+1) + Bu(t, k), \quad (4.11)$$

$$y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \quad (4.12)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x(t, k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t, k) \in \mathbb{R}^m$ est la commande, $y(t, k) \in \mathbb{R}^p$ étant la sortie ; $E, A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_{p \times m}$.

Nous présentons dans cette section l'étude de la positivité après avoir traité le problème de solvabilité comme extension des résultats issus de [66].

4.1.1 Solution du Problème

Commençons par remarquer que le système (4.11) peut s'écrire sous la forme suivante,

$$E\dot{x}(t, k+1) = A_2x(t, k+1) + F(t, k), \quad (4.13)$$

$$y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \quad (4.14)$$

où,

$$F(t, k) := A_0x(t, k) + A_1\dot{x}(t, k) + Bu(t, k) \quad (4.15)$$

Nous savons qu'il existe deux matrices $n \times n$ non singulières P et Q tels que,

$$PEQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

($r < n$) où $r = \text{rang}E$. Multiplions alors (4.13) par P et introduisons un nouveau vecteur d'état

$$\bar{x}(t, k) = \begin{pmatrix} x_1(t, k) \\ x_2(t, k) \end{pmatrix} = P^{-1}x(t, k)$$

Il s'ensuit par suite,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t, k) \\ \dot{x}_2(t, k) \end{pmatrix} = \\ & = \left(\begin{array}{c|c} A_{2,1} & A_{2,2} \\ \hline A_{2,3} & -A_{2,4} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} x_1(t, k+1) \\ x_2(t, k+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(t, k) \\ F_2(t, k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où,

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} A_{2,1} & A_{2,2} \\ \hline A_{2,3} & -A_{2,4} \end{array} \right)$$

$$PF(t, k) := PA_0x(t, k) + PA_1\dot{x}(t, k) + PBu(t, k) := \begin{pmatrix} F_1(t, k) \\ F_2(t, k) \end{pmatrix}$$

avec $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, $A_{2,4}$, sont des matrices de dimensions appropriées.

$$F_1(t, k) := A_{0,1}x_1(t, k) + A_{1,1}\dot{x}_1(t, k) + A_{0,2}x_2(t, k) + A_{1,2}\dot{x}_2(t, k) + B_1u(t, k) \quad (4.16)$$

$$F_2(t, k) := A_{0,3}x_1(t, k) + A_{0,4}x_2(t, k) + A_{1,3}\dot{x}_1(t, k) + A_{1,4}\dot{x}_2(t, k) + B_1u(t, k) \quad (4.17)$$

Supposons que $\det A_{24} \neq 0$; il en découle alors,

$$\dot{x}_1(t, k+1) = Ax_1(t, k+1) + F_0(t, k), \quad (4.18)$$

où

$$A := A_{2,1} + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}A_{2,3}, \quad (4.19)$$

$$F_0(t, k) := F_1(t, k) + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}F_2(t, k), \quad (4.20)$$

Par itération sur k , nous pouvons donner la forme de la solution de l'équation (4.18), donc celle de l'équation (4.11). Soit alors, pour $k = 0$, nous obtenons l'équation suivante,

$$\dot{x}_1(t, 1) = Ax_1(t, 1) + F_0(t, 0), \quad (4.21)$$

où

$$\begin{aligned} F_0(t, 0) &:= F_1(t, 0) + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}F_2(t, 0) = \\ &= H_1x_1(t, 0) + H_2\dot{x}_1(t, 0) + H_3x_2(t, 0) + \\ &\quad H_4\dot{x}_2(t, 0) + (B_1 + B_2)u(t, 0) \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec,

$$H_1 = A_{0,1} + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}A_{0,3} \quad (4.23)$$

$$H_2 = A_{1,1} + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}A_{1,3} \quad (4.24)$$

$$H_3 = A_{0,2} + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}A_{0,4} \quad (4.25)$$

$$H_4 = A_{1,2} + A_{2,2}A_{2,4}^{-1}A_{1,4} \quad (4.26)$$

La solution de l'équation (4.21) est donnée par,

$$x_1(t, 1) = e^{At}x_1(0, 1) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F_0(\tau, 0)d\tau \quad (4.27)$$

d'où,

$$x_2(t, 1) = A_{2,4}^{-1}A_{2,3}e^{At}x_1(0, 1) + A_{2,4}^{-1}A_{2,3} \int_0^t e^{A(t-\tau)}F_0(\tau, 0)d\tau + A_{2,4}^{-1}F_2(t, 0) \quad (4.28)$$

Nous montrons donc que la solution du système (4.18) est de la forme,

$$x_1(t, i + 1) = e^{At}x_1(0, i + 1) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F_0(\tau, i)d\tau \quad (4.29)$$

par suite,

$$x_2(t, i + 1) = A_{2,4}^{-1}A_{2,3}e^{At}x_1(0, i + 1) + A_{2,4}^{-1}A_{2,3} \int_0^t e^{A(t-\tau)}F_0(\tau, i)d\tau + A_{2,4}^{-1}F_2(t, i) \quad (4.30)$$

avec,

$$F_0(t, i) := H_1x_1(t, i) + H_2x_1(t, i) + H_3x_2(t, i) + H_4x_2(t, i) + (B_1 + B_2)u(t, i) \quad (4.31)$$

$t \geq 0, i \geq 1$ et les $H_j, j = 1, 4$ sont définis ci-dessus.

Rappelons que dans [66], des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la solution du système (4.11) avec $E = I_n$ (cas standard) sont introduites. Nous avons donc étendu l'approche au cas singulier (4.11). Dans notre cas ceci n'est plus évident si la condition $\det A_{24} \neq 0$ n'est pas satisfaite. Le passage à l'équation (4.18) serait donc impossible. Dans le cas contraire, c'est à dire si les conditions ne sont pas vraies, d'autres approches seront exigées voir par exemple [67].

4.2 Etude de la positivité

Plusieurs résultats furent récemment obtenus concernant la positivité de modèles à deux dimensions [66], [68], [69] et [41]. Dans cette section, nous allons étudier la positivité du modèle (4.11). Des conditions nécessaires et suffisantes seront établies pour qu'un tel système soit positif. Pour cela, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la positivité.

Définition 48 *Le système (4.11) est dit **positif** si pour tout $x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall \dot{x}(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$ et $\forall x(0, k) \in \mathbb{R}_+^n$, $k \geq 0$ et $\forall u(t, k) \in \mathbb{R}_+^m$, l'état et la sortie sont tels que, $x(t, k) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(t, k) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Dans notre cas, si on suppose que la matrice A est de Metzler, la solution $x_1(t, 1)$ est positive ; il en est de même pour $x_2(t, 1) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$ si $A_{2,4}^{-1}A_{2,3} \in \mathbb{R}_+^{(n-r) \times r}$ et $A_{2,4}^{-1}F_2(t, 0) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$, par conséquent $\bar{x}(t, 1) \in \mathbb{R}_+^n$, on en déduit alors que $x(t, 1) \in \mathbb{R}_+^n$ et la sortie du système est telle que, $y(t, 1) \in \mathbb{R}_+^p$ si $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$, le système est donc positif.

Inversement, s'il est positif, $x(t, 1) \in \mathbb{R}_+^n$ et $y(t, 1) \in \mathbb{R}_+^p$ or,

$$\bar{x}(t, k) = P^{-1}x(t, k) \in \mathbb{R}_+^n \quad (4.32)$$

seulement si P est une matrice de permutation généralisée positive, il s'ensuit alors que A est une matrice de Metzler, tous les H_i sont positifs et

$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$. Supposons maintenant que $H_1 \in \mathbb{R}_+^{r \times r}$, $H_2 \in \mathbb{R}_+^{r \times (n-r)}$, $H_3, H_4 \in \mathbb{R}_+^{r \times (n-r)}$ et si $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $\begin{pmatrix} x_1(t, 0) \\ x_2(t, 0) \end{pmatrix} = P^{-1}x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, avec P une matrice

de permutation généralisée positive, $\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t, 0) \\ \dot{x}_2(t, 0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall u(t, 0) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, on a

alors, $F(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n$. Par induction, supposons que $x_1(t, i) \in \mathbb{R}_+^n$ et $F_0(t, i-1) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0, i \geq 1$ et montrons que $x_1(t, i+1) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \geq 0, i \geq 1$.

Pour cela il suffit de poser $k = i$ dans l'équation (4.13) ; nous obtenons dans ce cas une caractérisation de la positivité comme extension aux cas de systèmes singuliers discret-continu tout en donnant des conditions nécessaires pour que la solution de tels systèmes existe.

Théorème 49 *Le système (4.11) possède une unique solution positive si et seulement si,*

1. P est une matrice de permutation généralisée positive ;

2. A est une matrice de Metzler;
3. $\det A_{2,4} \neq 0$;
4. $H_1 \in \mathbb{R}_+^{r \times r}$, $H_2 \in \mathbb{R}_+^{r \times (n-r)}$, $H_3, H_4 \in \mathbb{R}_+^{r \times (n-r)}$, $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$;
5. $A_{2,4}^{-1} A_{2,3} \in \mathbb{R}_+^{(n-r) \times r}$, $A_{2,4}^{-1} F_2(t, 0) \in \mathbb{R}_+^{n-r}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

4.3 Influence de la valeur du pas de Discrétisation sur la Positivité de Modèles Linéaires à temps discret-continu

Récemment un grand développement sur la théorie de systèmes bidimensionnel a été introduit par [74], [66], [69] et [71]. L'analyse de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité interne, la positivité externe et la stabilité asymptotique de modèles linéaires à temps discret à une dimension obtenus par discrétisation à partir de modèles linéaires à temps continu a été développée par T. Kaczorek [20]. Dans ce dernier, il a été démontré qu'un modèle linéaire à temps discret est intérieurement positif si et seulement si le modèle à temps continu est aussi intérieurement positif si la valeur du pas de discrétisation est assez petite ; de même un modèle linéaire à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement si le modèle à temps continu est aussi asymptotiquement stable et la valeur du pas de discrétisation est assez petite. Dans ce qui suit, une relation entre la valeur du pas de discrétisation et la positivité de modèles linéaires à temps discret-continu à deux dimensions comme extension des résultats de T. Kaczorek [20] est proposée ; autrement dit, sous quelles conditions un modèle général à deux dimensions à temps discret obtenu par discrétisation à partir d'un modèle linéaire bidimensionnel à temps discret-continu peut être intérieurement (respectivement extérieurement) positif, si le modèle à deux dimensions à temps discret-continu est aussi intérieurement (respectivement extérieurement) positif. Pour cela, nous allons dans un premier temps donner les définitions de positivité interne et externe.

4.3.1 Modèles Linéaires à temps discret-continu-Trajectoire et Réponse impulsionnelle

Nous considérons alors le système linéaire à deux dimensions discret-continu suivant,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, j+1) &= A_0 x(t, j) + A_1 \dot{x}(t, j) + A_2 x(t, j+1) + B u(t, j), \\ y(t, j) &= C x(t, j) + D u(t, j) \end{aligned} \quad (4.33)$$

où

$$\dot{x}(t, j) = \frac{\partial x(t, j)}{\partial t}, \quad (4.34)$$

$x(t, j) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t, j) \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de commande, $y(t, j) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, 2$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Trajectoire d'état et Réponse impulsionnelle

Rappelons que la trajectoire d'état et la réponse de ce type de modèle est donnée dans [66] et [70] moyennant la 2D-Laplace-Z-transformation voir aussi [70]; dans cette sous section nous présentons la trajectoire d'état et la réponse du système d'après [66].

Trajectoire d'état

\implies Sous les conditions aux bords, la trajectoire d'état du système (4.33) est de la forme $x(t, j) = e^{A_2 t} x(0, j) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F(t, j-1) d\tau$, $t \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. (4.35) où $F(t, j)$ est donnée par

$$F(t, j) = P_t^j [A_0 x(t, 0) + A_1 \dot{x}(t, 0) + B u(t, 0)] + \sum_{i=0}^{j-1} P_t^{j-i-1} [A e^{A_2 t} x(0, i+1) + B u(t, i+1)] \quad (4.36)$$

et

$$P_t F(t) := A \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F(\tau) d\tau + A_1 F(t). \quad (4.37)$$

avec $A = A_0 + A_1 A_2$

Réponse impulsionnelle

Pour $x(t, 0) = 0$, $\dot{x}(t, 0) = 0$, $x(0, j) = 0$, $t \geq 0$, $j \geq 1$, $D = 0$ la trajectoire et la sortie du système deviennent

$$x(t, j) = \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F(t, j-1) d\tau, \quad t \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.38)$$

où

$$F(t, j) = \sum_{i=0}^{j-1} P_t^{j-i-1} B u(t, i+1), \quad (4.39)$$

$$y(t, j) = Cx(t, j) = \int_0^t Ce^{A_2(t-\tau)} F(t, j-1) d\tau, \quad t \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.40)$$

$$= \int_0^t Ce^{A_2(t-\tau)} \sum_{i=0}^{k-1} P_t^{j-i-2} Bu(t, i+1) \quad (4.41)$$

la réponse impulsionnelle est alors,

$$g(t, j) = Ce^{A_2 t} \sum_{i=0}^{k-1} P_t^{j-i-2} B, \quad (4.42)$$

Positivité interne

Définition 50 *Le système (4.33) est dit positif si pour toutes conditions aux bords $x(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, \dot{x}(t, 0) \in \mathbb{R}_+^n, t > 0$ et $x(0, j) \in \mathbb{R}_+^n, j \geq 1$ et tous les vecteurs de commandes $u(t, j) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+$, les vecteurs d'états et de sorties satisferont les conditions $x(t, j) \in \mathbb{R}_+^n, y(t, j) \in \mathbb{R}_+^p$, pour $t \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+$*

On commencera par rappeler deux caractérisations sur la positivité

Théorème 51 [66]

Le système (4.33) est positif si $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, A := A_0 + A_1 A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ et A_2 est une matrice de Metzler.

Remarque 52 [66]

Le système (4.33) est positif seulement si A_2 est une matrice de Metzler.

Définition 53 *Le système (4.33) est dit extérieurement positif si pour tout $u(t, j) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+$ et tout $x(t, 0) = 0, \dot{x}(t, 0) = 0, x(0, j) = 0, t \geq 0, j \geq 1$, le vecteur de sortie est tel que $y(t, j) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+$.*

4.3.2 Modèle général discret-Trajectoire et réponse impulsionnelle

Considérons maintenant le modèle général discret à deux dimensions [54] et [14], définis par,

$$x_{i+1, j+1} = A^{(1)} x_{i, j} + A^{(2)} x_{i+1, j} + A^{(3)} x_{i, j+1} + \hat{B} u_{i, j}, \quad (4.43)$$

$$y_{i, j} = C x_{i, j} + D u_{i, j} \quad (4.44)$$

où, $x_{i, j} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état local au points $i, j, u_{i, j} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y_{i, j} \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $A^k \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 0, 1, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}, x_{i, 0}, i \in \mathbb{Z}_+, x_{0, j}, j \in \mathbb{Z}_+$ sont les conditions aux bords.

Trajectoire d'état

Sous les conditions aux bords, la trajectoire d'état du modèle (4.43) est donnée par, pour plus de détails voir par exemple [18] et [41].

$$\begin{aligned}
x_{i,j} &= \theta_{i-1,j-1} \times (A^{(1)}, \hat{B}) \times \begin{pmatrix} x_{0,0} \\ u_{0,0} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^i \theta_{i-k,j-k} A^{(2)} x_{k,0} + \\
&+ \sum_{k=1}^i \theta_{i-k-1,j-1} \times (A^{(1)}, \hat{B}) \times \begin{pmatrix} x_{k,0} \\ u_{k,0} \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^j \theta_{i-1,j-m} A^{(3)} x_{0,m} + \\
&+ \sum_{m=1}^j \theta_{i-1,j-m-1} A^{(2)} x_{k,0} \times (A^{(1)}, \hat{B}) \times \begin{pmatrix} x_{0,m} \\ u_{0,m} \end{pmatrix} + \\
&+ \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j \theta_{i-k-1,j-m-1} \hat{B} u_{k,m}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

où,

$$\theta_{i+1,j+1} = A^{(1)}\theta_{i,j} + A^{(2)}\theta_{i+1,j} + A^{(3)}\theta_{i,j+1} \quad (4.45)$$

avec $\theta_{0,0} = I$ et $\theta_{-i,j} = \theta_{i,-j} = \theta_{-i,-j} = 0$.

Réponse impulsionnelle

Pour $x_{i,0} = 0, i = 0, 1, 2, \dots; x_{0,j} = 0, j = 1, 2, \dots$ et $D = 0$ nous obtenons,

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j \theta_{i-k-1,j-m-1} \hat{B} u_{k,m}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.46)$$

cependant, la sortie du système sera définie par,

$$y_{i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j C \theta_{i-k-1,j-m-1} \hat{B} u_{k,m} = \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j g_{i-k,j-m} u_{k,m}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+$$

$g_{i,j}$ est appelée **matrice de la réponse impulsionnelle** du système (4.43).

Positivité

Cette sous section expose les notions de positivité et de positivité externe pour des systèmes discret à deux dimensions de type (4.43). Nous nous basons sur [41] et [71] pour donner les caractérisations de positivité ; celles-ci nous permettent de voir si notre système maintient la positivité après avoir discrétiser le système (4.33). Nous définissons dans un premier temps la notion de positivité,

Définition 54 *Le système (4.43) est positif si pour tout $x_{0,j}, x_{i,0} \in \mathbb{R}_+^n$ et pour $u_{i,j} \in \mathbb{R}_+^m$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ les vecteurs d'états et de sorties vérifient les conditions suivantes : $x_{i,j} \in \mathbb{R}_+^n$ et $y_{i,j} \in \mathbb{R}_+^p$ pour $i, j \in \mathbb{Z}_+$.*

Nous énonçons cependant la caractérisation de positivité [72] et [18],

Théorème 55 *Le système (4.43) est positif si $A^{(1)} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A^{(2)} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $A^{(3)} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.*

Preuve. Par induction sur i, j . ■

Positivité externe

Définition 56 *Le système (4.43) est extérieurement positif si pour tout $u_{i,j} \in \mathbb{R}_+^m$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ et tout $x_{i,0} = 0$, $i \geq 1$, $x_{0,j} = 0$, $j \geq 1$ le vecteur de sortie est tel que, $y_{i,j} \in \mathbb{R}_+^p$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$.*

Une caractérisation de la positivité externe des systèmes discret à deux dimensions est donnée par le théorème suivant,

Théorème 57 *Le système (4.43) est extérieurement positif si la matrice de la réponse impulsionnelle est telle que $g_{i,j} \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$.*

Preuve. Supposons que pour certains $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $g_{i,j} < 0$ pour $h \leq i \leq r$, $p \leq j \leq q$ et $u_{i,j} > 0$ pour $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $g_{i,j} < 0$ et $u_{i,j} = 0$ ailleurs. Alors $y_{i,j} < 0$ ce qui contredit le fait que le modèle est extérieurement positif. Réciproquement, si $g_{i,j} \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ alors pour tout $u_{i,j} \in \mathbb{R}_+$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ la sortie du système est $y_{i,j} \in \mathbb{R}_+^p$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. ■

Remarque 58 1. *La aussi, il est aisément vérifié qu'un modèle positif est toujours extérieurement positif.*

2. *On montre aussi que pour un modèle de type (4.43) positif, la matrice de transition est $\theta_{i,j} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.*

Discrétisation : Principaux Résultats

Substituons dans (4.33) les dérivées $\dot{x}(t, k+1) = \frac{x_{i+1, k+1} - x_{i, k+1}}{\Delta t}$ et $\dot{x}(t, k) = \frac{x_{i+1, k} - x_{i, k}}{\Delta t}$ par suite, à partir de (4.33), en posant $h = \Delta t$, nous obtenons (4.43) avec,

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= hA_0 - A_1 \\ A^{(2)} &= A_1, \hat{B} = hB \\ A^{(3)} &= hA_2 + I_n \\ x_{i, k} &= x(ih, k), u_{i, k} = u(ih, k) \end{aligned}$$

Influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité interne et la positivité externe :

Problème :

Etant donné un modèle linéaire à deux dimensions à temps discret-continu (4.33) internement (respectivement externement) positif. Sous quelles conditions le modèle général linéaire discret à deux dimensions (4.43) obtenu par discrétisation à partir de (4.33) pourra t-il aussi être internement (respectivement externement) positif? Comme réponse au problème posé, nous énoncerons les deux théorèmes suivants comme extension des résultats de T.Kaczorek [20].

Théorème 59 *Le modèle général discret (4.43) est positif si le modèle à temps discret-continu (4.33) est positif et de plus les conditions suivantes sont satisfaites,*

1. $h \leq \frac{1}{\max_i |a_{ii}^{(2)}|}$, avec $i = 1, 2, \dots, n$ où $a_{ii}^{(2)}$ est le i ème coefficient diagonal négatif de $A^{(2)}$;
2. $hm_{ij} \geq l_{ij}$ avec $i, j = 1, 2, \dots, n$ où m_{ij} et l_{ij} sont les coefficients de A_0, A_1 respectifs.

Preuve. $A^{(3)} = hA_2 + I_n \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ si et seulement si la condition 1) est vérifiée du fait que A_2 est une matrice de Metzler. $A^{(1)} = hA_0 - A_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ si la condition 2) est satisfaite ; ce qui achève notre preuve. ■

4.4 Atteignabilité de systèmes linéaires positifs à 2D : Modèle de Fornasini-Marchesini

Le travail consiste à étendre les résultats obtenus dans [14] au modèle linéaire de Fornasini-Marchesini à deux dimensions, autrement dit, montrons que si un modèle positif n'est pas atteignable, il peut l'être sous retour d'état. Pour cela, considérons le modèle bidimensionnel dit de Fornasini-Marchesini qui est défini par l'équation suivante,

$$x_{i+1,j+1} = A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B_1 u_{i+1,j} + B_2 u_{i,j+1}, \quad (4.47)$$

$$y_{i,j} = C x_{i,j} \quad (4.48)$$

où, $x_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état local au points i, j , $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, 2, B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, i = 1, 2, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $x_{i,0}, i \in \mathbb{Z}_+, x_{0,j}, j \in \mathbb{Z}_+$ les conditions aux bords.

4.4.1 Trajectoire d'état

La trajectoire d'état du modèle de Fornasini-Marchesini est d'après [18]

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^i \theta_{i-k,j-1} \times (A_1, B_1) \times \begin{pmatrix} x_{k,0} \\ u_{k,0} \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^j \theta_{i-1,j-m} \times (A_2, B_2) \times \begin{pmatrix} x_{0,m} \\ u_{0,m} \end{pmatrix} \\ + \sum_{k=1}^i \sum_{m=1}^j [\theta_{i-k-1,j-m} B_1 + \theta_{i-k,j-m-1} B_2] u_{k,m}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

où, $\theta_{i,j}$ est appelée la matrice de transition du modèle (4.47) et vérifie la relation suivante,

$$\theta_{i,j} = A_1 \theta_{i,j-1} + A_2 \theta_{i-1,j} \quad (4.49)$$

avec $\theta_{0,0} = I$ et $\theta_{-i,j} = \theta_{i,-j} = \theta_{-i,-j} = 0$.

4.4.2 Condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité du modèle positif de Fornasini-Marchesini

Définition 60 *Le système (4.47) est dit **zéro-atteignable** aux points $(h,k), (h,k) \in \mathbb{Z}_+; h, k > 0$) si pour tout $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, il existe une suite de commandes $(u_{i,j})_{i,j} \subset \mathbb{R}_+^m, i, j \in D_{h,k}$ tel que $x_f = x_{hk}$, où*

$$D_{hk} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : 0 \leq i \leq h, 0 \leq j \leq k, i+j \neq h+k\}$$

Nous présentons par la suite, une parmi les caractérisations sur l'atteignabilité de systèmes à deux dimensions.

Théorème 61 *Le système (4.47) est zéro-atteignable au point (h, k) si et seulement si il existe une matrice de permutation généralisée positif (monomiale) R_n constituée de n colonnes linéairement indépendante de la matrice d'atteignabilité R_{hk} , où*

$$R_{hk} = [M_{h,k}, M_{h-1,k}, M_{h,k-1}, \dots, M_{0,1}, M_{1,0}] = [\theta_{h-1,k}B_1 + \theta_{h,k-1}B_2, \dots, B_2, B_1]$$

4.4.3 Atteignabilité du modèle positif de Fornasini-Marchesini avec retours d'état (state-feedbacks)

Afin de simplifier les notations, on supposera que $m = 1$ (système à une seule commande) et les matrices A_i et B_i , $i = 1, 2$ du modèle (4.47) positif possèdent les formes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (b_{m0}, \dots, \dots, b_{20}, b_{21}, b_{11}, b_{02}, b_{10}, b_{01}),$$

où $a_{i0} \geq 0$, $i = 0, \dots, m$ et $b_{j0} \geq 0$, $j = 0, \dots, m$. Considérons alors le cas $n = 4$, pour simplifier les calculs.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} & a_{10} & a_{01} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} & a_{10} & a_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dans ce cas, on obtient,

$$M_{01} = B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M_{10} = B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{20} = \theta_{10} B_1 = A_2 B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_{01} \\ 0 \end{pmatrix}, M_{02} = \theta_{01} B_2 = A_1 B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_{10} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = \theta_{01}B_1 + \theta_{10}B_2 = A_1B_1 + A_2B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \theta_{11}B_1 + \theta_{20}B_2 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ 0 \\ 0 \\ a_{01}^2 a_{10}^2 \\ a_{10} a_{01} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \theta_{01}B_1 + \theta_{11}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{10} \\ 1 \\ a_{01} a_{10} \\ a_{01} + a_{20} a_{10}^2 \end{pmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 2a_{01}a_{10} \\ a_{01}^2 + a_{10}^2 \\ a_{10}a_{01} \\ a_{02}a_{01} + a_{02}a_{01}^2 + 2a_{11}a_{10} + 4a_{10}^2a_{01} \\ a_{10}a_{01} + 2a_{10}a_{01}^2 + a_{20}a_{10} + a_{10}^3 \end{pmatrix}$$

par conséquent la matrice d'atteignabilité sera égale à,

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 2a_{01}a_{10} & 0 & a_{01} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{01}^2 + a_{10}^2 & a_{10} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10}a_{01} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_{01}a_{10} & a_{01}^2 a_{10}^2 & 0 & a_{01} & a_{10} & 1 & 0 \\ \beta & a_{01} + a_{20}a_{10}^2 & a_{10}a_{01} & a_{10} & 0 & a_{01} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha = a_{02}a_{01} + a_{02}a_{01}^2 + 2a_{11}a_{10} + 4a_{10}^2a_{01}, \quad \beta = a_{10}a_{01} + 2a_{10}a_{01}^2 + a_{20}a_{10} + a_{10}^3$$

Il est clair que si au moins l'un des coefficients a_{10} , a_{01} , a_{20} est non nul la condition du théorème (15) n'est pas satisfaite. Considérons alors le système (4.47) avec le feedback d'état,

$$u_{i,j} = v_{i,j} + Kx_{i,j}, \quad (4.50)$$

qui sera donc équivalent à,

$$x_{i+1,j+1} = A_{C_1}x_{i+1,j} + A_{C_2}x_{i,j+1} + B_1v_{i+1,j} + B_2v_{i,j+1}; \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.51)$$

où

$$A_{C_1} = A_1 + B_1K \quad (4.52)$$

$$A_{C_2} = A_2 + B_2K \quad (4.53)$$

Soit le système (4.47) avec les formes canoniques ci-dessus, non atteignable au point (2,2), nous allons donc montrer qu'il existe une matrice de gain par feedback tel que le système en boucle fermée (4.51) sera atteignable au point (2,2). Pour ce faire, on pose,

$$K = [-a_{20}, -a_{11}, -a_{02}, -a_{10}, -a_{01}] \quad (4.54)$$

Par conséquent, nous obtenons après calcul,

$$A_{C_1} = A_1 + B_1K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{C_2} = A_2 + B_2K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M}_{10} = B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_{01} = B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M}_{20} = \widetilde{\theta}_{10}B_1 = A_{C_2}B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_{02} = \widetilde{\theta}_{01}B_2 = A_{C_1}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M}_{21} = \widetilde{\theta}_{11}B_1 + \widetilde{\theta}_{20}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_{12} = \widetilde{\theta}_{02}B_1 + \widetilde{\theta}_{11}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{M}_{11} = \widetilde{\theta}_{01}B_1 + \widetilde{\theta}_{10}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_{22} = \widetilde{\theta}_{12}B_1 + \widetilde{\theta}_{21}B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

La matrice d'atteignabilité est donc égale à,

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Il existe par la suite,

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est rien d'autre que la matrice monomiale ; le modèle est par conséquent atteignable au point (2,2). La méthode est aussi valable pour une matrice $n \times n$ avec,

$$K = [-a_{m0}, \dots, -a_{0m}, \dots, -a_{02}, -a_{10}, -a_{01}] \quad (4.55)$$

Nous obtenons finalement le théorème suivant sur l'atteignabilité du modèle 2D positif de Fornasini-Marchesini avec retour d'état.

Théorème 62 *Le modèle positif de Fornasini-Marchesini (4.47) avec les formes canoniques ci-dessus est non atteignable au point (n_0, n_1) , par contre le modèle en boucle fermée (4.51) est atteignable au point (n_0, n_1) si la matrice de gain obtenue par retour d'état possède la forme (4.55).*

Nous pouvons énoncer le corollaire suivant,

Corollaire 63 *L'atteignabilité du modèle 2D positif de Fornasini-Marchesini (4.47) avec les formes canoniques ci-dessus est non-invariante sous le feedback d'état (4.50).*

Nous pouvons même avoir des conditions similaires pour la contrôlabilité.

4.5 Observabilité de systèmes linéaires positifs à deux dimensions à temps discret : Modèle de Roesser

Dans cette section, nous allons proposer une extension de résultat sur l'observabilité de (chapitre 1) et de [13]. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un modèle discret de Roesser soit observable seront établies. Pour cela, considérons le modèle discret de Roesser [74], [67] et [73] défini par les équations suivantes,

$$x_{i,j}^{(1)} = Ax_{i,j} + Bu_{i,j} \quad (4.56)$$

$$y_{i,j} = Cx_{i,j} + Du_{i,j} \quad (4.57)$$

$$x_{i,j}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^\nu \end{bmatrix}, x_{i,j} = \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^\nu \end{bmatrix}$$

où $x_{i,j}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$ est un vecteur d'état horizontal, $x_{i,j}^\nu \in \mathbb{R}^{n_2}$ est le vecteur d'état vertical, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande et $y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, C = (C_1, C_2),$$

avec $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_2}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$.

4.5.1 Trajectoire d'état

La trajectoire d'état du modèle discret de Roesser (4.56) est définie par,

$$x_{i,j} = x_{bc}(i, j) + \sum_{p,q \in D_{i,j}} M_{i-p,j-q} u_{p,q},$$

où

$$x_{bc}(i, j) = \sum_{p=0, \dots, i} T_{i-p,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{p0}^\nu \end{bmatrix} + T_{i,j-q} \begin{bmatrix} x_{0q}^h \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{i-p,j-q} := T_{i-p-1,j-q} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_{i-p,j-q-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$T_{ij} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i = j = 0 \\ T_{10}T_{i-1,j} + T_{01}T_{i,j-1} & \text{pour } i, j \geq 0 \text{ (} i + j \neq 0 \text{)} \\ T_{ij} = 0 & \text{pour } i < 0 \text{ ou/et } j < 0 \end{cases}$$

$$T_{10} := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_{01} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$D_{i,j} = (p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+, 0 \leq p \leq i; 0 \leq q \leq j, p + q = i + j$$

4.5.2 Observabilité du système discret de Roesser

Définition 64 *Le modèle (4.56) est dit observable si $y_{i,j} = 0, i, j \in \mathbb{Z}_+$ implique $x_{bc}(i, j) = 0, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$ pour $u_{i,j} = 0$.*

Si $u_{i,j} = 0$, alors l'équation représentant la sortie devient,

$$y_{i,j} = Cx_{i,j} = [M_h, M_\nu] x_{bc}(i, j),$$

où

$$M_h := [CT_{i,j}, CT_{i-1,j}, \dots, CT_{0,j}] \quad (4.58)$$

$$M_\nu := [CT_{i,j}, CT_{i,j-1}, \dots, CT_{i,0}] \quad (4.59)$$

$$x_{bc} := \begin{bmatrix} x_{bc}^h \\ x_{bc}^\nu \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

On énoncera alors le théorème,

Théorème 65 *Le modèle (4.56) est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{i,j} Ker [M_h, M_\nu] = 0.$$

Preuve.

1. Si $y_{i,j} = 0$, alors

$$x_{bc} \in Ker [M_h, M_\nu]$$

or pour tout $i, j \in \mathbb{Z}_+$,

$$Ker [M_h, M_\nu] = 0.$$

cependant $x_{bc}(i, j) = 0, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$; le modèle (4.56) est par conséquent observable.

2. Si on suppose que le modèle (4.56) est observable, alors pour $y_{i,j} = 0$, on a $x_{bc}(i, j) = 0, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$ et

$$Ker [M_h, M_\nu] = 0,$$

$\forall i, j \in \mathbb{Z}_+$

ce qui achève notre preuve. ■

Quatrième partie

Inégalités Matricielles Linéaires et
 \mathcal{D} -stabilité

Chapitre 5

Marge de stabilité et \mathcal{D} -stabilité de systèmes à espace d'état généralisé

5.1 Contexte et Motivation

Dans cette dernière partie de thèse, l'accent est mis sur le concept de marge de stabilité et de \mathcal{D} -stabilité robuste. La \mathcal{D} -stabilité correspond à l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région du plan complexe notée \mathcal{D} . Quelques formulations de régions sont rappelées. La propriété de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice généralise celle de la stabilité asymptotique des systèmes linéaires à temps invariants et permet de prendre en considération les performances transitoires du système. Des conditions nécessaires et suffisantes de \mathcal{D} -stabilité sont rappelées dans le cas nominal. Le chapitre se décompose de la façon suivante : après une définition et un bref historique concernant les problèmes IMLs qui veut dire Inégalités Matricielles Linéaires, en anglais : LMIs, Linear Matrix Inequalities. La définition de région IMLs et quelques exemples sont rappelés. Des conditions nécessaires et suffisantes de \mathcal{D} -stabilité obtenues par Chilali et Gahinet [32] sont cependant rappelées. Ces conditions décrivent une classe de régions convexes dans lesquelles les pôles s'en cloisonnent. Ces résultats sont formulés en termes de modèles à espace d'état généralisé pour le cas à temps continu et le cas à temps discret. Nous proposons également des essais modifiés en utilisant des inégalités matricielles linéaires IMLs de dimensions réduites. Ces prolongements ont l'avantage de réduire la complexité de l'approche et de rapporter des essais numériques plus fiables puisque la réduction à un modèle à espace d'état standard n'est plus exigée.

5.2 Systèmes linéaires à temps invariants LTI incertains

La modélisation des systèmes fait figure de passerelle entre la réalité et la théorie. En automatique, par exemple, un modèle mathématique représentant le plus fidèlement possible le système réel est nécessaire dans le but d'analyser ou de commander ce dernier. Pour cela on s'appuie sur les équations de la physique ou encore sur les techniques d'identification pour obtenir ce que l'on appelle un modèle nominal. Cependant, ce modèle est souvent obtenu au prix de nombreuses simplifications intervenant soit sur le modèle du système lui-même, soit sur l'influence de l'environnement sur ce même système. Le modèle nominal ne traduit donc pas avec précision le comportement dynamique du système. Il est souvent nécessaire de prendre en compte des incertitudes de modèle, images des différentes erreurs de modélisation introduites lors des simplifications. Dans cette partie, nous présentons une famille de modèles incertains qui considère des incertitudes dans l'espace d'état.

5.3 Modèles d'états incertains

Certaines incertitudes portant soit sur le modèle, soit sur son environnement, peuvent donc affecter le système. Les origines de ces incertitudes peuvent être multiples : méconnaissance de certains paramètres du système, dynamiques mal prises en compte, linéarisation des équations physiques,..... Toute fois, il est nécessaire de tenir compte de ces différents facteurs lors de la modélisation. En effet, si l'on souhaite commander le système, le calcul de la loi de commande doit permettre au système d'être le moins sensible possible à ces facteurs. L'incertitude dans l'espace d'état est liée aux méconnaissances ou aux variations de certains paramètres physiques. Elle peut également considérer la négligence de certaines dynamiques du système. Ce type d'incertitude est alors introduit dans le modèle d'état de telle sorte que la représentation d'état du système LTI incertain est :

$$\dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + B(\Delta)u(t), \quad (5.1)$$

$$y(t) = C(\Delta)x(t) + D(\Delta)u(t) \quad (5.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont toujours les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie alors que $\Delta \in \mathcal{D}$ représente le caractère incertain du système, cette incertitude pouvant appartenir à un ensemble \mathcal{D} . Le modèle incertain du système est alors défini

par :

$$G(\Delta) := \begin{bmatrix} A(\Delta) & B(\Delta) \\ C(\Delta) & D(\Delta) \end{bmatrix}$$

Remarque 66 La matrice $G(0)$ représente le modèle dépourvu d'incertitude, c'est à dire le modèle nominal.

5.4 Stabilité robuste

Les incertitudes présentées dans la partie précédente peuvent affecter le système au point que les propriétés qualitatives de ce dernier ne soient plus conservées. Ainsi, un système stable dans le cas nominal peut devenir instable lorsqu'il est soumis à des incertitudes. La stabilité robuste d'un système LTI peut être définie comme suit,

Définition 67 Le système dont le modèle incertain est donné par (5.1) est stable de manière robuste si et seulement si la stabilité est vérifiée pour l'ensemble des modèles incertains du système, c'est à dire quel que soit Δ pris dans l'ensemble \mathcal{D} .

Autrement dit, la stabilité robuste d'un système LTI est vérifiée si et seulement si l'ensemble des valeurs propres de la matrice d'état incertain $A(\Delta)$ est strictement contenu dans \mathbb{C}^- malgré les incertitudes sur le modèle.

Définition 68 Un système LTI incertain est \mathcal{D} -stable de manière robuste si et seulement si pour chaque réalisation $G(\Delta)$ telle que $\Delta \in \mathcal{D}$, la matrice $A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable.

5.5 Les formulations IMLs

Le terme IML (Inégalité Matricielle Linéaire), (LMI : Linear Matrix Inequality en anglais) est maintenant couramment employé dans la littérature liée à l'analyse ou à la commande des systèmes, voir [75], [64]. Nous rappelons néanmoins quelques notions IMLs.

Définition 69 Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une expression de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (5.3)$$

où $x = (x_i)$, $i = \overline{1, m}$ est un vecteur de nombres réels (variables de décisions) et (F_i) , $i = \overline{0, m}$, sont des matrices réelles symétriques i.e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = \overline{0, m}$.

Remarque 70 L'inégalité " \succ " dans (5.3) signifie "définie positive" c'est à dire $u^T F(x)u \succ 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur propre de $F(x)$ est positive.

Exemple 71 L'inégalité

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.4)$$

est une IML à deux variables. On peut alors l'écrire comme des IMLs :

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.5)$$

Exemple 72 Des IMLs simples dans le plan,

$$\begin{aligned} -y > x &\Rightarrow \\ & y - x \succ 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} -y > x^2 &\Rightarrow \\ & \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & y \end{bmatrix} \succ 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 < 1 &\Rightarrow \\ & \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

On note à ce propos que le qualificatif d'affine plutôt que linéaire serait sans doute approprié.

Définition 73 Une inégalité matricielle linéaire IML est une inégalité

$$F(x) \succ 0 \quad (5.9)$$

où F est une fonction affine d'un espace vectoriel de dimension fini \mathbb{V} vers un ensemble

$$\mathbb{S}^n := \{M/M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}_{n>0} \quad (5.10)$$

de matrices réelles symétriques.

Remarque 74 1. Le terme *inégalité matricielle linéaire* est utilisée dans la littérature sur les systèmes et contrôle, mais la terminologie n'est pas consistante avec l'expression $F(x) \succ 0$ que F n'est pas une fonction linéaire. Le terme *inégalité matricielle affine* peut mieux correspondre à la formulation.

2. Une IML non stricte est une IML telle que l'inégalité dans (5.9) est non stricte \succ et (5.9) est remplacée par $F(x) \succeq 0$. Les inégalités matricielles $F(x) \prec 0$ et $F(x) \prec G(x)$ où F, G étant des fonctions affines, sont des cas particuliers de (5.3) puisqu'elles peuvent être reformulées sous la forme IML :

$$-F(x) \succ 0 \tag{5.11}$$

$$G(x) - F(x) \succ 0. \tag{5.12}$$

On écrit toujours une IML sous la forme $F(x) \prec 0$ avec $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{S}^n$ une fonction affine. L'objectif est de trouver $x \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant l'inégalité. Ce choix de x est appelé **problème de fesabilité**.

5.6 Convexité

L'existence d'une solution à l'IML (5.3) définit un problème dit convexe car l'ensemble des solutions

$$S_{ol} = \{x \in \mathbb{R}^m / F(x) \succ 0\} \tag{5.13}$$

est convexe.

Preuve. On veut montrer que, $x_1, x_2 \in \mathbb{S}, \lambda \in [0, 1]$ implique

$$\lambda \times x_1 + (1 - \lambda) \times x_2 \in \mathbb{S} \tag{5.14}$$

F étant affine, alors,

$$F(\lambda \times x_1 + (1 - \lambda) \times x_2) = \lambda \times F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \succ 0. \tag{5.15}$$

■

5.7 Complément de Schur

Il s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles.

Lemme 75 *L'IML*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.16)$$

où $Q = Q^T$ et $R = R^T$ est équivalente à $R \succ 0$, $Q - SR^{-1}S^T \succ 0$, ou encore $Q \succ 0$, $R - SQ^{-1}S^T \succ 0$

Preuve. La preuve se fait facilement en multipliant (5.16) à droite par, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & R \end{bmatrix}$ et à gauche par la transformée de cette dernière matrice. On obtient alors,

$$\begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad \blacksquare$$

5.8 Propriétés

5.8.1 Intersection

Si

$$G(x) \succ 0 \quad (5.17)$$

$$H(x) \succ 0 \quad (5.18)$$

sont deux IMLs, alors,

$$\begin{bmatrix} G(x) & 0 \\ 0 & H(x) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.19)$$

est une IML.

On peut de même dire qu'un système de plusieurs IMLs est un ensemble fini d'IMLs

$$F_1(x) \succ 0, \dots, F_k(x) \succ 0 \quad (5.20)$$

et que (5.20) s'écrit sous une forme d'une simple IML

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_k(x) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.21)$$

l'inégalité a un sens puisque $F(x)$ est symétrique.

- L'ensemble des valeurs propres de $F(x)$ est simplement l'union de toutes les valeurs propres de $F_i(x)$, $i = \overline{1, k}$.
- Tout x vérifiant l'inégalité

$$F(x) \succ 0 \quad (5.22)$$

satisfait aussi le système d'IMLs (5.21) et vice versa.

5.8.2 Mise à échelle

Pour $\alpha \succ 0$, on a $G(x) \succ 0$ équivalent à $\alpha \times G(x) \succ 0$.

Pour terminer, on montre quelques applications de cette rubrique.

5.9 Applications

5.9.1 Optimisation

Nous rappelons d'abord, la définition d'une fonction convexe,

Définition 76 Une fonction $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si,

1. \mathbb{S} est convexe,
2. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ et $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (5.23)$$

Soit maintenant, $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ où on suppose

$$S = \{x / F(x) \succ 0\} \quad (5.24)$$

Le problème de la détermination du

$$V_{opt} = \inf_{x \in \mathbb{S}} f(x) \quad (5.25)$$

est appelé problème d'optimisation avec contraintes IML.

5.9.2 Problème de la valeur propre généralisée

Minimiser le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ sujet aux contraintes

$$\begin{cases} \lambda \times F(x) - G(x) \succ 0 \\ F(x) \succ 0 \\ G(x) \succ 0 \end{cases}$$

5.9.3 Stabilité de Lyapunov

Les IMLs ne se présentent pas directement sous la forme de l'inégalité présentée ci-dessus. Prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité de Lyapunov pour un système linéaire,

$$\dot{x} = Ax \tag{5.26}$$

Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T \succ 0$ de même dimensions que A telle que $A^T P + PA \prec 0$.

Considérons à titre d'exemple, le cas où A est une matrice 2×2 .

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

La matrice P dépend alors de trois paramètres $x_i, i = 1, 2, 3$ et peut s'écrire

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

La condition de positivité de P s'écrit,

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5.27}$$

5.10 Résolution

Afin de rendre les solvers d'IMLs [76] facilement utilisables pour les problèmes de l'automatique, des interfaces ont été développées permettant d'écrire les problèmes sous des formes matricielles simples. On peut citer "LMI-Tools" de El Ghaoui, la LMI Control Toolbox de Maths Works [77] et l'interface de SeDuMi développé au LAAS par Paucelle et Alli [78]. Notons aussi l'outil YALMIP qui permet de définir un problème LMI et de le résoudre avec n'importe quel solveur installé sur notre machine. Les trois problèmes classiques que ces outils résolvent sont :

1. La faisabilité (ou existence) ;
2. La minimisation d'une fonction linéaire ;
3. Le problème de la valeur propre généralisée.

5.11 Historique

On s'inspire de [64] pour donner un bref historique sur les IMLs.

Les IMLs sont, de nos jours, au coeur de tous les problèmes d'analyse et de commande des systèmes dynamiques. l'IML la plus célèbre en automatique, mentionnée ci-dessus, est celle qui résulte de l'application de la seconde méthode de Lyapunov [Lyapunov,1892] à la stabilité d'un système dont la présentation est $\dot{x} = Ax$.

On montre alors que le système est stable si et seulement s'il existe une matrice $P = P^T \succ 0$ telle que l'IML (également appelée inégalité de Lyapunov) suivante est vérifiée :

$$A^T P + P A \prec 0 \tag{5.28}$$

Jury et Ahn [Jury et Ahn,1974] montrent qu'il est possible de choisir sans restriction n'importe quelle matrice $Q = Q^T \succ 0$ et de résoudre l'équation linéaire suivante, dite de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q \tag{5.29}$$

Lyapunov est donc indirectement un précurseur au développement des IMLs même si l'intérêt véritable en fut ressenti bien plus tard [Willems,1971].

En 1940, Lur'e, Postnikov et d'autres scientifiques en union Soviétique exploitèrent la théorie de Lyapunov pour appliquer certaines théories de commande aux systèmes industriels à caractère non linéaire.

Les IMLs qui résultaient de ces problèmes de commande étaient alors résolus à la main, ce qui limitait leur application à des systèmes relativement simples (3-ème ordre maximum). Néanmoins, Lur'e et coauteurs étaient convaincus que des problèmes de commande plus compliqués pouvaient être résolus à l'aide des IMLs [Lur'e, 1957].

Dans le début des années 1960, Yakubovich Popov, Kalman ainsi que quelques autres auteurs, proposent des techniques graphiques pour résoudre des problèmes IML plus compliqués que ceux considérés par Lur'e. Ces techniques utilisent le lemme connu sous le nom de Lemme de positivité réelle. Au début des années 1970, Willems [Willems, 1971] montre que les IMLs considérées dans le lemme de positivité réelle peuvent non

seulement être résolues par des méthodes graphiques mais également en résolvant une certaine équation dite de Riccati.

Ceci constitue alors une quatrième méthode de résolution d'une IML (méthode analytique pour les systèmes simples, méthodes graphiques pour les systèmes plus compliqués, ou encore en résolvant les équations de Lyapunov ou de Riccati).

Willems mentionne dans le même article [Willems, 1971] qu'il serait intéressant de savoir s'il est possible d'exploiter les IMLs dans des algorithmes de calcul. Cette suggestion conduit certains chercheurs à l'observation suivante :

Les IMLs considérées dans la théorie de commande des systèmes peuvent être formulées sous la forme de problèmes d'optimisation convexe favorables à des méthodes de résolution utilisant des algorithmes de calcul. Suite à cette observation, Pyatnitskii et Skovodinskii [Pyatnitskii et Skovodinskii, 1982] réduisent en 1982 le problème original de Lur'e en un problème d'optimisation convexe considérant des IMLs. Ce problème fut alors résolu en utilisant des algorithmes ellipsoïdaux.

Depuis le début des années 1980, le développement de méthodes de résolution toujours plus performantes et efficaces, ne cesse de progresser. Parmi ces méthodes, on peut citer les méthodes dite de point intérieur développées par Yurii Nesterov et Arkadii Nemirovski [Y.Nesterov et A.Nemirovski, 1980] et qui sont toujours d'actualité ; pour plus de détails voir [48], [79] et [80].

5.12 Norme H_2 -Norme H_∞

Si on considère le système LTI suivant,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \quad (5.30)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \quad (5.31)$$

qui est un système LTI d'entrée w et sortie y qu'on peut représenté par la figure (5.1)

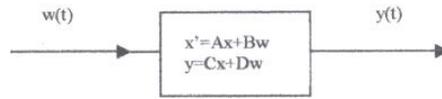


FIG. 5.1 – Boite noire

La matrice de transfert correspondant au transfert de w vers y est

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (5.32)$$

Nous rappelons alors les définitions des normes H_2 et H_∞ .

5.12.1 Norme H_2

Définition 77 La norme H_2 d'un système est

$$\|G(\cdot)\|_2 = \left[1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G^T(iw)G(iw))dw \right]^{1/2} \quad (5.33)$$

Dans le cas SISO (single-input single output), cette norme représente l'énergie totale en sortie du système lorsque l'on injecte une impulsion de Dirac en entrée.

5.12.2 Norme H_∞

Définition 78 Contrairement à la norme H_2 , cette norme correspond au plus grand transfert possible entre y et w , donc au gain maximal de la réponse fréquentielle $G(iw)$ et elle caractérise la plus grande puissance susceptible d'être transmise par le système ; elle est donc définie comme suit,

$$\|G(\cdot)\|_\infty = \text{Sup}_w \bar{\sigma}(G(iw)) \quad (5.34)$$

où σ représente la valeur singulière.

Nous rappelons les deux versions du lemme borné réel pour le cas de systèmes à temps continu et à temps discret.

Lemme borné réel 1

Lemme 79 Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état A , B , C et D a une norme H_∞ inférieure à γ s'il existe une matrice $Q = Q^T$ vérifiant,

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA + C^T C & QB + C^T D \\ B^T Q + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, Q \succ 0 \quad (5.35)$$

On peut appliquer le lemme borné réel pour le calcul de la norme H_∞ d'un système linéaire.

Lemme borné réel 2

Lemme 80 Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état A , B , C et D a une norme H_∞ inférieure à γ s'il existe une matrice $Q = Q^T$ vérifiant,

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA & QB & C^T \\ B^T Q & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, Q \succ 0 \quad (5.36)$$

Preuve. En appliquant le complément de Schur à la relation ci-dessus avec la décomposition,

$$Q = \begin{bmatrix} A^T Q + QA & QB \\ B^T Q & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$R = -\gamma I \quad (5.38)$$

$$S = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

et en multipliant par γ on obtient la première forme du lemme borné réel où la matrice de Lyapunov est γQ . Les deux formes sont bien équivalentes puisque $\gamma \succ 0$ ■ Pour le cas discret, le lemme borné réel est,

Lemme borné réel 2 cas discret

Lemme 81 *Un système dynamique discret linéaire de matrices d'état A , B , C et D a une norme H_∞ inférieure à γ s'il existe une matrice $Q = Q^T$ vérifiant,*

$$\begin{bmatrix} Q - A^T Q A & -A^T Q B & C^T \\ -B^T Q A & \gamma I - B^T Q B & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0, Q \succ 0 \quad (5.40)$$

5.13 Marge de stabilité pour des systèmes singuliers

Dans cette sous partie, on considère le système LTI singulier suivant,

$$\lambda E x(t) = A x(t) + B u(t), \quad (5.41)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (5.42)$$

où $E, A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ et $D \in R^{p \times m}$ sont des matrices données, $x(t)$ représente un vecteur d'état à n variables, $u(t)$ le vecteur à m commandes et $y(t)$ le vecteur à p sorties. L'opérateur λ représente l'opérateur différentiel de Laplace, si (5.41) est un système à temps continu et l'opérateur à retard z , si le système est à temps discret.

5.13.1 Minimalité

Quand on s'intéresse à la description mathématique d'un phénomène physique, on doit d'abord sélectionner un modèle parmi toutes les classes de modèles qui sont capables de décrire n'importe quelle trajectoire de sortie, quelles que soient les conditions initiales et les commandes externes, c'est à dire, toute trajectoire entrée-sortie possible du phénomène. Tous ces modèles qui décrivent le même comportement externe (entrée-sortie) sont appelés "extérieurement équivalents". Or la sélection d'une classe de modèles particulière dépend, évidemment, des intérêts particuliers, mais une fois cette sélection faite, il faut avoir un critère pour choisir la meilleure description dans la classe donnée. Dans la théorie des systèmes, le critère le plus souvent choisi pour ceci est précisément la minimalité. Le système (5.41) peut être décrit par sa fonction de transfert,

$$T(s) := D + C^T(sE - A)^{-1}B, s \in \mathbb{C} \quad (5.43)$$

Toute représentation de T de la forme (5.43) est appelé une **réalisation** de T . Nous proposons ainsi la définition de la minimalité,

Définition 82 Une réalisation, (5.43) de T est dite *minimale* si la dimension n des matrices A et E dans (5.43) est assez petite que possible. Des conditions de minimalité sont données dans [83], [29] et [81].

5.13.2 Marge de stabilité

Nous supposons que la réalisation ci-dessus est minimale et que le système en boucle fermé (E, A) est strictement stable, qui signifie que le problème de valeurs propres généralisées $\lambda E - A$ ait toutes ses valeurs propres dans un ensemble ouvert Γ du plan complexe, ce qui qui représente le demi-plan gauche ouvert pour des systèmes à temps continu et le disque unité ouvert pour des systèmes à temps discret. Ceci implique que la matrice E est non singulière puisqu'autrement le système aurait un pôle en $\lambda = \infty$ [30]. Si maintenant, on ferme la boucle avec

$$u = \Delta y \quad (5.44)$$

on obtient

$$\lambda E x(t) = A x(t) + B \Delta y(t), \quad (5.45)$$

$$y(t) = C x(t) + D \Delta y(t) \quad (5.46)$$

ou après élimination de $y(t)$,

$$\lambda E x(t) = A(\Delta) x(t) \quad (5.47)$$

$$A(\Delta) := [A + B(I_m - \Delta D)^{-1} \Delta C]. \quad (5.48)$$

Ceci provient de,

$(I_m - \Delta D)^{-1} \Delta = \Delta(I_p - D\Delta)^{-1}$ qui est facilement vérifiée par la relation, $\Delta(I_p - D\Delta) = (I_m - \Delta D)\Delta$. Nous proposerons des conditions garantissant la stricte stabilité du système en boucle fermée $(E, A(\Delta))$.

Pour cela, nous définissons le rayon de stabilité correspondant au système perturbé $(E, A(\Delta))$

Définition 83 *Le rayon de stabilité correspondant au système perturbé est la plus petite perturbation Δ servant à déstabiliser le système et est défini par,*

$$r_C(E, A, B, C, D) := \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : \det(\lambda E - A(\Delta)) = 0 \text{ possède des valeurs propres instables} \}_{\lambda \in \Gamma_c} \quad (5.49)$$

où la norme $\|\Delta\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2}$ mesure la perturbation complexe $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$.

Considérons la partition du plan complexe \mathbf{C} en deux ensembles disjoints Γ et Γ_c tel que Γ est un ensemble ouvert, autrement dit $\mathbf{C} = \Gamma \cup \Gamma_c$.

Définition 84 *Une matrice A est dite Γ -stable si son spectre $\Lambda(\cdot)$ est contenu dans Γ .*

Γ est appelée **région stable** et est égale au disque unité et au demi plan gauche du plan complexe (stabilité dans le cas discret et continu respectivement). Γ_c est appelée **région instable**.

Les valeurs propres sont des fonctions continues d'éléments du faisceau $\lambda E - A(\Delta)$, on perd alors la stabilité seulement dans le cas où l'une d'entre elles croise la frontière $\partial\Gamma$ de la région Γ . Une formulation équivalente du rayon de stabilité est alors mise en évidence et est donnée par,

Définition 85 *Le rayon de stabilité correspondant au système perturbé est la plus petite perturbation Δ servant à déstabiliser le système et est défini par,*

$$r_C(E, A, B, C, D) := \inf_{\lambda \in \partial\Gamma} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : \det[\lambda E - A(\Delta)] = 0 \} \right\}. \quad (5.50)$$

Ceci revient donc à tester si oui ou non

$$\det[\lambda E - A(\Delta)] = 0$$

ce qui est équivalent à tester si oui ou non

$$\det \begin{bmatrix} \lambda E - A & B \\ \Delta C & I_m - \Delta D \end{bmatrix} = 0 \quad (5.51)$$

$\lambda E - A(\Delta)$ étant le complément de Schur de (5.51) tout en respectant le faisceau $\lambda E - A$ qui est supposé non singulier dans la région considérée Γ et son bord $\partial\Gamma$. Notons que la condition (5.51) peut aussi être écrite comme suit,

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda E - A & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C & -D \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.52)$$

et puisque $\lambda E - A$ est inversible, ceci est équivalent à tester

$$\det \left(I_{n+m} + \begin{bmatrix} -(\lambda E - A)^{-1} B \\ I_m \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C & -D \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.53)$$

Du fait que $\det[I + ST] = 0$ implique $\det[I + TS] = 0$ pour certaines matrices conformes S et T , ceci donne alors,

$$\det[I_m - \Delta G(\lambda)] = 0, \quad G(\lambda) := C(\lambda E - A)^{-1} B + D. \quad (5.54)$$

On peut alors redéfinir le rayon de stabilité comme suit

Définition 86 *Le rayon de stabilité correspondant au système perturbé est la plus petite perturbation Δ servant à déstabiliser le système et est défini par,*

$$r_C(E, A, B, C, D) = \inf_{\lambda \in \partial\Gamma} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : \det[I_m - \Delta G(\lambda)] = 0 \} \right\}$$

Ceci étant alors égale à la dite norme H_∞ du système $G(\cdot)$

$$r_C(E, A, B, C, D) = \left[\sup_{\lambda \in \partial\Gamma} \|G(\lambda)\|_2 \right]^{-1} = \left[\|G(\cdot)\|_\infty \right]^{-1}. \quad (5.55)$$

Pour le cas de systèmes à temps continu, $\partial\Gamma = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, le rayon de stabilité se simplifie à :

$$r_C(E, A, B, C, D) := \left[\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(j\omega)\|_2 \right]^{-1}$$

et pour le cas des systèmes à temps discret,
 $\partial\Gamma = e^{j\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$, (5.55) se simplifie à,

$$r_C(E, A, B, C, D) := \left[\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(e^{j\omega})\|_2 \right]^{-1}.$$

Pour le cas $E = I_n$, ces formulations sont plutôt standard et nous les rappelons dans le théorème suivant, pour E donné arbitrairement.

Théorème 87 *Soit (E, A) un système en boucle ouverte strictement stable, alors la boucle fermée $(E, A(\Delta))$ est strictement stable si et seulement si $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$ satisfait*

$$\|\Delta\|_2 < \gamma_\star^{-1}, \quad \gamma_\star := \|G(\cdot)\|_\infty := \sup_{\lambda \in \partial\Gamma} \|G(\lambda)\|_2 \quad (5.56)$$

où $\partial\Gamma = j\mathbb{R}$ dans le cas continu et $\partial\Gamma = e^{j\mathbb{R}}$ dans le cas discret.

Nous précisons ici qu'en imposant la condition que Δ est réelle alors (5.56) devient seulement une condition suffisante pour la stabilité. Par contre, le théorème implique que la stabilité est garantie pour tout Δ réel ou complexe satisfaisant (5.56). Le calcul de γ_\star revient à construire des conditions sur le calcul de la borne $\sup\gamma$ de γ_\star . Un tel $\gamma > \gamma_\star$ doit satisfaire la condition,

$$G_\star(\lambda) G(\lambda) + \gamma^2 I_m \succ 0, \quad \forall \lambda \in \partial\Gamma$$

où $G_\star(\lambda)$ avec $\lambda \in \partial\Gamma$, signifie $G_\star(j\omega) := [G(-j\omega)]^T$ pour le cas à temps continu et $G_\star(e^{j\omega}) := [G(e^{-j\omega})]^T$ dans le cas à temps discret.

Il est bien connu [29] que pour le cas à temps continu, $\gamma \succ \gamma_\star \succeq 0$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} -E^T Y A - A^T Y E & -E^T Y B \\ -B^T Y E & \gamma^2 I_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \succ 0, \quad Y = Y^T \quad (5.57)$$

et pour le cas à temps discret, $\gamma \succ \gamma_\star \succeq 0$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} E^T Y E - A^T Y A & -A^T Y B \\ -B^T Y A & \gamma^2 I_m - B^T Y B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \succ 0, \quad Y = Y^T \quad (5.58)$$

Dans le cas de systèmes standards (i.e $E = I_n$) autres inégalités linéaires matricielles sont données dans [77] pour le cas à temps continu :

$$\begin{bmatrix} -X A - A^T X & -X B & C^T \\ -B^T X & \gamma I_m & D^T \\ C & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^T \quad (5.59)$$

et pour le cas à temps discret :

$$\begin{bmatrix} X - A^T X A & -A^T X B & C^T \\ -B^T X A & \gamma I_m - B^T X B & D^T \\ C & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, X = X^T \quad (5.60)$$

qui correspondent bien aux lemme borné réel 1 et 2 respectivement. Mais pour un E inversible, on peut écrire les conditions ci-dessus pour le modèle à espace d'état standard $\{E^{-1}A, E^{-1}B, C, D\}$. En remplaçant alors X par $E^T Y E$, on obtient finalement les conditions équivalentes suivantes pour le cas à temps continu :

$$\begin{bmatrix} -E^T Y A - A^T Y E & -E^T Y B & C^T \\ -B^T Y E & \gamma I_m & D^T \\ C & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, Y = Y^T \quad (5.61)$$

et pour le cas à temps discret :

$$\begin{bmatrix} E^T Y E - A^T Y A & -A^T Y B & C^T \\ -B^T Y A & \gamma I_m - B^T Y B & D^T \\ C & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, Y = Y^T \quad (5.62)$$

Nous précisons que la paire de conditions (5.57), (5.58) et (5.61), (5.62) sont essentiellement équivalente au lemme borné réel (bounded real lemma) et qu'ils peuvent également découler l'un de l'autre par l'intermédiaire de l'utilisation des compléments de Schur et des mises à échelles appropriées.

5.14 Régions IMLs et \mathcal{D} -stabilité nominale

Le choix des régions constitue un élément prépondérant dans l'analyse de la \mathcal{D} -stabilité. En effet, le comportement dynamique des systèmes LTI est étroitement lié à la localisation de ses pôles dans le plan complexe. Ces régions correspondent donc à des domaines prédéfinis dont la forme dépend des spécifications transitoires. Dans cette partie, les définitions des régions IMLs sont rappelées voir [32], [75] et [82]. Les conditions nécessaires et suffisantes de \mathcal{D} -stabilité d'une matrice complexe dans de telles régions sont également rappelées.

Nous rappelons des résultats relatifs à la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice complexe dans une région IML voir [32], pour étendre au cas des modèles à espace d'état généralisée.

5.14.1 Les régions IMLs

Dans cette partie, on propose un rappel de la définition d'une région IML avant de donner une condition nécessaire et suffisante d'appartenance des valeurs propres d'une matrice réelle dans une telle région [32].

Définition 88 Une région IML est un sous ensemble \mathcal{D} du plan complexe défini par :

$$D = \{z \in \mathbb{C} / D_0 + zD_1 + \bar{z}D_1^T \prec 0\}$$

où D_0 et D_1 sont des matrices réelles et $D_0^T = D_0$.

Quelques exemples de régions IMLs

- Demi-plan gauche $\Re(z) \prec \alpha : D_0 = -2\alpha, D_1 = 1,$
- Ellipse avec axes principaux $1/(\alpha + \omega - \beta) : D_0 = -I_2, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix},$
- Parabole $-\Re(z) \succ (\alpha \Im(z))^2 : D_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 2 \end{bmatrix}.$

Remarque 89 Une région IML est symétrique par rapport à l'axe réel puisque $f_D(z) = f_D'(z)$, elle est par ailleurs toujours convexe.

5.14.2 \mathcal{D} -stabilité nominale d'une matrice réelle

Nous rappelons maintenant un théorème relatif à la \mathcal{D} -stabilité d'une matrice complexe dans une région IML. Ce théorème est issu de [32] qui sera donc étendu au cas de système singulier avec E non singulière. Tout d'abord définissons la notion de \mathcal{D} -stabilité.

Définition 90 Un système est \mathcal{D} -stable si et seulement si toutes ses pôles sont encloisonnés dans la région IML \mathcal{D} .

Théorème 91 Soit \mathcal{D} une région IML. Une matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice symétrique X telle que l'IML suivante est satisfaite,

$$M_D(A, X) := D_0 \otimes (X) + D_1 \otimes (AX) + D_1^T \otimes (XA^T) \prec 0, \quad (5.63)$$

Preuve. Voir [32] ■

Notons que lorsque \mathcal{D} est le demi-plan gauche ($D_0 = 0$ et $D_1 = 1$), on retrouve la forme duale de l'inéquation classique donnée en correspondant à la seconde méthode de Lyapunov appliquée aux modèles linéaires pour l'étude de la stabilité des systèmes à temps continu. Il en est de même pour les modèles discrets lorsque \mathcal{D} est le disque unitaire, autrement dit lorsque $D_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, où l'on retrouve l'inéquation discrète de Lyapunov.

5.15 \mathcal{D} -stabilité de systèmes singuliers

Nous allons maintenant donner une première extension du théorème ci-dessus.

Théorème 92 *Le problème des valeurs propres $\lambda E - A$ avec E non singulière, est $m\mathcal{D}$ -stable s'il existe une matrice symétrique Y telle que,*

$$M_{\mathcal{D}}(Y) := D_0 \otimes (E^T Y E) + D_1 \otimes (E^T Y A) + D_1^T \otimes (A^T Y E) \prec 0, Y \succ 0 \quad (5.64)$$

Preuve. Ceci provient facilement de l'application des résultats de [32] au problème standard des valeurs propres $E^{-1}A$ et la substitution $X = E^T Y E$. ■

Supposons maintenant que $\lambda E - A$ est \mathcal{D} -stable. Nous allons chercher une condition suffisante garantissant la \mathcal{D} -stabilité de $\lambda E - A(\Delta)$. Comme précédemment, ce faisceau décrit les pôles de la matrice en boucle fermée (5.47). Par conséquent, nous avons besoin de vérifier que $\det [I - \Delta G(\lambda)] = 0$ pour $\lambda \in \mathcal{D}$ comme l'indique le théorème suivant,

Théorème 93 *Le problème de valeurs propres $\lambda E - A(\Delta)$ est strictement \mathcal{D} -stable si et seulement si $\|\Delta\|_2 < \gamma_{\mathcal{D}}^{-1}$ où $\gamma_{\mathcal{D}} := \|G(\cdot)\|_{\infty}^{\mathcal{D}} := \sup_{\lambda \in \partial \mathcal{D}} \|G(\lambda)\|_2$*

On s'intéresse à l'analyse de la robustesse d'une matrice incertaine $A(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{D}$, l'objectif est d'estimer le plus grand ensemble \cdot tel que $A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable quelque soit $\Delta \in \mathcal{D}$. Des conditions suffisantes peuvent être dérivées d'un résultat semblable à celui de Chilali et Gahinet [32], nous avons donc établi le théorème suivant,

Théorème 94 *Le faisceau $\lambda E - A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable pour tout Δ telle que $\|\Delta\|_2 < \gamma^{-1}$ s'il existe des matrices $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$ telle que*

$$\begin{bmatrix} M_{\mathcal{D}}(Y) & M_1^T \otimes E^T Y B & M_2^T P \otimes C^T \\ M_1 \otimes B^T Y E & -\gamma P \otimes I & P \otimes D^T \\ P M_2 \otimes C & P \otimes D & -\gamma P \otimes I \end{bmatrix} \prec 0, P \succ 0, Y \succ 0 \quad (5.65)$$

où $D_1 = M_1^T M_2$ est une factorisation avec M_1 et M_2 sont de rang plein égal à k .

Preuve. Ceci provient facilement de l'application du résultat de [77] à la réalisation d'espace d'état standard $\{E^{-1}A, E^{-1}B, C, D\}$ du système (4.22) et ensuite on substitue $X = E^T Y E$. ■

Nous proposons maintenant une nouvelle contrainte d'IML de petite taille.

Théorème 95 *Le faisceau $\lambda E - A(\Delta)$ est \mathcal{D} -stable pour tout Δ telle que $\|\Delta\|_2 < \gamma^{-1}$ s'il existe des matrices $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$ telle que $P \succ 0, Y \succ 0$ et*

$$\begin{bmatrix} M_{\mathcal{D}}(Y) & M_1^T \otimes E^T Y B \\ M_1 \otimes B^T Y E & -\gamma^2 P \otimes I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_2^T \otimes C^T \\ I \otimes D^T \end{bmatrix} P \otimes I \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I \otimes D \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.66)$$

Preuve. L'inégalité (5.66) est le complément de Schur de l'IML

$$\begin{bmatrix} M_{\mathcal{D}}(Y) & M_1^T \otimes E^T Y B & M_2^T P \otimes C^T \\ M_1 \otimes B^T Y E & -\gamma^2 P \otimes I & P \otimes D^T \\ P M_2 \otimes C & P \otimes D & -P \otimes I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.67)$$

en respectant le bloc défini négatif $-P \otimes I$. L'équation (5.67) est obtenue à partir de l'équation (5.65) en remplaçant P par γP et en divisant la dernière ligne et colonne par γ . Toutes les conditions sont donc équivalentes.

■

On termine cette section par quelques exemples.

Exemple 1. Le demi-plan pour un système à temps continu correspond à la région IML $D_0 + zD_1 + \bar{z}D_1^T \prec 0$ avec $D_0 = -2\alpha$, $D_1 = D_1^T = 1$. On peut alors choisir $M_1 = M_2 = 1$ et P devient un scalaire positif p . L'inégalité (5.65) se réduit à $Y = Y^T \succ 0$, $p > 0$ et

$$\begin{bmatrix} -2\alpha E^T Y E + E^T Y A + A^T Y E & E^T Y B \\ B^T Y E & -\gamma^2 p \otimes I \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} C^T \\ I \otimes D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & I \otimes D \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.68)$$

Notons que si on remplace Y par pY , choisissons $\alpha = 0$ et divisons par p , on retrouve alors l'inégalité (5.57) pour la stabilité robuste des systèmes à temps continu.

Exemple 2. Valeurs propres à l'intérieur d'une ellipse d'axes principaux $1/(\alpha \pm \beta)$ correspondent à la région IML $D_0 + zD_1 + \bar{z}D_1^T \prec 0$ avec $D_0 = -I_2$, $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$. Si on choisit $M_1^T = D_1$ et $M_2 = I_2$, l'inégalité (5.65) se réduit alors à $Y = Y^T \succ 0$, $P = P^T \succ 0$ et

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -E^T Y E & \alpha E^T Y A + \beta A^T Y E & 0 & \alpha E^T Y B \\ \beta E^T Y A + \alpha A^T Y E & -E^T Y E & \beta E^T Y B & 0 \\ 0 & \beta B^T Y E & -\gamma^2 P & 0 \\ \alpha B^T Y E & 0 & 0 & -\gamma^2 P \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} I_2 \otimes C^T \\ I_2 \otimes D^T \end{bmatrix} (P \otimes I) \begin{bmatrix} I_2 \otimes C & I_2 \otimes D \end{bmatrix} \prec 0.
\end{aligned}$$

5.16 Conclusion

Dans cette section, nous avons introduit des conditions suffisantes pour qu'un faisceau perturbé $\lambda E - A(\Delta)$ ait toutes ses valeurs propres dans une région \mathcal{D} décrite par une simple IML. Les conditions sont conservatives pour des perturbations réelles Δ mais elles sont strictes pour des perturbations complexes. Un problème ouvert est comment trouver des conditions nécessaires et suffisantes. Les conditions que nous avons développées sont des extensions des résultats issus de [32] aux modèles d'état généralisés. De tels modèles ont souvent l'avantage d'être plus clairsemés que les modèles à espace d'état standard. D'ailleurs, les conditions d'IMLs développées dans cette section sont de dimensions plus petites que ceux de [32] et devraient donc mener à des algorithmes plus rapides.

Chapitre 6

Commentaires finaux

6.1 Conclusion générale

L'étude que nous avons menée est organisée en deux grandes parties, d'une part, nous avons traité les systèmes singuliers positifs, en une et deux dimensions, et d'autre part de stabilité et de robustesse par rapport à une région convexe du plan complexe. Nous avons tout d'abord étudié la théorie générale de matrices particulières, qui permettent entre autre, de caractériser un système positif. Nous avons développé la théorie des systèmes positifs, aussi bien en temps continu qu'en temps discret. Lors de cet étude, nous avons notamment étudié le problème d'atteignabilité et de contrôlabilité pour des systèmes en temps continu. Nous avons analysé le problème d'observabilité tout en établissant des conditions nécessaires et suffisantes garantissant l'observabilité d'un système singulier positif en temps continu. Ces résultats sont une extension de ceux issue de [13]. Une analyse sur l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur l'atteignabilité des systèmes linéaires standards positifs a été introduite. Le principal objectif de ce problème est de maintenir les conditions d'atteignabilité pour le modèle discrétisé obtenu par discrétisation à partir d'un système linéaire positif à temps continu. Dans ce même contexte et bien que l'atteignabilité des systèmes standards est invariante sous retour d'état, elle ne l'est pas pour les systèmes standards positifs en temps discret voir [14]. Nous avons cependant établis une extension des résultats de [14] au cas des systèmes singuliers positifs en temps discret. Au moyen d'une matrice de gain par retour d'état, nous avons montré que l'atteignabilité est non invariante. Notons que le choix des matrices est très spécifique et que les résultats pourrait être étendu à un cas plus général. Nous remarquons de même que les résultats pourrait être appliqué à la contrôlabilité. Dans le cas discret, nous avons adapté les résultats garantissant la positivité obtenus dans le

cas continu ; de même une adaptation des résultats au cas discret sur l'atteignabilité et la contrôlabilité est donnée. Le chapitre 4 dans la partie II de la thèse a été consacré à quelques systèmes bidimensionnels positifs. Dans ce cas, nous nous sommes intéressés dans un premier temps au problème de solvabilité et de positivité de systèmes singuliers discret-continu qui est une extension, des résultats de [66]. Nous avons par la suite, étudié le problème de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité tout en étendant les résultats issus de [20]. Nous avons de même étudié le problème d'atteignabilité avec retour d'état ; dans ce contexte, nous avons montré qu'un modèle général bidimensionnel discret positif de Fornasini-Marchesini non atteignable, peut l'être sous un choix d'une matrice de gain par retour d'état (state-feedback). Le résultat est une extension de [20]. Pour terminer ce chapitre, une caractérisation sur l'observabilité du modèle discret de Roesser a été introduite comme extension de [13] et de [voir chapitre 3]. A travers la dernière partie de cette thèse, nous avons proposé des conditions nécessaires et suffisantes de \mathcal{D} -stabilité aux modèles singuliers comme prolongement des résultats de Chilali et Gahinet. D'autres prolongements à des modèles à espace d'état généralisée ont aussi été établis. Nous avons de même développé des conditions d'IMLs de plus petites tailles que ceux décrits dans [32]. Malgré ces développements, certains axes méritent des réflexions plus approfondies et les perspectives demeurent nombreuses.

Références personnelles

Quelques travaux réalisés pendant la période de doctorat seront listés maintenant

Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- BOUAGADA Djillali and T.KACZOREK " Quelques Résultats Récents sur les Systèmes Linéaires Positifs à 2D " Colloque International sur les Systèmes Dynamiques-Alger 2004.
- BOUAGADA Djillali and T. KACZOREK " Modèles différentiels linéaires positifs à deux dimensions atteignabilité et discrétisation " (Accepté au ECSYMAT06) UNIV.Es-senia oran. 20-22 Novembre .2006 ORAN- Algérie.
- Dj. BOUAGADA, " Solvabilité, Atteignabilité, Contrôlabilité et Observabilité des Systèmes Linéaires Singuliers Discret-Continus à deux Dimensions (2-D).2eme Conférence maghrébine sur les Equations Différentielles. Jijel, 15 - 17 Nov. 1998.
- Dj. BOUAGADA, " Relation between the value of discretisation step and positivity of linear 2D systems. " International Conference on Numerical Algorithms. Marrakesh, Morocco October 1-5, 2001.

- BOUAGADA Djillali, " Observability of positive 1D and 2D linear systems " III^{ème} Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique et ses Applications. Bé-jai 21-23 mai 2002.
- BOUAGADA Djillali, "Reachability of positive 2D Fornasini-Marchesini model" CIMASI2002. Casablanca 23-25 octobre , Maroc.
- BOUAGADA Djillali " Sur Quelques Systèmes Différentiels Linéaires Singuliers à 1D et 2D " Accepté pour communication orale au Congrès International MAMERN Oujda-Maroc les 9,10 et 11 mai 2005.

Congrès nationaux avec comité de lecture et actes

- Dj. BOUAGADA - H. HAMZAOUI, " Forme Réduite d'une Matrice et Application aux Equations Différentielles Implicites (Cas Discret et Continu), Colloque National en Analyse Fonctionnelle Appliquée, Sidi Bel Abbés, les 17, 18 et 19 Nov. 1997.
- Dj. BOUAGADA, " Solvabilité des Systèmes Linéaires Singuliers " 2^{ème} Journée Porte Ouverte sur la Recherche Scientifiques, Mostaganem, 15 - 16 Dec. 1998.
- Dj. BOUAGADA, " Sur une Résolution des Systèmes Linéaires Singuliers Discret-Continus à deux Dimensions (2-D.) Congres de Mathématiques 99. Annaba 17-18 et 19 mai 1999.
- Dj. BOUAGADA, " Solvabilité des Systèmes Linéaires Singuliers Positifs Discret-Continus à deux Dimensions (2-D) " 1^{er} Colloque National en Analyse et Application organise par le Département de Mathématiques, université de Mostaganem le 18/19/20 Octobre1999. (Poster).
- Dj. BOUAGADA, " Sur Les Systèmes Linéaires Singuliers et leur contrôle " Rencontre des Mathématiciens algériens (RMA) CNA2000. Alger, mai 2000.
- Dj. BOUAGADA, Atteignabilité et Contrôlabilité des Systèmes Linéaires Positifs avec et sans Retours d'états (Modèle de Fornasini-Marchesini). 3^{ème} CNAFA Ouargla 17-19 avril 2001.
- BOUAGADA Djillali " Systèmes Différentiels Linéaires Positifs à 2D " cnama 2004- JIJEL. Accepté pour communication orale.

Travaux publiés

- BOUAGADA Djillali and Paul Van DOOREN " Stability margins of generalized state space systems" AML journal (Elsevier Science) 19 (2006) 451-457.
- BOUAGADA Djillali , " Influence of the value of discretisation step on positivity of 2D linear continuous-discret systems. " F.E J. Math. Sci. mars 2004. Vol.15 (1). 107-112.

- Dj. BOUAGADA, H. Hamzaoui " Forme Réduite d'une Matrice et Application aux Equations Différentielles Implicites (Cas Discret et Continu), Publié dans Annale de Mathématiques N° 06 -1999. Univ. SBA. Algérie.

6.2 Perspectives

- De nombreuses questions et prochaines études restent ouvertes et à effectuer, comme
- l'étude de l'atteignabilité et la contrôlabilité pour le cas singulier sous retour d'état avec le choix de matrices plus générales.
 - l'étude de l'influence du pas de discrétisation sur l'atteignabilité et la contrôlabilité pour des systèmes singuliers.
 - D'autres études pour le cas bidimensionnel feront l'objet de nos investigations futures citons par exemple le problème de la robustesse.
-

Bibliographie

- [1] T.Kaczorek, Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX-SPETO : 33-41. 1997.
- [2] R.F.Brown, Biomedical systems analysis via compartmental concepts (Abacus Press, Tunbridge Wells, 1985).
- [3] R.B.Chase and N.J.Aquilano, Production and operations management (Irwin, Chicago, 1995).
- [4] D.G.Luenberger, Introduction to dynamic systems : Theory, Models and Applications (Academic Press, New york, 1976).
- [5] V.G. Rumchev and A.L. Konin, Decision support systems for manpower planning : Mathematical Models (Radio and Communication Press, Moscow, 1984), (in russian).
- [6] S.P. Sethi and G.L. Thompson, Optimal control theory : Applications to Management Science (Matrinus Nijoff, Boston, 1981).
- [7] F. Szidarovsky and A.T. Bahill, Linear systems theory (CRC Press, London, 1992).
- [8] T.E. Vollman et al., Manufacturing planning and control systems (Irwin, IL, 1992).
- [9] L.Cacceta and V.G. Rumchev, A Survey of reachability and controllability for positive linear systems, Annals of Operation Research 98, 101-122, 2000.
- [10] Jan H. Van Schuppen, Control and system theory of positive systems, version feb.13, 2007.
- [11] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002. 431 pages.
- [12] L.Farina, S.Rinaldi, Positive linear systems : Theory and Applications, Wiley, New York, 2000.
- [13] T.Kaczorek, Positive descriptor discrete-time linear systems, Iternational Journal, Prob. of Nonlin. Analys. in Engineering systems 1 (7), 1998.

- [14] T.Kaczorek, Reachability and Controllability of positive linear systems with state feedbacks, Bull. Pol. Acad. of Sci. Technical Sciences Vol 47 Nř1, 1999, pp. 67-73.
- [15] P.R. Roesser, A Discrete state-space model for linear image processing, IEEE, Trans. Automat. Control Vol. AC-20, Nř1, 1975, pp. 1-10.
- [16] E.Fornasini, G. Marchesini, State-space realization of two dimensional filters, IEEE Trans. Autom. Control, AC-21, 1976, pp. 484-491.
- [17] E.Fornasini, G. Marchesini, Doubly indexed dynamical systems : state-space models and structural Properties, Math. Syst. Theory 12, 1978. (59-72).
- [18] J. Kurek, The General state-space model for a two-dimensional linear digital systems, IEEE, Trans. Autom. Contr., Vol AC-30 Nř6, pp. 600-601.
- [19] T. Kaczorek, Minimum energy control for general model of 2D linear systems, Int. J. Control, Vol47, Nř5, pp.1555-1562.
- [20] T.Kaczorek, Relationship between the value of discretization step and positivity and stability of linear dynamic systems, Miedzynarodowa Konferencja "Simulation, Designing and Control of Foundry Processes", FOCOMP'99. Krakow, 25-26. 11.99, pp. 33-40.
- [21] Y. Nesterov and A. Nemirovski, Interior-point polynomial methods in convex programming, SIAM. J. 1994.
- [22] Paul Van Dooren, Vincent Vermaut, On stability radii of generalized eigenvalue problems, Proceeding European Control Conf. 1997.
- [23] Y.Genin, R.Stefan and P.Van Dooren, Real and complex stability radii of polynomial matrices, Lin. Alg. Appl., 381-410, 2002.
- [24] D. Hinrichsen, A.J. Pritchard, Mathematical systems theory I, modelling, state-space analysis, stability and robustness, Texts in Applied Mathematicq 48, Springer, Berlin, Heidelberg, New york, 805 pages, (2005).
- [25] N.K.Son and D.Hinrichsen, Stability radii of positive discrete-time systems, Proc. Third International Conference on approximation and optimization, Puebla, Mexico 1-13.
- [26] N.K.Son and D.Hinrichsen, Robust stability of positive continuous-time systems, Numer.Funct. Anal. Optim. 17, (1996), pp. 649-659.
- [27] J. Sreedhar, P. Van Dooren and A.L. Tits, A Fast algorithm to compute the real structured stability radius, Proceedings Century Conference (Ticino, Switzerland, may 21-26, 1995) pp. 219-230, Birkhäuser, Verlag, 1996.
- [28] G.Verghese, P.Van Dooren and T.Kailath, Properties of the system matrix of a generalized state-space system, Int. J. Control, 1979, vol30, Nř2, 235-243.

- [29] Y.Genin, Y.Hachez, Y.Nesterov, R.Stefan, P.Van Dooren, S.Xu, Positivity and linear matrix inequalities, *European J. Control* 8 (3),(2002), pp. 275-298.
- [30] Paul Van Dooren, The Generalized eigenstructure problem in linear system theory, *IEEE, Trans. Automat. Control* 26 (1) 1981.
- [31] M.Chilali and P.Gahinet, H_∞ Design with pole placement constraints : An LMI approach, *IEEE, Trans. Automat. Control* Vol 41, Nř3 mars 1996, pp. 358-367.
- [32] M.Chilali, P.Gahinet and P.Apkarian, Robust pole placement in LMI regions, *IEEE, Trans. Automat. Control* 44, (22) (1999), pp. 2257-2270.
- [33] R.B.Bapat, T.E.S.Raghavan, Nonnégative matrices and applications, *Encyclopédia of mathematics and its applications* 64, Cambridge University press,1977.
- [34] A.Berman, M.Neumann, R.J.Stern, Nonnegative matrices in dynamic systems, John Wiley and Sons, 1989.
- [35] A.Berman, R.J.Plemmons, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press 1979.
- [36] R.A.Horn, C.R.Johnson, Matrix analysis, Cambridge University, Press, 1985.
- [37] R.A.Horn, C.R.Johnson, Topics in matrix analysis, Cambridge University, Press, 1991.
- [38] A.Berman, R.J.Plemmons, Inverses of nonnegative matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, vol.2, pp.161-172, 1974.
- [39] P.Lancaster, M.Tismenetsky, The theory of matrices, Second Edition with Applications, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1985.
- [40] M.Neumann, R.J.Plemmons, Generalized inverse-positivity and splittings of M-matrices, *Linear Algebra and its Applications*, Nř23, pp. 21-35. 1979.
- [41] T. Kaczorek, Some recent developpments in positive 2D systems, Springer Verlag, Heidelberg.
- [42] H.Mink, Nonnegative matrices, Wiley Interscience Series in Discrete Time Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, 1986. 206 pages.
- [43] A.Graham, Kronecker Product and matrix calculus with applications. Chichester, U.K. : Ellis Horwood, 1981.
- [44] W.Fei, Some problems on linear preservers, Undergraduate research opportunity, Programme in science, supervisor : Dr.Victor Tan, Département de Mathématiques de Singapour, 2002/2003.
- [45] R.J.Plemmons, R.E.Cline, The generalized inverse of nonnegative matrix, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol31, Nř1, Janvier 1972.

- [46] F.L. Lewis, Descriptor systems : Decomposition into forward and backward subsystems IEEE, Trans. Automat. Control 29 : (1984), pp. 167-170.
- [47] D. Cobb, Singular control systems (Lecture Note in Control and Information Sciences) Springer-Verlag, 1989.
- [48] Yurii Nesterov, Interior-point method : An old and new approach to non linear programming, M. Prog. 79 : 285-297, (1997).
- [49] F.L. Lewis and B.G. Mertzios, On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems, IEEE, Trans. Automat. Control Vol35, Nř4, April 1990.
- [50] B.G.Mertzios and F.L.Lewis, Fundamental matrix of discrete singular systems. Circuits syst., signal processing, 8 (3) 341-355, 1989.
- [51] N.J. Rose, The laurent expansion of generalized resolvent with some applications, SIAM J. Appl. Math. Anal., Vol.9, pp. 751-758, Aug. 1978.
- [52] F.L. Lewis, Adjoint matrix, Cayley-Hamilton theorem and Fadeev's method for the matrix pencil $(sE - A)$, in Proc. 22nd IEEE, Conf. Decision Control, San Antonio, TX, 1983, pp.1282-1288.
- [53] C.E. Langenhop, Controllability and stabilization of regular singular linear systems with constant coefficients, Dept. Math., Southern Illinois Univ., Carbondale, Dec.6, 1979.
- [54] T. Kaczorek, Reachability and controllability of weakly positive singular discrete linear systems, Problemy automatyki i informayki, Pol. Akad. N. pp. 101-113.
- [55] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr. and N.J.Rose, Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. App. Math., Vol.31, pp. 411-425, Nov.1976.
- [56] T.Kaczorek, Weakly positive continuous-time linear systems, Bull. Pol. Acd. of Sci. Technical Sciences Vol 46 N2, 1998, pp. 233-245.
- [57] T.Kaczorek, Standard and singular 1D and 2D positive linear systems, CD SPA 2000.
- [58] T.Kaczorek, Externally and internally positive singular discrete-time linear systems, Int. J. App. Math. Comput. Sci., 2002, vol 12, N2, pp 197-202.
- [59] A.Banaszuk, M.Kociecki, Observability with unknown input and dual properties for singular systems, J.C.Baltzer A.G. Scientific Publishing Co, IMACS, 1991, pp. 125-129.
- [60] D.Cobb, Controllability, observability and duality in singular systems, IEEE. Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, N12, 1984, pp. 1076-1082.

- [61] C.E. Langenhop, The Laurent expansion for a nearly singular matrix, *Linear Algebra Appl.*, Vol,4, pp. 329-340, 1971.
- [62] M.P.Fanti, B.Maione and B.Turchiano, Controllability of multi-input positive discrete-time systems, *Int.J.Control*, 1990, Vol 51, N6, pp. 1295-1308.
- [63] M.P.Fanti, B.Maione and B.Turchiano, Controllability of single-input positive discrete-time systems, *Int.J.Control*, 1989, Vol 50, N6, pp. 2523-2542.
- [64] S.Boyd, L.El Ghaoui, E.Feron and V.Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Studies in Applied Mathematics, 15, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
- [65] J.Klamka, *Controllability of dynamical systems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1999.
- [66] T. Kaczorek, Positive 2D Linear Systems, 9th International Symposium on system modelling control, Zakopane, 27.04.-1.05.1998, pp. 50-57.
- [67] T. Kaczorek, Singular two-dimensional continuous-discrete linear systems, *Advances in systems science and applications*, (Inauguration issue), 1995, pp. 103-108.
- [68] Valcher M.E., Fornasini E., State models and asymptotic behaviour of 2D positive systems, *IMA Journal of mathematical control and information*, N12, 1995, PP. 17-36.
- [69] Fornasini E., Valcher M.E., Recent developments in 2D positive system theory, *Applied mathematics and computer science*, Vol.7, Nř4, 1997, pp. 713-736.
- [70] Yang Xiao and Moon Ho Lee, 2D Laplace-Z Transformation, *IEICE, Trans. Fundamentals*, Vol. E89-A, N5 May 2006.
- [71] T. Kaczorek, *Two dimensional linear systems*, Springer Verlag, Berlin, New york, Tokyo, (1985).
- [72] T. Kaczorek, *Polynomial and rational matrices, Applications in dynamical systems theory 2006*, Springer Verlag, London, 2006.
- [73] T. Kaczorek, Externally positive 2D linear systems, *Bull. Ac. Sci. Tech. Sci.* Vol.47, N3, 1999.
- [74] F.L. Lewis, A review of 2D implicit systems, *Automatica*, Vol. 28 N2, pp. 345-354, 1992.
- [75] Carsten Scherer and Siep Weiland, *Lecture notes on DISC, Course on linear matrix inequalities in control*, Univ. Delft (Pays -Bas) version nov. 2004.
- [76] Didier Henrion, *Course on LMI Optimization with applications in control, PartI.4 "Solving LMIs"* Nov 2003.

- [77] P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M.Chilali, LMI Control Toolbox, The Math Woks Inc., 1995.
- [78] D.Peaucelle, D.Henrion, Y.Labit and K.Taitz, User's guide for SeDuMi Interface, LAAS-CNRS, 2002.
- [79] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovski, Interior-point polynomial algorithms in convex programming studies in applied and numerical mathematics, Jul. 1980, (Nouvelle version 1995).
- [80] Yurii Nesterov and Arkadii Nemirovski, An interior-point for generalized linear functional programming, Math. Programm. 69 : 177-204 (1995).
- [81] Roland W.Freund and Florian Jarre, An Extension of the Positive Real Lemma to Descriptor Systems, Optimization methods and Software, Vol.19, N1, February 2004.
- [82] Didier Henrion, Denis Arzelier, LMIs in systems control state-space methods, stability analysis, Course on LMI optimization with applications in control. Part II.1 mai 2004.
- [83] L.Dai, Singular Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 118, Springer-Verlag 333 pages.