Universidade do Algarve

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Geometria Simpléctica

Pedro Vaz

Conteúdo

1 Introdução

A geometria simpléctica fornece, desde sempre, a linguagem adequada para a mecânica hamiltoniana. No entanto, os desenvolvimentos das últimas décadas permitiram-lhe conquistar uma identidade própria que a coloca ao lado da geometria riemanniana tradicional, com interacções importantes com áreas como sistemas dinâmicos, física-matemática,topologia de baixas dimensões, teoria das representações, equações diferenciais parciais, geometria algébrica, etc..., além de fornecer uma base matemática para a quantização geométrica.

A ideia que está na base da geometria simpléctica é matematicamente simples, é basicamente a geometria das variedades equipadas com uma 2-forma que satisfaz uma condição algébrica (é não degenerada) e uma condição analítica (é fechada). O facto de se estudar uma forma bilinear antissimétrica em vez de uma forma simétrica provoca uma grande mudança relativamente à geometria riemanniana, onde se estudam as variedades equipadas com uma forma bilinear simétrica. Pode pensar-se nessa 2-forma como um tipo de "produto interno antissimétrico". Essa antissimetria tem efeitos radicais pois não nos são permitidas medidas unidimensionais. Assim, a geometria simpléctica é essencialmente uma geometria bidimensional.

Estas notas traduzem o conteúdo de dois seminários, de 90 minutos cada um, dados na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve em Fevereiro de 2003, que pretendiam fornecer uma introdução à geometria simpléctica e às suas aplicações.

Dada a grande quantidade de assuntos a tratar numa primeira abordagem a esta área, este documento contém mais material do que o efectivamente apresentado. Foram tratados assuntos como a álgebra linear simpléctica, variedades simplécticas, órbitas coadjuntas dos grupos de Lie e sistemas Hamiltonianos.

Começa-se pelo tópico de álgebra linear simpléctica pelo facto de que qualquer variedade simpléctica se parece localmente com um espaço linear simpléctico em que a forma simpléctica corresponde à forma simpléctica standard num espaço linear simpléctico. Assim, todas as variedades simplécticas são localmente parecidas, o que significa que as variedades simplécticas não têm invariantes locais que as distingam. Estas variedades têm que ser distinguidas por propriedades globais. O ponto central desta secção é a prova do teorema de Darboux, que nos diz que podemos escolher coordenadas onde a forma simpléctica tem uma expressão canónica, o que também serve de suporte para o acima exposto.

Após o tratamento geral das variedades simplécticas é apresentada uma classe muito especial de variedades simplécticas, o fibrado cotangente, que tem uma estrutura simpléctica muito natural. Além de se parecer localmente com um espaço linear simpléctico, toda a variedade simpléctica é parecida localmente a um fibrado cotangente com dimensão adequada. No entanto, um fibrado cotangente tem mais estrutura que uma variedade simpléctica, em todo o fibrado cotangente existe uma 1-forma, globalmente definida, cuja derivada exterior corresponde à estrutura simpléctica. Nem toda a variedade simpléctica tem esta propriedade, pois nem sempre a 2-forma que define a estrutura simpléctica é exacta (numa variedade compacta essa forma não pode ser exacta de maneira alguma!).

Depois começam as aplicações, são tratadas as órbitas coadjuntas dos grupos de Lie e os sistemas hamiltonianos. As órbitas coadjuntas dos grupos de Lie têm uma estrutura de variedade simpléctica (Kirillov, Konstant e Souriau) e são uma base matemática para a quantização geométrica. Este tópico contém material abstracto onde se introduzem conceitos e se provam propriedades importantes, mas foi inteiramente apresentado através do exemplo de $SU(2)$. No que refere aos sistemas Hamiltonianos, faz-se apenas uma introdução aos campos vectoriais hamiltonianos, onde se introduzem os conceitos de campo vectorial hamiltoniano e campo vectorial simpléctico, prova-se que o fluxo de um campo vectorial hamiltoniano preserva a forma simpléctica e a função que origina o campo vectorial e calcula-se a expressão para esse campo em coordenadas locais. Depois faz-se uma breve ligação à mecânica e aos sistemas dinâmicos com a introdução dos parêntesis de Poisson, variedades de Poisson, álgebras de Poisson e sistemas integráveis.

Pedro Vaz

2 Álgebra Linear Simpléctica

2.1 Espaço Linear Simpléctico

Definição 2.1. *Um espaço linear simpléctico (V, ω) é um espaço linear V com uma forma bilinear antissimétrica ω que é não-degenerada.*

⋆

Observação: Não degenerada significa que $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ define um isomorfismo

$$\omega_v : V \to V^*$$

ou, equivalentemente,

$$\omega(u, v) = 0 \ \forall v \Rightarrow u = 0,$$

ou ainda

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n} \neq 0.$$

Exemplo 2.1. Se U é um espaço linear, $U \oplus U^*$ contém uma *estrutura simpléctica canónica* ω_0 definida por

$$\omega_0((u, u^*), (v, v^*)) = v^*(u) - u^*(v).$$

◇

O lema seguinte fornece uma forma normal para um espaço linear simpléctico.

Lema 2.1. *(Base Simpléctica) Todo o espaço linear simpléctico $V, \omega)$ possui uma base simplética*[1] $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ *tal que*

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$$

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

Demonstração. A prova indutiva é uma versão antissimétrica do processo de Gram-Schmidt.

[1] Também chamada base canónica

Suponhamos que ω é uma aplicação bilinear antissimétrica apenas. Seja $U = \{u \in V | \, \omega(u,v) = 0 \forall v \in V\}$, i.e. $U = V^{\perp\omega}$. Escolhemos uma base de U e um espaço W complementar a U em V,

$$V = U \oplus W.$$

Tomamos qualquer um $e_1 \in W$ não nulo. Então existe $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Assumimos que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Sejam agora

$$W_1 = \textit{span}\,\{e_1, f_1\}$$

$$W_1^{\perp\omega} = \{w \in W | \; \omega(w,v) = 0, \; \forall v \in W_1\}.$$

<u>Afirmação</u>: $W_1 \cap W_1^{\perp\omega} = 0$.

Suponhamos que $v = ae_1 + bf_1 \;\in W_1 \cap W_1^{\perp\omega}$. Então

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & \omega(v, e_1) = -b \\ 0 & = & \omega(v, f_1) = a \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0.$$

<u>Afirmação</u>: $W = W_1 \oplus W_1^{\perp\omega}$.

Suponhamos que $v \in W$ tem $\omega(v, e_1) = c$ e $\omega(v, f_1) = d$. Então

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$$

e $(-cf_1 + de_1) \;\in W_1$, $(v + cf_1 - de_1) \;\in W_1^{\perp\omega}$.

Continuamos: Seja $e_2 \in W_1^{\perp\omega}$, $e_2 \neq 0$. Existe $f_2 \in W_1^{\perp\omega}$ tal que $\omega(e_2, f_2) \neq 0$. Assumimos $\omega(e_2, f_2) = 1$. Seja $W_2 = \textit{span}\,\{e_2, f_2\}$, etc...

Este processo vai terminar eventualmente porque V tem dimensão finita. Assim obtemos

$$V = U \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$$

onde todos os somandos são ortogonais com respeito a ω, e onde W_i tem base $\{e_i, f_i\}$ com $\omega(e_i, f_i) = 1$. Agora, para um espaço linear simpléctico, ω é não degenerada, o que significa que

$$\omega_v : V \to V^* \qquad \omega_v(u) = \omega(v, u)$$

é uma bijecção, o que implica que $U = \{0\}$, i.e. $ker(\omega)$ é trivial. Então, $dim(U) = 0$ e

$$dim(V) = 2n \qquad (V \text{ tem dimensão par}).$$

$\square$

O lema anterior reduz o estudo dos espaços lineares simplécticos ao espaço simpléctico standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

O protótipo de um espaço linear simpléctico é $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, com ω_0 tal que a base

$$\begin{array}{rclrcl} e_1 & = & (1, 0 \ldots, 0) & e_n & = & (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{n}, 0 \ldots, 0) \\ f_1 & = & (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n+1}, \ldots, 0) & f_n & = & (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{2n}) \end{array}$$

é uma base simpléctica. O valor de ω_0 sobre outros vectores é determinado pelo seu valor numa base e por bilinearidade.

2.2 Transformações Simplécticas

Definição 2.2. *Um simplectomorfismo linear φ entre os espaços lineares simplécticos (V, ω) e (V', ω') é um isomorfismo linear $\varphi : V \overset{\cong}{\to} V'$ tal que $\varphi^*\omega' = \omega$.*

Se existe um simplectomorfismo, (V, ω) e (V', ω') dizem-se simplectomorfos.

$\star$

<u>Nota</u>: Por definição $(\varphi^*\omega')(u, v) = \omega'(\varphi_*(u), \varphi_*(v))$.

$$V \xrightarrow{\varphi} V'$$
$$\omega \xleftarrow{\varphi^*} \omega'$$

<u>Observação</u>: A relação de serem simplectomorfos é claramente uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços lineares de dimensão par. Além disso, pelo lema (2.1) todo o espaço linear simpléctico (V, ω) de dimensão $2n$ é simplectomorfo ao protótipo $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Uma escolha de uma base simpléctica para (V, ω) acarreta um simplectomorfismo para $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Assim, números inteiros pares positivos classificam classes de equivalência para a relação de serem simplectomorfos.

2.2.1 Exemplos

1. Consideremos $V = V' = \mathbb{R}^{2n}$ com a forma standard. São exemplos de simplectomorfismos as aplicações

$$A(e_j) = f_j, \qquad A(f_j) = -e_j$$

e

$$B(e_j) = e_j + f_j, \qquad B(f_j) = f_j,$$

como se pode ver facilmente.

2. Já vimos que se U é um espaço linear de dimensão n e U^* o seu espaço dual, então $E = U \oplus U^*$ tem uma estrutura simpléctica natural $\omega(u, v) = v^*(u) - u^*(v)$.

   Se $B : U \to U$ é um isomorfismo e $B^* : U^* \to U^*$ a aplicação dual, $B \oplus (B^*)^{-1} : E \to E$ é um simplectomorfismo.

$\diamond$

3 Variedades Simplécticas

3.1 Definição e Exemplos

Seja ω uma 2-forma numa variedade $\mathcal{M}$, i.e. para cada $p \in \mathcal{M}$, a aplicação $\omega_p : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ é bilinear antissimétrica no espaço tangente a $\mathcal{M}$ em p, e ω_p varia suavemente em p. Dizemos que ω é fechada se $d\omega = 0$.

Definição 3.1.

1. *A 2-forma ω é simpléctica se ω é fechada e ω_p é não-degenerada $\forall p \in \mathcal{M}$.*
2. *Uma forma simpléctica em $\mathcal{M}$ define uma estrutura simpléctica em $\mathcal{M}$.*
3. *Uma variedade $\mathcal{M}$ com uma estrutura simpléctica diz-se uma variedade simpléctica, e representa-se por $(\mathcal{M}, \omega)$.*

⋆

Nota: Se ω é simpléctica, então $dim\ T_p(\mathcal{M}) = dim\ \mathcal{M}$ deverá ser par.

Exemplos:

1. Seja $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas lineares $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$. A forma
$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$
é simpléctica como se pode ver facilmente. O conjunto
$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p \right\}$$
é uma base simpléctica de $T_p(\mathcal{M})$.

2. Seja $\mathcal{M} = \mathbb{C}^n$ com coordenadas lineares $z_1, \ldots, z_n$. A forma
$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k$$
é simpléctica. De facto, esta forma é a mesma que a forma do exemplo anterior sob a identificação $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, $z_k = x_k + iy_k$.

3. (a) Seja $\mathcal{M} = S^2$ visto como o conjunto de vectores unitários em $\mathbb{R}^3$. Os vectores tangentes a S^2 em p podem ser identificados com os vectores ortogonais a p. A forma simpléctica standard em S^2 é induzida pelos produtos interno e externo:

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v \rangle, \qquad \text{para } u, v \in T_p(S^2) = \{p\}^\perp.$$

   Esta forma é fechada porque é de grau máximo. É não-degenerada porque $\langle p, u \times v \rangle \neq 0$ quando $u \neq 0$ e tomamos, por exemplo, $v = u \times p$.

   (b) Também, a 2-esfera S^2 de raio r é simpléctica, com ω o elemento standard de área $\omega = r^2 \sin\vartheta d\vartheta \wedge d\varphi$ na esfera como forma simpléctica.

Vamos verificar que as duas formas simplécticas anteriores coincidem no caso em que o raio p é arbitrário. Consideremos a bola de raio $\|p\|$ e centrada na origem em $\mathbb{R}^3$, i.e. $B_{\|p\|}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq \|p\|^2\}$. Podemos definir uma forma de volume em $B_{\|p\|}(0)$ a partir da forma ω_p como

$$\omega(p, u, v) \overset{def}{=} \omega_p(u, v).$$

Notando que $\langle p, u \times v \rangle = p \cdot (u \times v)$ é o volume do paralelipípedo definido pelos vectores p, u e v vê-se que

$$\omega(p, u, v) = \langle p, u \times v \rangle = dx \wedge dy \wedge dz \left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

o que significa que $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Agora, $\partial B_p(0) = S_p^2$, e a forma de volume em S_p^2 (que é a forma procurada) pode ser obtida como[2]

$$\begin{aligned} \lambda\left(\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}, \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= dx \wedge dy \wedge dz \left(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial\vartheta}, \tfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ &= det(Jac(f)) \\ &= r^2 sin\vartheta, \end{aligned}$$

onde f corresponde à parametrização

$$(x, y, z) \overset{f}{\longleftrightarrow} (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \sin\vartheta)$$

Concluímos que $\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = r^2 \sin\vartheta$ e assim que

$$\rightsquigarrow \lambda = r^2 \sin\vartheta d\vartheta \wedge d\varphi$$

[2]Esta operação corresponde ao operador de inclusão a ser definido em 3.3 pelo que a expressão acima por ser escrita como $\lambda = i_{(\frac{\partial}{\partial r})}\omega$.

4. Espaços lineares simplécticos. Se (V, ω) é um espaço linear simpléctico então também é uma variedade simpléctica. A condição $d\omega = 0$ é automaticamente satisfeita, pois ω é uma forma constante (i.e. ω_p é independente de $p \in V$).

5. Uma superfície é simpléctica sse é orientavel. Aí
$$\omega = \omega_{vol}.$$
Por exemplo, são variedades simplécticas
   (a) O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (ϑ, z) e $\omega = d\vartheta \wedge dz$;
   (b) O Toro T^2 com coordenadas periódicas (ϑ, φ) e $\omega = d\vartheta \wedge d\varphi$.

6. Um exemplo importante de uma variedade simpléctica é o fibrado cotangente T^*Q de uma variedade Q de dimensão n. O fibrado cotangente é o conjunto de pares (x, ξ) onde $x \in Q$ e ξ é um covector em x. Como iremos ver mais tarde, T^*Q tem uma estrutura simpléctica natural. A estrutura simpléctica em T^*Q é a 2-forma canónica
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\xi^i.$$
Em aplicações típicas, quando Q é o espaço das configurações de um sistema mecânico, T^*Q é chamado o espaço de fases do sistema.

$\diamond$

Exercício 3.1. *Verificar que as formas referidas acima são de facto formas simplécticas.*

Mas nem todas as variedades admitem estrutura simpléctica. Para o verificar vamos voltar à álgebra linear simpléctica.

Se ω é uma forma simpléctica qualquer num espaço linear V de dimensão $2n$, então, pelo lema da base simpléctica (2.1),
$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n} \neq 0$$
pois podemos escrever
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i.$$
Inversamente, dada uma 2-forma $\eta \in \Lambda^2(V^*)$, se $\eta^n \neq 0$ então η é simpléctica.

Concluímos que a potência exterior de ordem n de uma forma simpléctica ω numa variedade $\mathcal{M}$ de dimensão $2n$ é uma forma de volume. Assim, qualquer variedade simpléctica $(\mathcal{M}, \omega)$ é orientada canonicamente pela estrutura simpléctica. A forma $\frac{\omega^n}{n!}$ chama-se forma de Liouville (ou forma simpléctica de volume).

Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simpléctica 2n-dimensional, e seja ω^n a forma de volume obtida pela multiplicação exterior de ω com ela própria n vezes. Pelo Teorema de Stokes, se $\mathcal{M}$ é compacta, a classe de cohomologia de de Rham $[\omega^n] \in H^{2n}(\mathcal{M})$ é não nula, ou seja, qualquer forma de volume em $\mathcal{M}$, com $\mathcal{M}$ compacta, é não-exacta. Portanto, ω não é exacta porque se o fosse ω^n seria exacta, i.e. $\omega = d\eta \Rightarrow \omega^n = d(\eta \underbrace{d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n-1})$.

Isto revela uma condição topológica necessária para que uma variedade compacta 2n-dimensional seja simpléctica: Tem que haver uma classe de cohomologia de grau 2 cuja potência de ordem n seja uma forma de volume.

Em particular, para $n > 1$ não existe estrutura simpléctica na esfera S^{2n}, pois para $0 < k < 2n$, $H^k(S^{2n}) = 0$.

3.2 Simplectomorfismos

Definição 3.2. *1. Uma aplicação $\varphi : (\mathcal{M}_1, \omega_1) \to (\mathcal{M}_2, \omega_2)$ entre variedades simplécticas diz-se simpléctica se $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.*

2. Um simplectomorfismo é um difeomorfismo simpléctico.

⋆

Os físicos chamam "transformação canónica" ao simplectomorfismo.

Observação: Estamos a dizer que $\omega_2(\varphi_* X, \varphi_* Y) = \omega_1(X, Y)$.

Assim como qualquer variedade n-dimensional parece localmente $\mathbb{R}^n$, qualquer variedade simpléctica 2n-dimensional parece localmente $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Mais precisamente, qualquer variedade simpléctica $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ é localmente simplectomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

3.3 O Teorema de Darboux

Teorema 3.1. *(Darboux) Seja $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simpléctica 2n-dimensional e seja p um ponto qualquer em $\mathcal{M}$.*

Então existe um mapa $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ centrado em p, tal que em $\mathcal{U}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i.$$

Um mapa $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ chama-se um mapa de Darboux, e as coordenadas $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ tal que $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$ dizem-se coordenadas canónicas.

Pelo Teorema de Darboux, o protótipo local de uma variedade simpléctica 2n-dimensional é $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$, com coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ e com forma simpléctica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i.$$

Para provarmos o Teorema de Darboux precisamos de alguns argumentos. Vamos definir primeiro o operador de inserção e a derivada de Lie de uma forma diferencial. A seguir provamos duas proposições sobre a derivada de Lie de uma forma diferencial.

O operador de inserção é definido como:

Definição 3.3. *Sejam $X \in V(\mathcal{M})$ e $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{M})$.*
O operador de inserção é o operador

$$i_X : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$$

tal que

$$(i_X \alpha)(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \alpha(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1}).$$

$\star$

Esta operação também se chama produto interior ou contracção. Repare-se que a inserção diminui o grau da forma.

Em relação à derivada de Lie de uma forma diferencial, podemos definir

Definição 3.4. *Para $X \in V(\mathcal{M})$ com fluxo ϕ_t a derivada de Lie de $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{M})$ é definida por*

$$\mathcal{L}_X\alpha : \Omega^k(\mathcal{M}) \to \Omega^k(\mathcal{M})$$

$$\mathcal{L}_X\alpha = \frac{d}{dt}(\phi_t)^*\alpha \Big|_{t=0}.$$

⋆

A derivada de Lie tem as propriedades de uma derivação, é linear e satisfaz a regra de Leibnitz.

Exercício 3.2. *Mostre que*

1. $\mathcal{L}_X(a\eta + b\xi) = a\mathcal{L}_X\eta + b\mathcal{L}_X\xi \qquad \eta, \xi \in \Omega^k(\mathcal{M})$.
2. $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \sigma) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \sigma + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\sigma), \qquad X \in V(\mathcal{M})$.
3. $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$.

As seguintes proposições vão ser úteis na prova do Teorema de Darboux.

Proposição 3.1. *A derivada de Lie satisfaz:*

1. $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$ *(Fórmula mágica de Cartan).*
2. $\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \phi_t^*\mathcal{L}_X\omega$.

Demonstração. 1. Seja γ uma k-cadeia. Então $\Gamma = \phi([0,t] \times \gamma)$ é uma (k+1)-cadeia, e o Teorema de Stokes diz-nos que

$$\int_\Gamma d\alpha = \int_{\phi_t(\gamma)} \alpha - \int_\gamma \alpha - \int_{\phi([0,t]\times\partial\gamma)} \alpha.$$

A derivada em ordem a t em $t = 0$ e nova aplicação do Teorema de Stokes dá-nos

$$\int_\gamma i_X d\alpha = \int_\gamma \mathcal{L}_X\alpha - \int_{\partial\gamma} i_X\alpha = \int_\gamma \mathcal{L}_X\alpha - \int_\gamma di_X\alpha.$$

2. Por definição, $\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{ds}(\phi_s)^*\omega\big|_{s=0}$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi_t^*\mathcal{L}_X\omega &= \phi_t^* \tfrac{d}{ds}(\phi_s)^*\omega\big|_{s=0} = \tfrac{d}{ds}(\phi_t)^*(\phi_s)^*\omega\big|_{s=0} \\
&= \tfrac{d}{ds}(\phi_{t+s})^*\omega\big|_{s=0} = \tfrac{d}{dt}(\phi_{t+s})^*\omega\big|_{s=0} \\
&= \tfrac{d}{dt}(\phi_t)^*\omega.
\end{aligned}$$

□

Mas vamos precisar de uma versão melhorada de 2.

Proposição 3.2. *Para uma família suave ω_t, $t \in \mathbb{R}$, de k-formas,*

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t = \phi_t^*\left(\mathcal{L}_X\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right).$$

Demonstração. Se $f(s,r)$ é uma função real de duas variáveis, então

$$\frac{d}{dt}f(t,t) = \frac{d}{ds}f(s,t)\bigg|_{s=t} + \frac{d}{dr}f(t,r)\bigg|_{r=t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t &= \tfrac{d}{ds}\phi_s^*\omega_t\big|_{s=t} + \tfrac{d}{dr}\phi_t^*\omega_r\big|_{r=t} \\
&= \phi_s^*\mathcal{L}_X\omega_t|_{s=t} + \phi_t^*\tfrac{d\omega_r}{dr}\big|_{r=t} \\
&= \phi_t^*\left(\mathcal{L}_X\omega_t + \tfrac{d\omega_t}{dt}\right).
\end{aligned}$$

□

Podemos então provar o Teorema de Darboux. A prova consiste em provar primeiro um lema, o que vai implicar o teorema.

Lema 3.1. *Sejam ω e ω' estruturas simplécticas numa variedade $\mathcal{M}$ e seja $p \in \mathcal{M}$. Se $\omega_p = \omega'_p$, então existem vizinhanças U e V de p e um difeomorfismo $\psi : U \to V$ tal que*

$$\psi(p) = p$$
$$\psi^*\omega' = \omega.$$

Demonstração. Como $d(\omega' - \omega) = 0$ existe uma 1-forma α nalguma vizinhança W de p tal que

$$d\alpha = \omega' - \omega$$

pois $[\omega'] = [\omega]$.

Subtraindo a α o seu valor em p (i.e. tomando $\alpha \to \alpha - \alpha_p$) podemos assegurar que $\alpha_p = 0$. Repare-se que como estamos em coordenadas locais e como α é uma 1-forma que pode ser escrita como $\alpha = f_i(x)dx^i$, o que estamos a fazer é simplesmente subtrair a α a quantidade constante $\nabla f_i(p) \longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i$, ou seja, α passa a ser $\alpha - \omega_{\nabla f}(p)$.

Seja agora Ω a família de 2-formas

$$\Omega = \omega + t(\omega' - \omega)$$

em W, e seja X o campo vectorial em W determinado por

$$i_X\Omega + \alpha = 0.$$

Note-se que $\Omega_p = \omega_p$, pelo que Ω_p é não degenerada, e também que $d\Omega = 0$, $\forall t$ fixo (Ω é fechada).

Substituindo W por uma vizinhança mais pequena, se necessário, podemos assegurar que Ω é não degenerada em W. Então X é bem definido.

Seja agora ϕ_t um fluxo local de X (começa em $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$). Então, utilizando a proposição (3.2)

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\left(\phi_t^*\Omega\right) &= \phi_t^*\left(\mathcal{L}_X\Omega + \tfrac{d\Omega}{dt}\right) \\ &\overset{Cartan}{=} \phi_t^*\left(di_X\Omega + i_X d\Omega + \tfrac{d\Omega}{dt}\right) \\ &= \phi_t^*\left(-d\alpha + \omega' - \omega\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde no último passo se utilizou $i_X = -\alpha$, $d\Omega = 0$ e $\frac{d\Omega}{dt} = \omega' - \omega$.

Segue que $\phi_t^*\Omega|_{t=1} = \phi_t^*\Omega|_{t=0}$, ou seja

$$\phi_1^*\omega' = \phi_0^*\omega = \omega,$$

pois $\Omega_1 = \omega'$ e $\Omega_0 = \omega$.

Tomando $\psi = \phi_1$ vem que

$$\psi^*\omega' = \omega.$$

Também,

$$\psi(p) = p.$$

Para ver porque é que $\psi(p) = p$ notemos que $i_X\Omega + \alpha = 0$ e $\alpha_p = 0$, o que significa que $i_{X_p}\Omega_p = 0$. Isso implica que $X_p = 0$ pois Ω_p é não degenerada. Daqui vem que $\phi_t(p) = p, \forall t \in [0,1]$ e assim que $\psi(p) = p$.

A única dificuldade é que ψ pode não estar definida em todo o W pois as curvas integrais de X podem deixar W. Sabemos contudo que $\psi(p) = p$ pelo que deverá existir uma vizinhança $U \subset W$ de p tal que ψ é definida em U e $\psi(U) \subset W$. A demonstração fica completa tomando $V = \psi(U)$. □

Podemos agora provar o Teorema de Darboux.

Demonstração do Teorema de Darboux. Notemos que do lema da base simpléctica (2.1) é possível introduzir um sistema de coordenadas

$$(x'^1, \ldots, x'^n, y'^1, \ldots, y'^n)$$

numa vizinhança de p tal que $\omega = \sum_i dx'^i \wedge dy'^i$ em p. Então, se tomarmos $\omega' = \sum_i dx'^i \wedge dy'^i$ e definirmos x^i e y^i por

$$x^i = x'^i \circ \psi, \qquad y^i = y'^i \circ \psi$$

onde ψ é como no lema anterior, deveremos ter

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$$

nalguma vizinhança de p. □

Todas as variedades simplécticas têm a mesma estrutura simpléctica que um fibrado cotangente de dimensão apropriada. Contudo, além da sua estrutura simpléctica canónica, um fibrado cotangente tem mais estruturas naturais que não são comuns a todas as variedades simplécticas. Uma delas é a 1-forma canónica (ou tautológica) que iremos ver a seguir. Em qualquer variedade simpléctica $(\mathcal{M}, \omega)$, é sempre possível encontrar nalguma vizinhança de cada ponto uma 1-forma α tal que $\omega = d\alpha$. Tal 1-forma chama-se um potencial simpléctico (ou uma 1-forma tautológica). Em geral α existe apenas localmente e não é única. A 1-forma canónica num fibrado cotangente é um potencial simpléctico canónico global. Já sabemos que em variedades simplécticas compactas não pode haver potencial simpléctico global, pois se $\omega = d\alpha$ então

$$\int_{\mathcal{M}} \omega^n = \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega = \int_{\mathcal{M}} d(\theta \wedge \omega^{n-1}) = 0$$

pelo Teorema de Stokes. Mas o integral do lado esquerdo não é zero, pelo que vamos ter uma contradição. Isto significa que ω^n não é exacta, e assim ω não é exacta.

4 Forma Simpléctica no Fibrado Cotangente

Esta secção é simplesmente uma tradução de algumas secções de A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, (ver referências).

4.1 Fibrado Cotangente

Seja Q uma variedade n-dimensional e $\mathcal{M} = T^*Q$ o seu fibrado cotangente. Se a estrutura de variedade em Q for descrita pelos mapas $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n)$ com $x^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, então para qualquer $x \in \mathcal{U}$, os $(dx^1)_x, \ldots, (dx^n)_x$ formam uma base de T_x^*Q. Nomeadamente, se $\xi \in T_x^*Q$, então $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (dx^i)_x$ para coeficientes reais $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Isso induz uma aplicação

$$T^*\mathcal{U} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x, \xi) \mapsto (x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n).$$

O mapa $(T^*\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ é um mapa de T^*Q; as coordenadas $x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n$ são as *coordenadas cotangentes* associadas às coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{U}$. Nas intersecções entre mapas, as transições são suaves: dados dois mapas $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n)$, $(\mathcal{U}', x'^1, \ldots, x'^n)$, e $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, se $\xi \in T_x^*Q$, então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i (dx^i)_x = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) (dx'^j)_x = \sum_{j=1}^n \xi'^j (dx'^j)_x$$

onde $\xi'^j = \sum_i \xi^i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right)$ é suave. Assim, T^*Q é uma variedade 2n-dimensional.

Vamos agora construir uma das grandes classes de exemplos de formas simplécticas. As formas canónicas em fibrados cotangentes são relevantes para vários ramos, incluindo a análise de operadores lineares, sistemas dinâmicos e mecânica clássica.

4.2 Formas Canónicas e Formas Tautológicas

Seja $(\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n)$ um mapa numa variedade Q, com coordenadas cotangentes associadas $(T^*\mathcal{U}, x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$. Definimos uma 2-forma ω em $T^*\mathcal{U}$ como

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge d\xi^i.$$

Para verificar que esta definição é independente de coordenadas, considere-se a 1-forma α em $T^*\mathcal{U}$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi^i dx^i.$$

É imediato que $\omega = -d\xi$.

Proposição 4.1. *A forma α é intrinsecamente definida (e assim a forma ω também o é).*

Demonstração. Sejam

$$(\mathcal{U}_1, x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n) \text{ e } (\mathcal{U}_2, x'^1, \ldots, x'^n, \xi'^1, \ldots, \xi'^n)$$

dois mapas cotangentes. Em $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, os dois conjuntos de coordenadas estão relacionados por $\xi'^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)$. Como $dx'^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right) dx^i$, vamos ter

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi^i dx^i = \sum_{j=1}^{n} \xi'^j dx^j = \alpha'.$$

$\square$

A 1-forma α é a *forma tautológica* e a 2-forma ω a *forma simpléctica canónica.*

Vamos agora tratar de uma demonstração alternativa do carácter intrínseco dessas formas. Sejam

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} = T^*Q & p = (x, \xi) & \xi \in T_x^*(Q) \\ \downarrow \pi & \downarrow & \\ Q & x & \end{array}$$

A 1-forma tautológica α pode ser definida num ponto p como

$$\alpha_p = (d\pi_p)^*\xi \ \in T_p^*(\mathcal{M})$$

onde $(d\pi_p)^*$ é a aplicação transposta de $d\pi_p$, i.e. $(d\pi_p)^*\xi = \xi \circ d\pi_p$:

$$\begin{array}{ccc} p = (x, \xi) & T_p(\mathcal{M}) & T_p^*(\mathcal{M}) \\ \downarrow \pi & \downarrow d\pi_p & \uparrow (d\pi_p)^* \\ x & T_x(Q) & T_x^*(Q) \end{array}$$

De forma equivalente,

$$\alpha_p(v) = \xi((d\pi_p)v), \text{ para } v \in T_p(\mathcal{M}).$$

A 2-forma simpléctica canónica ω em T^*Q é definida por

$$\omega = -d\alpha.$$

Localmente,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\xi^i.$$

4.3 Naturalidade das Formas Canónicas

Sejam Q_1 e Q_2 variedades n-dimensionais com fibrados cotangentes $\mathcal{M}_1 = T^*Q_1$ e $\mathcal{M}_2 = T^*Q_2$, e 1-formas tautológicas α_1 e α_2. Suponhamos que $f : Q_1 \to Q_2$ é um difeomorfismo. Então existe um difeomorfismo natural

$$f_\sharp : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$$

(a que se chama *lift*) tal que:

Se $p_1 = (x_1, \xi_1) \in \mathcal{M}_1$ para $x_1 \in Q_1$ e $\xi_1 \in T^*_{x_1}(Q_1)$, então

$$f_\sharp(p_1) = p_2 = (x_2, \xi_2),$$

com $x_2 = f(x_1) \in Q_2$ e $\xi_1 = (df_{x_1})^*\xi_2$, onde $(df_{x_1})^* : T_{x_2}(Q_2) \overset{\cong}{\to} T_{x_1}(Q_1)$, pelo que $f_\sharp|^*_{T_{x_1}}$ é a aplicação inversa de $(df_{x_1})^*$.

Exercício 4.1. *Verificar que $f_\sharp$ é um difeomorfismo.*

Proposição 4.2. *O pullback do lift $f_\sharp$ de um difeomorfismo $f : Q_1 \to Q_2$ é tal que*

$$(f_\sharp)^*\alpha_2 = \alpha_1.$$

Demonstração. Em $p_1 = (x_1, \xi_1) \in \mathcal{M}_1$, esta identidade diz que

$$(df_\sharp)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} = (\alpha_1)_{p_1},$$

onde $p_2 = f_\sharp(p_1)$.

Agora, da definição de $f_\sharp$ vem

$$p_2 = f_\sharp(p_1) \Leftrightarrow p_2 = (x_2, \xi_2) \text{ onde } x_2 = f(x_1) \text{ e } (df_{x_1})^*\xi_2 = \xi_1.$$

Da definição da 1-forma tautológica temos

$$(\alpha_1)_{p_1} = (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1 \text{ e } (\alpha_2)_{p_2} = (d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2.$$

Também, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{f_\sharp} & \mathcal{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_2 \end{array}$$

comuta.

Assim,

$$\begin{aligned} (df_\sharp)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} &= (df_\sharp)^*_{p_1}(d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2 = (d(\pi_2 \circ f_\sharp))^*_{p_1}\xi_2 = \\ &= (d(f \circ \pi_1))^*_{p_1}\xi_2 = (d\pi_1)^*_{p_1}(df)^*_{x_1}\xi_2 = \\ &= (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1 = (\alpha)_{p_1}. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1. *O lift $f_\sharp$ de um difeomorfismo $f : Q_1 \to Q_2$ é um simplectomorfismo, i.e. $(f_\sharp)^*\omega_2 = \omega_1$, onde ω_1 e ω_2 são as formas simplécticas canónicas.*

Demonstração. Como o pullback comuta com a derivada exterior d, da proposição anterior vem

$$d(f_\sharp)^*\alpha_2 = d\alpha_1$$

ou seja,

$$(f_\sharp)^*d\alpha_2 = d\alpha_1,$$

o que significa que

$$(f_\sharp)^*\omega_2 = d\omega_1$$

□

Estamos a ver que um difeomorfismo de variedades induz um simplectomorfismo canónico de fibrados cotangentes:

$$\begin{array}{ccccc} f_\sharp & : & T^*Q_1 & \to & T^*Q_2 \\ & & & \uparrow & \\ f & : & Q_1 & \to & Q_2. \end{array}$$

Exemplo 4.1. Sejam $Q_1, Q_2 = S^1$. Então T^*S^1 é o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Uma 2-forma canónica ω é a forma $\omega = d\vartheta \wedge dz$. Se $f : S^1 \to S^1$ é um difeomorfismo qualquer, então $f_\sharp : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ é um simplectomorfismo, i.e um difeomorfismo que preserva a área do cilindro. $\diamond$

5 Órbitas Coadjuntas de Grupos de Lie

5.1 Revisão sobre Grupos de Lie

Definição 5.1. *Um grupo de Lie é uma variedade G equipada com uma estrutura de grupo, onde as operações*

$$\begin{array}{cc} G \times G \to G & G \to G \\ (a,b) \mapsto a.b & a \mapsto a^{-1} \end{array}$$

são aplicações suaves.

⋆

Exemplos:

1. $(\mathbb{R}, +)$;
2. S^1 visto como $\{z \in \mathbb{C} |\ z\bar{z} = 1\}$ com a multiplicação habitual de números complexos, representa rotações no plano: $S^1 = U(1) = SO(2)$;
3. $GL(n, \mathbb{C}) = \{$matrizes complexas invertíveis $n \times n\}$,
4. $U(n)$, transformações lineares unitárias de $\mathbb{C}^n$: $\{A \in GL(\mathbb{C}) |\ AA^\dagger = A^\dagger A = Id\}$[3];
5. $SU(n) = \{A \in U(n) |\ det(A) = 1\}$
6. $O(n)$, transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^n$;
7. $SO(n) = \{A \in O(n) |\ det(A) = 1\}$;
8. $GL(V)$, transformações lineares invertíveis de um espaço vectorial V.

◇

Definição 5.2. *Uma representação de um grupo de Lie G num espaço vectorial V é um homomorfismo*[4] *$G \to GL(V)$.*

⋆

[3] $A^\dagger$ é a chamada matriz transconjugada: $A^\dagger = \bar{A}^T$

[4] Relembremos que um homomorfismo de G para G', com G e G' grupos, é uma aplicação $\Theta : G \to G'$ tal que $\forall x, y \in G : \Theta(xy) = \Theta(x)\Theta(y)$.

5.2 Acções Suaves de Grupos de Lie

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade.

Definição 5.3. *Uma acção de um grupo de Lie G em $\mathcal{M}$ é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \psi: \quad & G \to Dif(\mathcal{M}) \\ & g \mapsto \psi_g \end{aligned}$$

onde $Dif(\mathcal{M})$ é o grupo dos difeomorfismos de $\mathcal{M}$. Vamos considerar apenas acções esquerdas, onde ψ é um homomorfismo. Uma ação direita é definida com ψ sendo um anti-homomorfismo. A acção ψ é suave se

$$\begin{aligned} \psi_g: \quad & \mathcal{M} \times G \to \mathcal{M} \\ & (p, g) \mapsto \psi_g(p). \end{aligned}$$

é uma aplicação suave.

$\star$

Exemplos:

1. $SO(3)$ actua em $\mathbb{R}^3$ por $(A, x) \mapsto Ax$. Esta acção deixa a 2-esfera S^2 invariante, pelo que a mesma expressão define uma acção de $SO(3)$ em S^2.
2. $GL(n, \mathbb{R})$ actua em $\mathbb{R}^n$ por $(A, x) \mapsto Ax$.
3. Seja X um campo vectorial completo em $\mathcal{M}$, i.e. um campo vectorial para o qual o seu fluxo ϕ_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $\phi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ define uma acção de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{M}$.

$\diamond$

5.3 Representações Adjunta e Coadjunta

Seja G um grupo de Lie. Dado $g \in G$ seja

$$\begin{aligned} L_g: \quad & G \to G \\ & a \mapsto g.a \end{aligned}$$

a multiplicação à esquerda por g. Um campo vectorial $X \in V(G)$ diz-se invariante à esquerda se $(L_g)_* X = X$ para todo $g \in G$ (existem noção análogas para a direita).

Seja $\mathfrak{g}$ o espaço vectorial de todos os campos vectoriais em G que são invariantes à esquerda. Juntamente com os parêntesis de Lie $[\cdot,\cdot]$ de campos vectoriais, $\mathfrak{g}$ forma uma álgebra de Lie, chamada a álgebra de Lie do grupo de Lie G.

Exercício 5.1. *Mostre que a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to T_eG \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

onde e é a identidade em G, é um isomorfismo de espaços vectoriais.

Qualquer grupo de Lie actua em si próprio por conjugação:

$$\begin{aligned} &G \to Dif(G) \\ &g \mapsto \psi_g, \qquad \psi_g(a) = g.a.g^{-1}. \end{aligned}$$

A derivada na identidade de

$$\begin{aligned} \psi_g: \quad & G \to G \\ & a \mapsto g.a.g^{-1} \end{aligned}$$

é uma aplicação linear invertível $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Aqui identificamos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com o espaço tangente T_eG. deixando g variar obtemos a representação adjunta (ou acção adjunta) de G em $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} Ad: \quad & G \to GL(\mathfrak{g}) \\ & g \mapsto Ad_g. \end{aligned}$$

Explicitamente, a acção adjunta de G em $\mathfrak{g}$ é dada por

$$Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad Ad_g(\xi) = T_e(R_{g^{-1}} \circ L_g)\xi.$$

Agora, seja $\langle \cdot,\cdot \rangle$ o emparelhamento natural entre $\mathfrak{g}^*$ e $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle: \quad & \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g} \\ & (\xi, X) \mapsto \langle \xi, X \rangle = \xi(X). \end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}$ definimos $Ad_g^*\xi$ por

$$\langle Ad_g^*\xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}X \rangle, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Observação: Utilizámos g^{-1} na definição de $Ad^*_g\xi$ para obter uma representação (esquerda) i.e. um homomorfismo de grupos, em vez de uma representação "direita", i.e. um antihomomorfismo de grupos.

A colecção de aplicações Ad^*_g forma a representação coadjunta (ou acção coadjunta) de G em $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} Ad^* : \quad & G \to GL(\mathfrak{g}^*) \\ & g \mapsto Ad^*_g. \end{aligned}$$

Explicitamente, a representação coadjunta de G em $\mathfrak{g}^*$ é dada por

$$Ad^* : G \to GL(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*), \qquad Ad^*_{g^{-1}} = (T_e(R_g \circ L - g^{-1}))^*.$$

Exercício 5.2. *Mostre que $Ad_g \circ Ad_h = Ad_{gh}$ e $Ad^*_g \circ Ad^*_h = Ad^*_{gh}$.*

5.4 Espaços das Órbitas

Seja $\psi : G \to Dif(\mathcal{M})$ uma acção.

Definição 5.4. *A órbita de G através de $p \in \mathcal{M}$ é $\{\psi_g(p)|\ g \in G\}$. O estabilizador de $p \in \mathcal{M}$ é o subgrupo $G_p = \{g \in G | \psi_g(p) = p\}$.*

⋆

Definição 5.5. *Dizemos que a acção de G em $\mathcal{M}$ é*

- *transitiva se existe apenas uma órbita;*
- *livre se todos os estabilizadores são triviais ($\{e\}$);*
- *localmente livre se todos os estabilizadores são discretos.*

⋆

Seja $\sim$ a relação de equivalência de órbitas. Para $p, q \in \mathcal{M}$,

$$p \sim q \Leftrightarrow p \text{ e } q \text{ estão na mesma órbita.}$$

O espaço das órbitas é $\mathcal{M}/_\sim = \mathcal{M}/G$.

<u>Exemplos:</u>

1. Translação à esquerda. $L_g : G \to G$, $h \mapsto g.h$, define uma acção transitiva e livre de G em si próprio. Note-se que a multiplicação à direita $R_g : G \to G$, $h \mapsto h.g$, não define uma acção esquerda porque $R_{gh} = R_h \circ R_g$, pelo que $g \mapsto R_g$ é um anti-homomorfismo. Contudo, $g \mapsto R_g$ define uma acção à direita, enquanto que $g \mapsto R_{g^{-1}}$ define uma acção à esquerda de G em si próprio.

2. $g \mapsto \psi_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$. A aplicação $\psi_g : G \to G$ dada por $h \mapsto g.h.g^{-1}$ é o automorfismo interno associado a g. As órbitas desta acção são chamadas classes de conjugação, ou no caso de grupos matriciais, classes de semelhança.

$\diamond$

A órbita coadjunta, $\mathcal{O}(\xi)$, através de $\xi \in \mathfrak{g}^*$ é o subconjunto de $\mathfrak{g}^*$ definido por

$$\mathcal{O}(\xi) = \{Ad^*_{g^{-1}}(\xi) | g \in G\} = G \cdot \xi.$$

5.5 Vectores Tangentes a Órbitas Coadjuntas

Em geral, as órbitas de uma acção de um grupo de Lie, embora seja variedades, não são subvariedades da variedade ambiente. No entanto acontece uma excepção no caso de grupos de Lie compactos: todas as suas órbitas são subvariedades fechadas.

Vamos agora descrever vectores tangentes a órbitas coadjuntas. Sejam $\xi \in \mathfrak{g}$ e $g(t)$ uma curva em G tangente a ξ em $t = 0$. Seja $\mathcal{O}$ uma órbita coadjunta e $\mu \in \mathcal{O}$. Se $\eta \in \mathfrak{g}$ então

$$\mu(t) = Ad^*_{g(t)^{-1}}\mu$$

é uma curva em $\mathcal{O}$ com $\mu(0) = \mu$. Diferenciando a identidade

$$\langle \mu(t), \eta \rangle = \langle \mu, Ad_{g(t)^{-1}}\eta \rangle$$

em ordem a t em $t = 0$ obtém-se

$$\langle \mu'(0), \eta \rangle = -\langle \mu, ad_\xi \eta \rangle = -\langle ad^*_\xi \mu, \eta \rangle,$$

e assim[5],

$$\mu'(0) = -ad^*_\xi \mu.$$

Então,

$$T_\mu \mathcal{O} = \{ad^*_\xi \mu\}.$$

[5] $ad_\mu(\eta) = \mu_{\mathfrak{g}}(\eta) = [\mu, \eta]$, $ad^*_\mu(\alpha) = -\mu_{\mathfrak{g}^*}(\alpha) = \langle \alpha, [\mu, \cdot] \rangle$.

Esta cálculo mostra também que o gerador infinitesimal da acção coadjunta é dado por

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -ad_\xi^* \mu.$$

5.6 A Estrutura Simpléctica em Órbitas Coadjuntas

Teorema 5.1. *(Teorema da Órbita Coadjunta): Sejam G um grupo de Lie e $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ uma órbita coadjunta. Então*

$$\omega^{\pm}(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \pm\langle \mu, [\xi, \eta]\rangle$$

para todos $\mu \in \mathcal{O}$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ define estruturas simplécticas em $\mathcal{O}$.

Demonstração. Primeiro, mostramos que esta expressão nos dá uma forma bem definida, i.e. o lado direito é independente da escolha de $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\eta \in \mathfrak{g}$ que definem os vectores tangentes $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ e $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$. Observamos que $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = \eta'_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ implica que $\langle \mu, [\xi, \eta]\rangle = \langle \mu, [\xi', \eta]\rangle$ para todo $\eta \in \mathfrak{g}$. Assim,

$$\omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \omega(\mu)(\xi'_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)),$$

pelo que ω é bem definida.

Em segundo lugar, mostremos que ω é não degenerada. Como o emparelhamento $\langle\ ,\ \rangle$ é não degenerado, $\omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = 0$ para todo $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ implica que $\langle \mu, [\xi, \eta]\rangle = 0$ para todo o η. Isto significa que $\langle \mu, [\xi, \cdot]\rangle = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0$. Falta apenas mostrar que ω é fechada, i.e. $d\omega = 0$. Para isso começamos por definir, para cada $\nu \in \mathfrak{g}^*$, a 1-forma ν_L em G por

$$\nu_L(g) = (T_g^* L_{g^{-1}})(\nu),$$

onde $g \in G$. É imediato que a 1-forma ν_L é invariante à esquerda, i.e. $L_g^* \nu_L = \nu_L$ para todo $g \in G$. Para $\xi \in \mathfrak{g}$, seja ξ_L o campo vectorial em G invariante à esquerda, pelo que $\nu_L(\xi_L)$ é uma função constante em G (cujo valor em qualquer ponto é $\langle \nu, \xi\rangle$). Escolhemos $\nu \in \mathcal{O}$ e consideramos a aplicação sobrejectiva $\varphi_\nu : G \to \mathcal{O}$ definida por $g \mapsto Ad^*_{g^{-1}}(\nu)$ e a 2-forma $\sigma = \varphi_\nu^*(\omega)$ em G. Afirmamos que

$$\sigma = d\nu_L.$$

Para provar a afirmação notamos que

$$(T_e \varphi_n u)(\eta) = \eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu),$$

pelo que a aplicação sobrejectiva φ_ν é uma submersão em e. Pela definição do pullback, $\sigma(e)(\xi,\eta)$ vai ser igual a

$$\begin{aligned}(\varphi_\nu^*\omega)(e)(\xi,\eta) &= \omega(\varphi_\nu(e))(T_e\varphi_\nu\cdot\xi, T_e\varphi_\nu\cdot\eta)\\ &= \omega(\nu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\nu),\eta_{\mathfrak{g}^*}(\nu))\\ &= \langle\nu,[\xi,\eta]\rangle\end{aligned}$$

Assim,

$$\sigma(\xi_L,\eta_L)(e)=\sigma(e)(\xi,\eta)=\langle\nu,[\xi,\eta]\rangle=\langle\nu_L,[\xi_L,\eta_L]\rangle(e).$$

Vamos precisar da relação $\sigma(\xi_l,\eta_L)=\langle\nu_L,[\xi_L,\eta_L]$ em cada ponto de G; para a obter provamos primeiro dois lemas.

Lema 5.1. *A aplicação $Ad^*_{g^{-1}}:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ preserva ω, isto é,*

$$(Ad^*_{g^{-1}})^*\omega=\omega.$$

Demonstração. Para provar o lema recorremos a duas identidades. A primeira diz que

$$(Ad_g\xi)_{\mathfrak{g}^*}=Ad^*_{g^{-1}}\circ\xi_{\mathfrak{g}^*}\circ Ad^*_g,$$

e que se pode provar tomando ξ tangente à curva $h(\epsilon)$ em $\epsilon=0$, lembrando que

$$Ad_g\xi=\frac{d}{d\epsilon}g.h(\epsilon).g^{-1}\bigg|_{\epsilon=0}$$

e notando que

$$\begin{aligned}(Ad_g\xi)_{\mathfrak{g}^*}(\mu) &= \tfrac{d}{d\epsilon}Ad^*_{(g.h(\epsilon).g^{-1})^{-1}}\mu\Big|_{\epsilon=0}\\ &= \tfrac{d}{d\epsilon}Ad^*_{g^{-1}}Ad^*_{h(\epsilon)^{-1}}Ad^*_g(\mu)\Big|_{\epsilon=0}.\end{aligned}$$

Em segundo lugar, precisamos da identidade

$$Ad_g[\xi,\eta]=[Ad_g\xi,Ad_g\eta],$$

que se obtém diferenciando a relação

$$\psi_g(\psi_h(k))=\psi_g(h)\psi_g(k)\psi_g(h^{-1})$$

em ordem a h e k na identidade.

Avaliando $(Ad_g\xi)_{\mathfrak{g}^*}$ em $\nu=Ad^*_{g^{-1}}\mu$ obtém-se

$$(Ad_g\xi)_{\mathfrak{g}^*}(\nu)=Ad^*_{g^{-1}}\cdot\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)=T_\mu Ad^*_{g^{-1}}\cdot\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu),$$

pois $Ad_{g^{-1}}$ é linear. Então

$$\begin{aligned}
&((Ad^*_{g^{-1}})\omega)(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) \\
&\quad = \omega(\nu)(T_\nu Ad_{\mathfrak{g}^{*-1}} \cdot \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), T_\mu) Ad_{\mathfrak{g}^{*-1}} \cdot \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) \\
&\quad = \omega(\nu)((Ad_g\xi)_{\mathfrak{g}^*}(\nu), (Ad_g\eta)_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) \\
&\quad = \langle \nu, [Ad_g\xi, Ad_g\eta] \rangle \\
&\quad = \langle \nu, Ad_g[\xi, \eta] \rangle \\
&\quad = \langle Ad^*_g\nu, [\xi, \eta] \rangle \\
&\quad = \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle \\
&\quad = \omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)).
\end{aligned}$$

□

Lema 5.2. *A 2-forma σ é invariante à esquerda, i.e. $L^*_g\sigma = \sigma$ para todo $g \in G$*

Demonstração. Utilizando $\varphi_\nu \circ L_g = Ad^*_{g^{-1}} \circ \varphi_\nu$ calculamos

$$\begin{aligned}
L^*_g\sigma &= L^*_g\varphi^*_\nu\omega = (\varphi_\nu \circ L_g)^*\omega = (Ad^*_{g^{-1}} \circ \varphi_\nu)^*\omega \\
&= \varphi^*_\nu(Ad^*_{g^{-1}})^*\omega = \varphi^*_\nu\omega = \sigma.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.3. $\sigma(\xi_L, \eta_L) = \langle \nu_L, [\xi_L, \eta_L] \rangle$.

Demonstração. Os dois lados são invariantes à esquerda e são iguais na identidade. □

Agora, em termos dos parêntesis de Lie, a derivada exterior $d\alpha$ de uma 1-forma α pode ser escrita como:

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

como $\nu_L(\xi_L)$ é constante, $\eta_L(\nu_L(\xi_L)) = 0$ e $\xi_L(\nu_L(\eta_L)) = 0$, pelo que o lema anterior implica que

$$\sigma(\xi_L, \eta_L) = d\nu_L(\xi_L, \eta_L).$$

Lema 5.4. $\sigma = d\nu_L$

Demonstração. Mostremos que para dois campos vectoriais quaisquer X e Y, $\sigma(X,Y) = d\nu_L(X,Y)$. Como σ é invariante à esquerda,

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y)(g) &= (L^*_{g^{-1}}\sigma)(g)(X(g),Y(g)) \\
&= \sigma(e)(TL_{g^{-1}} \cdot X(g), TL_{g^{-1}} \cdot Y(g)) \\
&= \sigma(e)(\xi,\eta) \\
&= \sigma(\xi_L,\eta_L)(e) = d\nu_L(\xi_L,\eta_L)(e) \\
&= (L^*_g d\nu_L)(\xi_L,\eta_L)(e) \\
&= (d\nu_L)(g)(TL_g \cdot \xi_L(e), TL_g \cdot \eta_L(e)) \\
&= (d\nu_L)(g)(TL_g \cdot \xi, TL_g \cdot \eta) = (d\nu_L)(g)(X(g),Y(g)) \\
&= (d\nu_L)(X,Y)(g).
\end{aligned}$$

onde na terceira linha se tomou $\xi = TL_{g^{-1}} \cdot X(g)$ e $\eta = TL_{g^{-1}} \cdot Y(g)$, na quarta se utilizou $\sigma(\xi_L,\eta_L) = d\nu_L(\xi_L,\eta_L)$. e na quinta o facto de ν_L ser invariante à esquerda. □

Agora, podemos concluir a prova do teorema. Como $\sigma = d\nu_L$, $d\sigma = dd\nu_L = 0$, e assim, $0 = d\varphi^*_\nu\omega = \varphi^*_\nu d\omega$. Da relação $\varphi_\nu \circ L_g = Ad^*_{g^{-1}} \circ \varphi_\nu$, segue que a submersividade de φ_ν em e é equivalente à submersividade de φ_ν em qualquer $g \in G$, ou seja, φ_ν é uma submersão sobrejectiva. Assim. φ^*_ν é injectiva, e assim $d\omega = 0$. □

Como as órbitas coadjuntas são simplécticas, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.1. *As órbitas coadjuntas de grupos de Lie de dimensão finita têm dimensão par.*

5.7 A Órbita Coadjunta de $SU(2)$

$SU(n)$ é conexo, compacto e tem dimensão $n^2 - 1$ ($SU(2)$ tem dimensão 3).

O grupo $SU(2)$ aparece em várias aplicações como a construção do grupo de gauge (não-abeliano) para as equações de Yang-Mills na física de partículas elementares.

Toda a matriz $A \in SU(2)$ pode ser expressa como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ (Assim, $SU(2)$ pode ser visto com a 3-esfera S^3 em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$). A álgebra de Lie de $SU(2)$ é o espaço das matrizes complexas 2×2 tais que $A^* = -A$ e traço nulo, representada por $\mathfrak{su}(2)$.

Lembremo-nos que temos um homomorfismo de grupos $SU(2) \to SO(3)$. Para $X \in SU(2)$ obtemos uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Considere-se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos fazer a identificação

$$(x, y, z) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} = B$$

e assim

$$X \overset{\phi}{\longmapsto} \phi_X, \qquad \phi_X(B) = XBX^{-1}$$

o que nos dá um isomorfismo de álgebras $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$.

$$\begin{aligned} (\phi_X)_* : \ & \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3) \\ & L \to [L, \cdot\,] \end{aligned}$$

Agora, $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ e $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$. Sejam $E_1, E_2, E_3 \in \mathfrak{su}(2)$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos ter

$$\phi_*(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

$$\phi_*(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

$$\phi_*(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

Um grupo de Lie actua sobre si próprio por conjugação:

$$\phi_X(A) = XAX^{-1}.$$

Diferenciando em ordem a A em $A =$ identidade obtém-se a representação adjunta $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Para $X \in SU(2)$,

$$Ad_X A \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}\left(Xe^{tA}X^{-1}\right)\Big|_{t=0} = XAX^{-1}.$$

Já sabemos que $\phi_A(X) = XAX^{-1}$ é uma rotação em $\mathbb{R}^3$. Assim, podemos dizer que a acção adjunta é uma rotação em $\mathbb{R}^3$:

$$Ad_A v = Av \qquad v \in \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$$

Daqui segue que as acções adjuntas de $SU(2)$ e $SO(3)$ vão ser as mesmas. Como $SU(2)$ e $SO(3)$ são ambos compactos, as órbitas adjuntas são isomorfas às órbitas coadjuntas. Repare-se que $ker(\phi_x) = \{\pm I\} \subseteq \mathfrak{su}(2)$ e $\phi_{-X} = \phi_X$.

Agora seja $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Consideremos a identificação

$$v \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3).$$

Note-se que nesta álgebra os parêntesis de Lie correspondem ao produto vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$, $[u, v] \longleftrightarrow u \times v$.

A acção coadjunta de G em $\mathfrak{g}^*$, o dual da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, é definida a partir da acção adjunta por

$$Ad^*_{g^{-1}} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*,$$

onde $Ad^*_{g^{-1}}$ é a aplicação dual de $Ad_{g^{-1}}$, i.e. é definida por

$$\langle Ad^*_{g^{-1}}(\mu), \xi\rangle = \langle \mu, Ad_{g^{-1}}(\xi)\rangle,$$

onde $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\langle\, ,\, \rangle$ representa o emparelhamento natural entre $\mathfrak{g}^*$ e $\mathfrak{g}$. Como estamos a trabalhar com matrizes,

$$\begin{aligned} \langle\, ,\, \rangle :\ & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \\ & \langle X, Y\rangle = -2\Re\left(tr(XY)\right) \end{aligned}$$

onde X e Y são escritos em termos da base ortonormada $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Identificamos $\mathfrak{so}(3)^*$ com $\mathbb{R}^3$ pelo produto interno habitual, i.e. se $\zeta, v \in \mathbb{R}^3$, temos $\langle \zeta, v\rangle = \zeta \cdot v$. Então, para $\zeta \in \mathfrak{so}(3)^*$ e $A \in SO(3)$:

$$\begin{aligned}\langle Ad^*_{A^{-1}}(\zeta), v\rangle &= \langle \zeta, Ad_{A^{-1}}(v)\rangle = \zeta \cdot A^{-1}v \\ &= ((A^{-1})^t\zeta)\cdot v = (A\zeta)\cdot v\end{aligned}$$

pois A é ortogonal (i.e. $(A^{-1})^t = A$).

A órbita coadjunta, $\mathcal{O}(\mu)$, através de $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é o subconjunto de $\mathfrak{g}^*$ definido por

$$\mathcal{O}(\mu) = \{Ad^*_{g^{-1}}(\mu)\,|g \in G\} = G\cdot\mu$$

Assim, identificando $\mathfrak{so}(3)^*$ com $\mathbb{R}^3$, $Ad^*_{A^{-1}}\zeta = A\zeta$ e a órbita coadjunta vai ser

$$\mathcal{O}(\zeta) = \{Ad^*_{A^{-1}}(\zeta)|A \in SO(3)\} = \{A\zeta|A\in SO(3)\},$$

que é a esfera em $\mathbb{R}^3$ de raio $\|\zeta\|$.

Agora, dados $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ podemos construir os vectores tangentes à órbita como:

$$\xi_{\mathbb{R}^3}(\zeta) = [\xi,\zeta] = \xi\times\zeta \in T_\zeta(\mathcal{O}(\zeta))$$

e

$$\eta_{\mathbb{R}^3}(\zeta) = [\eta,\zeta] = \eta\times\zeta \in T_\zeta(\mathcal{O}(\zeta)).$$

No caso geral, a demonstração desta expressão necessita da definição da aplicação exponencial. No entanto, no caso que estamos a tratar, em que $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^3$ e as órbitas são esferas em $\mathbb{R}^3$, é fácil de verificar que os vectores acima definidos são tangentes à esfera em ζ.

As órbitas coadjuntas têm estrutura de variedade simpléctica (foi provado por Kirillov-Konstant-Souriau), e a forma simpléctica[6] pode ser construída como

$$\omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \langle\mu, [\xi,\eta]\rangle$$

para $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e para todo o $\mu \in \mathcal{O}$.

Vamos verificar que esta forma é bem definida, ou seja, que o lado direito é independente da escolha de $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ que definem os vectores tangentes $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ e $\eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$. Observando que $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = \xi'_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ implica que $\langle\mu,[\xi,\eta]\rangle = \langle\mu,[\xi',\eta]\rangle$ para todo $\eta\in\mathfrak{g}$. Assim

$$\omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = \omega(\mu)(\xi'_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu))$$

[6] Nag é única.

pelo que ω é bem definida.

Também, como $\langle\, ,\, \rangle$ é não degenerado, $\omega(\mu)(\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu)) = 0$ para todo o $\eta^*_{\mathfrak{g}}(\mu)$ implica que $\langle \mu, [\xi, \eta]\rangle = 0$ para todo o η, o que significa que $\langle \mu, [\xi, \cdot\,]\rangle = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0$.

Repare-se que a órbita tem dimensão 2 (é simplesmente uma esfera em $\mathbb{R}^3$) pelo que a nossa 2-forma ω é automaticamente fechada porque é máxima.

Pela identificação habitual de $\mathfrak{so}(3)$ com $\mathbb{R}^3$, a estrutura simpléctica da órbita coadjunta torna-se

$$\omega(\xi_{\mathbb{R}^3}(\zeta), \eta_{\mathbb{R}^3}(\zeta)) = \langle \zeta, [\xi, \eta]\rangle = \zeta \cdot (\xi \times \eta).$$

Vamos mostrar que esta forma é invariante à acção coadjunta.

$$\begin{aligned}
&(Ad^*_{A^{-1}})^*\omega(\mu)(\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu), \eta_{\mathbb{R}^3}(\mu)) \\
&\qquad = \omega(Ad^*_{A^{-1}}\mu)((Ad^*_{A^{-1}})_*\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu), (Ad^*_{A^{-1}})_*\eta_{\mathbb{R}^3}(\mu)).
\end{aligned}$$

Agora, usamos o facto de estarmos em $SO(3)$: A transformação é linear, $Ad^*_{A^{-1}}v = Av$, e assim,

$$(Ad^*_{A^{-1}})_*\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu) = A_*\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu)$$

Note-se que $\xi_{\mathbb{R}^3}$ é um vector tangente à órbita em μ e estamos a fazer uma transformação linear desse vector. Mas podemos tomar o vector tangente a $A\xi$ em μ e assim, o que temos é

$$(Ad^*_{A^{-1}})_*\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu) = (A\xi)_{\mathbb{R}^3}(A\mu) = (Ad_A\xi)_{\mathbb{R}^3}(A\mu)$$

pelo que a nossa forma simpléctica se vai tornar

$$\begin{aligned}
&\omega(Ad^*_{A^{-1}}\mu)((Ad_A\xi)_{\mathbb{R}^3}(A\mu), (Ad_A\eta)_{\mathbb{R}^3}(A\mu)) \\
&\qquad \overset{def}{=} \langle Ad^*_{A^{-1}}\mu, [Ad_A\xi, Ad_A\eta]\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, para um $g \in G$ qualquer, $Ad_g\xi = g.\xi.g^{-1}$ e assim

$$[Ad_g\xi, Ad_g\eta] = [g.\xi.g^{-1}, g.\eta.g^{-1}] = g.[\xi, \eta].g^{-1} = Ad_g[\xi, \eta].$$

Deste modo, vamos obter

$$\begin{aligned}
&\omega(Ad^*_{A^{-1}}\mu)((Ad_A\xi)_{\mathbb{R}^3}(A\mu),(Ad_A\eta)_{\mathbb{R}^3}(A\mu)) \\
&\quad = \langle Ad^*_{A^{-1}}\mu, Ad_A[\xi,\eta]\rangle \\
&\quad = \langle Ad^*_A Ad^*_{A^{-1}}\mu, [\xi,\eta]\rangle \\
&\quad = \langle \mu, [\xi,\eta]\rangle \\
&\quad = \omega(\mu)(\xi_{\mathbb{R}^3}(\mu),\eta_{\mathbb{R}^3}(\mu)).
\end{aligned}$$

Agora notamos que podemos escrever a nossa forma simpléctica em termos da forma de volume de S^2, como

$$\omega = \frac{\lambda}{\|\mu\|},$$

onde λ é a forma de volume já bem conhecida de S^2 (vista como a esfera em $\mathbb{R}$ de raio $\|\mu\|$, ver exemplo 3, secção 3.1).

Exercício 5.3. *Verificar que* $\omega = \frac{\lambda}{\|\mu\|}$.

6 Sistemas Hamiltonianos

Dada uma função qualquer $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ numa variedade simpléctica queremos associar-lhe um campo vectorial cujo fluxo preserve a forma simpléctica e a função dada. Esse campo vectorial chama-se o *campo vectorial Hamiltoniano* dessa *função Hamiltoniana.*

6.1 Campos vectoriais Hamiltonianos e Simplécticos

Sejam $(\mathcal{M}, \omega)$ uma variedade simpléctica e $H : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ uma função suave. dH é uma 1-forma. Como ω é não-degenerada existe um único campo vectorial X_H em $\mathcal{M}$ tal que

$$dH = i_{X_H}\omega$$

Estamos a dizer que para $v \in V(\mathcal{M})$, $p \in \mathcal{M}$,

$$i_{X_H}\omega_p(v) = \omega_p(X_H, v),$$

e assim, $dH(v) = \omega(X_H, v)$.

Suponhamos que $\mathcal{M}$ é compacta ou, pelo menos que X_H seja completo[7], e seja $\rho_t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}$ a família de difeomorfismos[8] gerada por X_H:

$$\begin{cases} \rho_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}} \\ \frac{d\rho_t}{dt} \circ \rho_t^{-1} = X_H \end{cases}$$

Lema 6.1. *Cada difeomorfismo ρ_t preserva ω, i.e. $\rho_t^*\omega = \omega$.*

Demonstração. Pela fórmula de Cartan, e como ω é fechada,

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = di_{X_H}\omega + i_{X_H}\underbrace{d\omega}_{0} = d^2H = 0.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(\rho_t)^*\omega = (\rho_t)^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0,$$

e assim $(\rho_t)^*\omega = \omega$ pois $(\rho_t)^*\omega$ não varia com t e $\rho_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ □

Estamos a ver que toda a função em $(\mathcal{M}, \omega)$ nos dá uma família de simplectomorfismos. Note-se que a prova envolveu simultaneamente os factos de ω ser não-degenerada e fechada.

[7] Significa que o fluxo de X_H está definido para todo o $t \in \mathbb{R}$.

[8] Cada um destes difeomorfismos é um fluxo local de X_H.

Definição 6.1. *Um campo vectorial X_H tal que*

$$dH = i_{X_H}\omega$$

diz-se o campo vectorial Hamiltoniano com função Hamiltoniana H.

⋆

<u>Observação</u>: Se X_H é Hamiltoniano, então

$$\mathcal{L}_{X_H}H = i_{X_H}dH = i_{X_H}i_{X_H}\omega = 0,$$

i.e. campos vectoriais Hamiltonianos preservam as suas funções Hamiltonianas.

Exemplo 6.1. Seja $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n)$ e com forma simpléctica $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp^j$. Vamos determinar X_H. $\diamond$

Dado o sistema de coordenadas referido, X_H terá que ser uma combinação linear do tipo $X_H = \sum_{i=1}^n \left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right)$ com $a^i, b^i \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Assim, para um vector qualquer $v \in V(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega(v) &= \textstyle\sum_j dq^j \wedge dp^j \left(\sum_i \left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p^i}\right), v\right) \\ &= \textstyle\sum_{j,i} dq^j \wedge dp^j \left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p^i}, v\right) \\ &= \textstyle\sum_j \left(a^j dp^j(v) - b^j dq^j(v)\right) \\ &= \textstyle\sum_j \left(a^j dp^j - b^j dq^j\right)(v). \end{aligned}$$

Agora,

$$dH(v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial H}{\partial p^i}dp^i\right)(v).$$

Como os dq^j's e os dp^j's são linearmente independentes e $dH(v) = i_{X_H}\omega(v)$

$$\rightsquigarrow \qquad a^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \qquad b^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

ou seja,

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right).$$

◇

Definição 6.2. *Um campo vectorial X em $\mathcal{M}$ que preserva ω (i.e. tal que $\mathcal{L}_X \omega = 0$) diz-se um campo vectorial simpléctico.*

⋆

Estamos a ver que

$$X \text{ é simpléctico } \Leftrightarrow i_X\omega \text{ é fechada,}$$

(pois $di_X\omega = \mathcal{L}_X\omega - i_X d\omega = 0$) e que

$$X \text{ é Hamiltoniano } \Leftrightarrow i_X\omega \text{ é exacta.}$$

Note-se que nem todo o campo vectorial é Hamiltoniano, pois nem todo o campo vectorial Y torna $i_Y\omega$ exacta. No entanto, para qualquer função $F \in C^\infty(\mathcal{M})$ podemos sempre associar-lhe um campo vectorial Hamiltoniano. Assim, se $i_X\omega = dH$ para alguma função $H \in C^\infty(\mathcal{M})$, uma primitiva H de $i_X\omega$ é uma função Hamiltoniana de X.

Localmente, em todo o conjunto aberto contráctil, o Lema de Poincaré diz-nos que todo o campo vectorial simpléctico é Hamiltoniano.

Se $H^1_{deRham}(\mathcal{M}) = 0$, então todo o campo vectorial simpléctico é Hamiltoniano. Em geral, $H^1_{deRham}(\mathcal{M})$ dá-nos a obstrução para os campos vectoriais simplécticos serem Hamiltonianos.

Exemplo 6.2. No 2-Toro $(\mathcal{M}, \omega) = (T^2, d\vartheta \wedge d\varphi)$, os campos vectoriais $X_1 = \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ e $X_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ são simplécticos mas não são Hamiltonianos. Notemos que

$$H^1(T^2) = H^1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

em que $d\vartheta$ e $d\varphi$ são geradores:

$$[d\vartheta] \leftrightarrow (1,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$[d\varphi] \leftrightarrow (0,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

◇

6.2 Equações de Hamilton

Considere-se $(\mathcal{M},\omega) = (\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ com coordenadas $(q^1,\ldots,q^n,p^1,\ldots,p^n)$ e $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp^j$.

A equação

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = X_H(t,\rho(t)),$$

onde $\rho : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, i.e. $\rho(t) = (q^1(t),\ldots,q^n(t),p^1(t),\ldots,p^n(t))$, é equivalente às **Equações de Hamilton**. De facto, com $X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$ obtém-se facilmente

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt}(t) & = & \frac{\partial H}{\partial p^i} \\ \frac{dp^i}{dt}(t) & = & -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Definição 6.3. *A curva* $\rho_t = (q^1(t),\ldots,q^n(t),p^1(t),\ldots,p^n(t))$ *é uma curva integral de* X_H *se satisfaz*

$$\frac{d\rho_t}{dt} = X_H(t,\rho_t).$$

⋆

6.3 Variedades de Poisson

Consideremos uma função $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ e o campo vectorial Hamiltoniano X_H, que em coordenadas locais tem a expressão

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right).$$

Apliquemos X_H a F:

$$X_H(F) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p^i}\right).$$

Esta expressão familiar é simplesmente a expressão dos parêntesis de Poisson de F e H, i.e. $X_H(F) = \{H,F\}$.

Temos então a identificação $X_H(\cdot) \longleftrightarrow \{\,H,\cdot\,\}$.

Motivados por esta relação podemos agora definir os parêntesis de Poisson de duas funções.

Definição 6.4. *Seja* $(\mathcal{M},\omega)$ *uma variedade simpléctica e* $F, G : \mathcal{M} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$. *Os parêntesis de Poisson* $\{\ ,\ \}$ *de* F *e* G *são*

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G).$$

⋆

Da definição, vê-se que $\{F, G\} = X_F(G) = -X_G(F)$

Lema 6.2. *Os parêntesis de Poisson são invariante sob simplectomorfismos* ϕ

$$\{\phi^* F, \phi^* G\} = \phi^*\{F, G\}.$$

Demonstração. Utilizando $X_{\phi^* F} = \phi_* X_F$,

$$\begin{aligned} \{\phi^* F, \phi^* G\} &= \omega(X_{\phi^* F}, X_{\phi^* G}) = \omega(\phi_* X_F, \phi_* X_G) \\ &= \phi^*\{X_F, X_G\} = \phi^*\{F, G\}. \end{aligned}$$

□

Corolário 6.1. $\frac{d}{dt}(F \circ \phi_t^H) = \{H, F \circ \phi_t^H\}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F \circ \phi_t^H) &= \frac{d}{dt}(\phi_t^H)^* F = (\phi_t^H)^* X_H F = (\phi_t^H)^*\{H, F\} \\ &= \{(\phi_t^H)^* H, (\phi_t^H)^* F\} = \{H, F \circ \phi_t^H\} \end{aligned}$$

pois $H \circ \phi_t^H = H$ (Já vimos que o fluxo Hamiltoniano preserva H). □

Os parêntesis de Poisson são obviamente *antissimétricos*, $\{F, G\} = -\{G, F\}$, e têm a *propriedade da derivação*, $\{H, FG\} = \{H, G\}G + F\{H, G\}$. Uma propriedade menos óbvia vem do facto de ω ser fechada: $\{\ ,\ \}$ satisfaz a *identidade de Jacobi*.

Lema 6.3. *Os parêntesis de Poisson* $\{\ ,\ \}$ *satisfazem:*

1. $\{F, G\} = -\{G, F\}$ *(antissimetria);*
2. $\{H, FG\} = \{H, F\}G + F\{H, G\}$ *(Leibnitz);*
3. $\{G, \{F, H\}\} + \{F, \{H, G\}\} + \{H, \{G, F\}\} = 0$ *(identidade de Jacobi).*

Demonstração. 1. $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = -\omega(X_G, X_F) = -\{G, F\}$.

2. $\{H, FG\} = X_H(FG) = X_H(F)G + FX_H(G) = \{H, F\}G + F\{H, G\}$.

3. Utilizamos a fórmula alternativa para a derivada exterior:

$$d\omega(X_F, X_G, X_H) = X_F\omega(X_G, X_H) - \omega([X_F, X_G], X_H) + \text{cíclicas.}$$

Agora,

$$X_F\omega(X_G, X_H) = X_F\{G, H\} = \{F, \{G, H\}\},$$

e

$$\begin{aligned} -\omega([X_F, X_G], X_H) &= -[X_F, X_G](H) \\ &= -X_F X_G(H) + X_G X_F(H) \\ &= -X_F\{G, H\} + X_G\{F, H\} \\ &= -\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{F, H\}\} \end{aligned}$$

Então, $d\omega(X_F, X_G, X_H) = \{G, \{F, H\}\}$ + cíclicas ou seja,

$$d\omega(X_F, X_G, X_H) = \{G, \{F, H\}\} + \{F, \{H, G\}\} + \{H, \{G, F\}\}$$

e $d\omega = 0$ implica a identidade de Jacobi.

□

Definição 6.5. *Uma variedade de Poisson é um variedade $\mathcal{M}$ com uma operação bilinear $\{\cdot, \cdot\} : \Omega^0(\mathcal{M}) \times \Omega^0(\mathcal{M}) \to \Omega^0(\mathcal{M})$ que satisfaz:*

1. *(Antissimetria)* $\{F, G\} = -\{G, F\}$*;*
2. *(Regra de Leibnitz)* $\{H, FG\} = \{H, F\}G + F\{H, G\}$*;*
3. *(Identidade de Jacobi)*$\{G, \{F, H\}\} + \{F, \{H, G\}\} + \{H, \{G, F\}\} = 0$.

⋆

Já vimos que todas as variedades simplécticas têm uma estrutura de Poisson. Mas nem toda a estrutura de Poisson é simpléctica.

Definição 6.6. *Uma Álgebra de Poisson* $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ *é uma álgebra comutativa e associativa* $\mathcal{P}$ *com parêntesis de Lie que satisfaz a regra de Leibnitz:*

$$\{H, FG\} = \{H, F\}G + F\{H, G\}.$$

⋆

Proposição 6.1. $X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G]$

Demonstração.

$$\begin{aligned} X_{\{F,G\}}(H) &= \{\{F,G\},H\} = -\{H,\{F,G\}\} \\ &\overset{id.Jacobi}{=} \{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} \\ &= X_F\{G,H\} + X_G\{F,H\} \\ &= X_F\{G,H\} - X_G\{H,F\} \\ &= X_F X_G(H) - X_G X_F(H) \\ &= [X_F, X_G](H) \end{aligned}$$

□

6.4 Sistemas Integráveis

Definição 6.7. *Um* **sistema Hamiltoniano** *é um triplo* $(\mathcal{M}, \omega, H)$ *onde* $(\mathcal{M}, \omega)$ *é uma variedade simpléctica e* $H : \mathcal{M} \overset{C^\infty}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ *é uma função, chamada função Hamiltoniana.*

⋆

Teorema 6.1. $\{H, F\} = 0$ *sse* F *é constante ao longo de curvas integrais de* X_H*.*

Demonstração. Seja ϕ_t o fluxo de X_H. Então

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(F \circ \phi_t) &= \rho_t^* \mathcal{L}_{X_H} F \overset{Cartan}{=} \rho_t^* i_{X_H} dF = \rho_t^* i_{X_H} i_{X_F} \omega \\ &= \rho_t^* \omega(X_H, X_F) = \rho_t^* \{H, F\} = 0. \end{aligned}$$

□

Uma função F como esta diz-se uma **integral do movimento** (ou uma primeira integral ou uma constante do movimento). Em geral, sistemas Hamiltonianos não admitem integrais de movimento que sejam independentes da função Hamiltoniana. As funções $F_!, \ldots, F_n$ em $\mathcal{M}$ dizem-se independentes se $(dF_1)_p, \ldots, (dF_n)_p$ são linearmente independentes em todos os pontos p nalgum subconjunto aberto denso de $\mathcal{M}$.

Definição 6.8. *Um sistema Hamiltoniano $(\mathcal{M}, \omega, H)$ é (completamente) integrável se possui $n = \frac{1}{2}dim(\mathcal{M})$ integrais de movimento independentes, $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$, tal que*

$$\{F_i, F_j\} = 0, \qquad \forall i, j.$$

⋆

Referências

[1] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir Moscovo, 1987.

[2] A. Baker, *Matrix Groups - An Introduction to Lie Group Theory*, Springer 2002.

[3] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes 2000, http://math.berkeley.edu/acannas.

[4] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[5] Kai Cieliebak, *Symplectic Geometry*, Lecture Notes, http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼kai/, 2002.

[6] R.W.R. Darling, *Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, 1994.

[7] V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[8] A. Haviv, *The Duistermaat-Heckman measure for the coadjoint orbits of compact Lie groups*, preprint, http://www.ma.huji.ac.il/∼haviv, 1998.

[9] E. Lerman, *Symplectic Geometry and Hamiltonian Systems*, Lecture Notes, http://www.math.uiuc.edu/∼lerman/, 2001.

[10] J. Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, second edition, Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] D. McDuff, *A Glimpse into Symplectic Geometry*, in Mathematics - Frontiers and Perspectives 2000, (175-187), International Mathematical Union.

[12] E. Meinrenken, *Symplectic Geometry*, Lecture Notes, University of Toronto, http://www.math.toronto.edu/mein/, 2000.

[13] P. Michor, *Topics in Differential Geometry*, Lecture Notes, http://www. mat.univie.ac.at/∼michor/, 2001.

[14] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol I, second edition, Publish or Perish, 1979.

[15] W. Taylor, *Coadjoint Orbits and Conformal Field Theory*, PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1993.

[16] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, second edition, Oxford, 1991.