

Université catholique de Louvain
Faculté des sciences appliquées
Unité de génie civil et environnemental



**Études numérique et expérimentale de la
propagation de fissures dans les murs en maçonnerie
Approches macroscopique et microscopique**

Mémoire présenté

par

Sébastien Blaise

&

Gevriye Gecer

en vue de l'obtention du diplôme
d'Ingénieur Civil des Constructions

Promoteurs : **Prof. JF. Remacle**
Prof. JF. Thimus

Assesseurs : **Nicolas Chevaugeon**
Laurent Delannay
Amine Ouaar
Céline Savary

Louvain-la-Neuve
Année académique 2004-2005

Remerciements

Nous remercions tout particulièrement Jean-François Remacle qui nous a soutenus avec tant d'entrain tout au long de ce semestre. Son enthousiasme face à notre travail nous aura permis de réaliser cette tâche d'une humeur plus légère. Ses connaissances qu'il a partagées avec nous et ses conseils avisés furent d'une grande utilité.

Nous exprimons notre reconnaissance envers Jean-François Thimus pour nous avoir guidés vers ce sujet et pour l'aide qu'il nous a apportée dans la réalisation de ce travail.

Un grand merci à Nicolas pour le temps qu'il a consacré à nous prodiguer son aide précieuse. Sans cette assistance, il est fort probable que nous serions toujours à nous dépêtrer dans la profonde théorie des éléments finis.

Nous remercions très chaleureusement Amine pour l'appui qu'il nous a fourni, tant par ses conseils que par son assistance dans la réalisation des simulations avec le logiciel Abaqus.

Nous tenons à remercier vivement toutes les personnes qui ont permis la réalisation de la partie expérimentale. Nous remercions Guy Henriët qui a coordonné toute l'organisation des essais effectués. Nous remercions également toute l'équipe du Laboratoire de Génie Civil, et en particulier Stéphane qui fut toujours disponible pour nous et sans qui notre mur aurait certainement cédé avant même sa mise en charge.

Nous remercions Laurent Delannay d'avoir accepté de prendre le temps de lire notre mémoire ainsi que Céline pour son consentement immédiat malgré notre demande tardive.

Merci à l'entreprise Cassart Special Products S.A. pour nous avoir aimablement autorisé à utiliser et reproduire des résultats de laboratoire leur appartenant.

Enfin, nous tenons à remercier nos proches et amis, pour leurs relectures comme pour le soutien et les conseils qu'ils nous ont apportés durant toute la période de préparation de ce travail; ainsi que toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'aboutissement de cet ouvrage.

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction à la mécanique linéaire de la rupture	6
1.1 Au niveau microscopique	6
1.2 Fissure, modes d'ouverture	9
1.3 L'Énergie de Griffith	10
1.4 Facteurs d'intensité de contraintes	12
1.5 Zone plastique	16
1.5.1 Approche d'Irwin	16
1.5.2 Forme de la zone plastique	17
2 Approche énergétique	20
2.1 Établissement des déplacements	20
2.1.1 Résolution de problèmes d'équilibre en élasticité	20
2.1.2 Convergence des solutions	23
2.2 Propagation de la fissure	27
2.2.1 Principe général	27
2.2.2 Aspects concernant l'implémentation	27
2.3 Analyse des résultats	32

2.3.1	Champ de contraintes à proximité d'une anomalie	32
2.3.2	Valeur du taux de restitution d'énergie	38
2.3.3	Cas des modes purs	41
2.3.4	Poutre en cisaillement	44
2.3.5	Matériau hétérogène	44
3	Modélisation par un treillis de poutres	47
3.1	Fonctionnement du modèle	48
3.1.1	Équations du modèle	48
3.1.2	Aspects concernant l'implémentation	50
3.2	Analyse des résultats	52
3.2.1	Déplacements	52
3.2.2	Champ de contraintes en tête de fissure	53
3.2.3	Cas des modes purs	55
3.2.4	Influence de la taille du maillage	57
3.2.5	Influence de l'orientation du maillage	59
3.2.6	Comparaison avec des résultats existants	63
3.2.7	Essai quatre points sur une poutre	64
3.2.8	Matériau hétérogène	67
4	Confrontation des deux méthodes	69
4.1	Limitations dans le chemin de fissuration	69
4.2	Facilité d'implémentation	70
4.3	Indépendance des solutions	71
4.4	Matériau modélisable	72
4.5	Précision	72

4.6	Modélisation du multimatériaux	72
4.7	Temps d'exécution	73
4.8	Récapitulatif	78
5	Application au mur en maçonnerie	80
5.1	Résistance des matériaux	80
5.1.1	Mortier de jointoiment	81
5.1.2	Brique	82
5.1.3	Récapitulatif	83
5.2	Essai sur le mur en briques	84
5.2.1	Essai quatre points	84
5.2.2	Simulation préalable	85
5.2.3	Observations en laboratoire	87
5.2.4	Interface mortier-brique	90
5.2.5	Simulation postérieure	92
5.2.6	Influence du maillage	94
5.2.7	Estimation des paramètres par simulation	96
5.3	Essai antérieur	97
5.3.1	Matériaux	98
5.3.2	Essai sur mur	99
6	Extension à des cas plus pratiques	102
6.1	Effet du chaînage des murs	102
6.2	Cas d'une façade simple	105
6.2.1	Tassement au centre de la façade	106
6.2.2	Gonflement au centre de la façade	106

Conclusion	110
Références	I

Introduction

La rupture est un problème à prendre en compte dans la construction de tout édifice ou structure. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement des structures complexes lié aux progrès technologiques. Les préoccupations des bureaux d'études tournent autour de la conception de nouveaux matériaux, du prolongement de la durée de vie des pièces et de la prédiction des ruptures en service. Ces analyses sont centrées sur la notion de nocivité du défaut, pouvant apparaître sous la forme de fissure.

La fissuration prend en compte l'existence de défauts de fabrication tels que des inclusions, des vides dans le matériau ou encore de zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour atteindre une taille pour laquelle la structure atteint la ruine. Différents types de fissuration sont à distinguer :

- la fissuration stable qui comprend :
 - la fissuration quasi-statique sous une charge constante
 - la fissuration par fatigue sous une charge répétée
 - la fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement
- la fissuration instable qui est instantanée et à laquelle peut conduire la fissuration stable

Nous ne considérerons dans ce travail que la fissuration quasi-statique sous charge constante. Aucun effet dynamique ne sera donc pris en compte, la fissuration en maçonnerie étant en général un phénomène assez lent.

Il existe principalement deux modélisations de la fissuration dans les structures : par la mécanique de l'endommagement et par la mécanique de la rupture. La première prend en compte les défauts dans le matériau, comme les fissures, par des variables d'endommagement. Celles-ci sont des variables qui représentent l'état du matériau. De

cette manière, les zones matérielles contenant un grand nombre de défauts possèdent une valeur de la variable d'endommagement élevée, diminuant les qualités de résistance du matériau. Cette approche reste donc une approche continue. Nous ne nous attarderons pas sur cette théorie qui ne fait pas l'objet de ce travail, mais plutôt sur la mécanique linéaire de la rupture, qui considère l'existence d'une ou plusieurs fissures dans le matériau autour desquelles les contraintes, déformations et déplacements sont discontinus. Les fissures deviennent de nouvelles frontières internes du matériau et la fissure est donc prise en compte géométriquement. Depuis le milieu du **XX^e** siècle, de nombreuses avancées de cette approche permettent de mieux prévenir le risque de rupture. Plus d'informations sur la mécanique de la rupture peuvent être trouvées dans [Mia95], [Zeg03] et [Par04].

La fiabilité d'une construction en maçonnerie est liée à son aptitude à répondre aux objectifs de sa conception pendant une durée déterminée et pour des conditions d'exploitation spécifiées. Il est rare qu'une construction ne comporte aucune fissure. Il s'agit d'un problème classique et fréquent dont la gravité dépend du type de défaut et de l'importance du risque encouru. La structure est souvent soumise à un danger susceptible de constituer une menace pour sa stabilité d'ensemble ou celle de l'un des constituants structuraux. L'origine des désordres affectant un mur en maçonnerie est très souvent liée à la fissuration. Dans un grand nombre de cas, les fissures dans les maçonneries n'ont pas de conséquences dramatiques, mais mieux vaut les éviter au maximum.

Les fissures apparaissent lorsque les efforts de traction agissant sur la maçonnerie sont trop importants pour être absorbés par l'élasticité de celle-ci. S'agissant d'une combinaison de différents facteurs, ces efforts de traction peuvent devenir très complexes. Parmi ces facteurs, nous pouvons différencier deux types.

Les facteurs externes, provenant des charges imprévues agissant sur la maçonnerie. Un exemple fréquent est le tassement différentiel, c'est-à-dire le tassement partiel des fondations. Un autre exemple tout aussi classique est la fissuration due au fléchissement des poutres maîtresses ou des planchers. Pour y remédier, il convient donc de bien concevoir les fondations et les poutres porteuses afin que celles-ci offrent une résistance suffisante à la déformation ; ou de prévoir des joints élastiques aux endroits adéquats.

Les facteurs internes, quant à eux, sont les tensions apparaissant d'elles-mêmes dans la maçonnerie, sans aucune influence extérieure. Ces tensions internes sont provoquées

par les variations de dimensions que subit la maçonnerie au fil des ans. La maçonnerie est en effet généralement liée de manière rigide aux autres parties de la construction, de sorte que des variations de longueur ne peuvent se produire, provoquant ainsi des tensions. Ces variations de longueur sont dues à différentes causes physiques et chimiques. L'une de ces causes est la température. La maçonnerie en briques possède en effet un coefficient de dilatation thermique de l'ordre de $0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/m}^\circ \text{C}$ ce qui, pour une variation de température de 20°C sur un mur de 10 m de dimension nous donne une variation de longueur de 1 mm . C'est assez faible mais cela peut déclencher la formation de fissures. Une autre cause de tension interne est l'humidité. En effet, tout comme le bois, les matériaux tels que la brique se contractent et se dilatent sous l'effet de l'humidité. La dilatation s'effectuant dans une brique passant d'un état entièrement sec à un état entièrement saturé d'eau est d'environ 1 mm/m ce qui cette fois nous donne un déplacement de 10 mm pour un mur de 10 m . Cette cause est donc déjà nettement plus importante. Les facteurs chimiques constituent une autre cause de déformation. Ces facteurs ont très peu d'influence sur la brique, mais pour les matériaux à base de ciment le retrait dû au durcissement peut être très important. Ce retrait, contrairement aux déformations causées par les différences de température et d'humidité, est irréversible. Pour la maçonnerie de briques, ce retrait n'interviendra que pour les joints de mortier et des microfissures pourront apparaître.

La prédiction de la direction de fissuration en maçonnerie peut prendre une importance indéniable pour certaines structures. En effet, certaines fissures n'occasionnent elles-mêmes aucun problème structurel alors que d'autres peuvent entraîner des conséquences désastreuses. Une fissure présente dans un pont en maçonnerie produira par exemple des désordres moins graves si elle se propage vers sa fibre supérieure en compression (la fissure n'entraînera alors pas de désordres trop importants) que vers sa fibre inférieure en traction (pouvant conduire à la rupture du pont). Une fissure peut également rejoindre un autre défaut ou un matériau plus résistant dans la maçonnerie et alors s'arrêter ; ou bien elle peut se propager jusqu'à la ruine. La prédiction de la propagation des fissures permet donc de mesurer le danger représenté par un défaut présent et ainsi d'évaluer le besoin ou l'urgence d'une intervention. Mais la ruine n'est pas le seul problème causé par la fissuration. L'étanchéité des structures peut être détériorée par la fissuration. L'inconvénient esthétique causé par la fissuration peut également devenir très important dans le cas de certains édifices. De manière générale, la connaissance et la modélisation des mécanismes de dégradation permettent d'estimer

les risques de défaillance et de définir les stratégies les plus adaptées au maintien des performances souhaitées.

Ce travail a pour objectif la modélisation de la propagation de la fissuration dans les murs en maçonnerie. Cela implique une recherche préalable sur la propagation de fissures en milieu homogène. Nous utiliserons la mécanique de la rupture, qui se sépare en deux grandes écoles. La première est la mécanique linéaire de la rupture qui considère que la zone de plastification est insignifiante et n'est pas prise en compte (elle peut néanmoins être parfois prise en compte par des facteurs correctifs), utilisée pour des matériaux fragiles comportant un palier plastique très réduit. La seconde est la mécanique de la rupture considérant la plastification, utilisée pour les matériaux à tendance ductile, c'est-à-dire comportant un palier plastique non négligeable. Pour notre mur de maçonnerie, nous adopterons l'approche élastique considérant les matériaux comme fragiles. Cette hypothèse sera validée par l'allure de la courbe contraintes-déformations obtenue par l'essai expérimental réalisé. Du point de vue de la rupture, il existe deux critères courants dans la mécanique de la rupture pour prédire la direction de propagation d'une fissure :

- Pour le critère de restitution d'énergie maximale, la direction est telle que la restitution d'énergie pour un incrément de fissure est maximale ;
- Le critère de maximum de la contrainte principale postule que la propagation s'oriente dans la direction principale du tenseur du champ de contraintes en front de fissure où la traction est maximale ;

Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons ces deux critères de restitution d'énergie maximale et de maximum de la contrainte principale. Le critère de restitution d'énergie sera appliqué par plusieurs simulations de propagation virtuelle de fissuration dans différentes directions parmi lesquelles nous choisirons celle pour laquelle la restitution d'énergie est maximale. Cette méthode est développée en détail, par exemple dans l'analyse de [Ing03]. Nous utiliserons, pour les calculs des déplacements, une méthode d'éléments finis linéaires, sur laquelle plus d'informations pourront être trouvées dans [Leg03] et plus particulièrement dans [Bon05]. Le choix du critère de propagation est néanmoins indépendant du modèle de déplacements considéré. Ce critère de restitution d'énergie présente l'avantage d'être basé sur le calcul de l'énergie potentielle du système, paramètre qui se calcule avec beaucoup de précision dans une méthode par éléments finis.

Pour ce qui est du critère de maximum de contraintes principales, nous utiliserons

un modèle microscopique pour lequel le matériau est représenté par un treillis de micro-poutres transmettant des efforts entre elles. Contrairement à l'approche macroscopique considérant un matériau homogène et continu possédant des propriétés physiques globales, une approche microscopique reflète davantage l'organisation intime du matériau en se plaçant au niveau de la microstructure de celui-ci et considérant cette microstructure comme un système discret. Cette méthode est détaillée dans de nombreux articles, notamment [Cha02a], [Cha02b], [Cha01], [Sch96], [Sch97], [van02], [Pra03] et [Lil03]. Cette méthode, en prenant en compte la microstructure du matériau, devrait être capable de modéliser plus fidèlement celui-ci.

Les modélisations développées dans ce travail permettent d'éviter de lourds calculs théoriques tels que le calcul des facteurs d'intensité de contraintes (facteurs caractérisant l'état de contraintes autour de la zone fissurée et qui dépend de la géométrie du corps fissuré, de ses dimensions ainsi que du mode de sollicitation ; ce concept sera introduit dans la partie théorique). Elles sont basées sur des principes et méthodes très simples et là réside une grande partie de leur intérêt.

Des résultats obtenus expérimentalement au laboratoire de Génie Civil permettront la confrontation avec les simulations numériques obtenues. L'essai réalisé consiste en la mise en flexion d'un tronçon de mur en maçonnerie, afin de visualiser où s'amorce la fissure, ainsi que le trajet que prendra celle-ci. Des essais sur les matériaux (brique et mortier) ont également été réalisés ainsi que des essais de mesure d'adhérence entre la brique et le joint.

Six chapitres principaux composeront le texte présenté ici. Les concepts fondamentaux sur la mécanique de la rupture élastique seront tout d'abord introduits. Ensuite, viendra le développement de la première approche basée sur le critère énergétique, ainsi que les principaux résultats obtenus afin de confronter ceux-ci avec la théorie ou des résultats connus. Le troisième chapitre sera consacré à la seconde approche, utilisant le maximum de la contrainte principale en essayant également de reproduire des résultats connus. Une confrontation des deux approches sur divers points de vue (résultats, facilité d'implémentation, . . .) suivra. Le cinquième chapitre traitera des résultats obtenus expérimentalement ainsi qu'à leur comparaison avec les résultats numériques. Finalement, le dernier chapitre sera consacré à des cas plus pratiques de structures en maçonnerie.

Chapitre 1

Introduction à la mécanique linéaire de la rupture

Ce premier chapitre constitue un rappel des concepts fondamentaux liés à la rupture des matériaux. Ces concepts nous permettront de mieux comprendre le comportement du matériau soumis à la fissuration et offriront une base théorique aux méthodes développées dans cet ouvrage.

1.1 Au niveau microscopique

L'approche atomique consiste à étudier une rupture par clivage en considérant les forces des liaisons atomiques. Considérons un cristal parfait non chargé; il est possible d'estimer la contrainte nécessaire pour le clivage de ce matériau à partir de son module d'élasticité. Nous allons uniquement nous intéresser à la contrainte qui induit un clivage perpendiculaire aux plans cristallographiques (mode I de rupture), les contraintes de cisaillement sont négligées. La contrainte σ est égale [Zeg03] à la force qu'il faut exercer pour casser la liaison entre deux atomes (figure 1.1) multipliée par le nombre d'atomes, par unité d'aire. La relation entre cette force et le déplacement des atomes autour de leur position d'équilibre (figure 1.2) est la somme d'une composante d'attraction (en $1/r^2$) et d'une composante de répulsion (en $-1/r^9$), où r est la distance interatomique. La contrainte normale σ commence par augmenter, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à atteindre une valeur nulle.

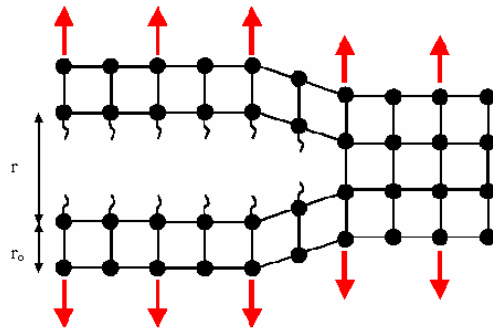


FIGURE 1.1 – Rupture par clivage

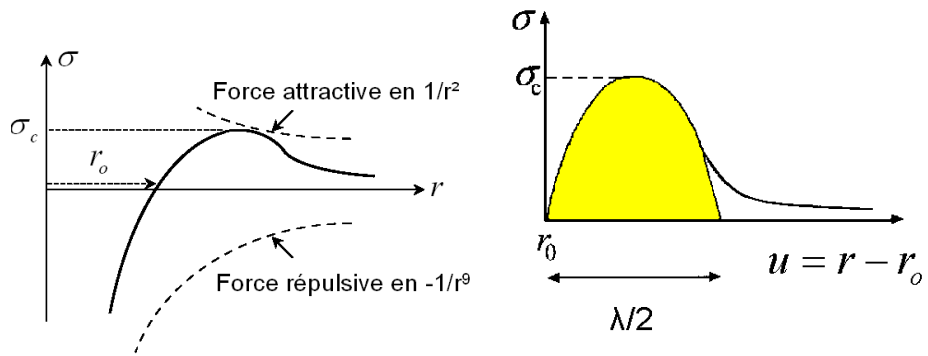


FIGURE 1.2 – Contrainte de liaison σ et son approximation

La contrainte de cohésion σ_c est la contrainte théorique de clivage. Pour de petites valeurs du déplacement interatomique $u = r - r_o$, la courbe contrainte-déformation peut être approximée par une courbe sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda/2$ (figure 1.2).

$$\sigma = \sigma_c \sin\left(\frac{2\pi u}{\lambda}\right) \quad (1.1)$$

Comme u est petit par rapport à λ , nous pouvons réécrire la contrainte sous la forme :

$$\sigma = \sigma_c \frac{2\pi u}{\lambda} \quad (1.2)$$

Par la loi de Hooke, nous avons :

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{r - r_o}{r_o} = E \frac{u}{r_o} \quad (1.3)$$

En combinant les deux expressions précédentes, nous pouvons écrire :

$$\sigma_c = \frac{\lambda E}{2\pi r_o} \quad (1.4)$$

Le clivage d'un cristal résulte de la formation de deux surfaces libres. Notons l'énergie nécessaire pour la création d'une surface libre γ_s . En première approximation, nous pouvons dire que l'énergie de clivage est de $2\gamma_s$ et est égale à l'intégrale de σ de 0 à $\lambda/2$.

$$2\gamma_s = \int_0^{\lambda/2} \sigma du \quad (1.5)$$

Autrement,

$$\gamma_s = \frac{\lambda \sigma_c}{2\pi} \quad (1.6)$$

combiné à (1.4), cela donne

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{r_o}} \quad (1.7)$$

L'énergie de surface γ_s dépend du module d'élasticité. Une bonne approximation est : $\gamma_s \cong Er_o/20$ [Par04]. Ceci implique que le rapport σ_c/E est de l'ordre de $1/5$. Cependant, nous observons que la contrainte théorique de clivage qui vient d'être calculée est de 10 à 1000 fois plus grande que les contraintes de rupture mesurées expérimentalement. La différence entre les valeurs théoriques et les mesures expérimentales s'explique par des mécanismes d'amplification de la contrainte liés à la présence dans les matériaux de défauts sous forme de fissures ou d'entailles aiguës qui concentrent les contraintes dans leur voisinage.

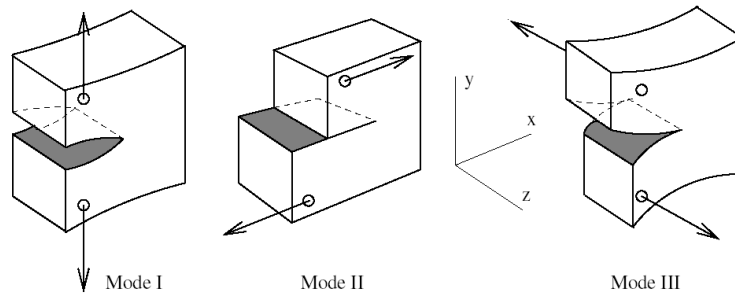


FIGURE 1.3 – Les trois modes de rupture

1.2 Fissure, modes d'ouverture

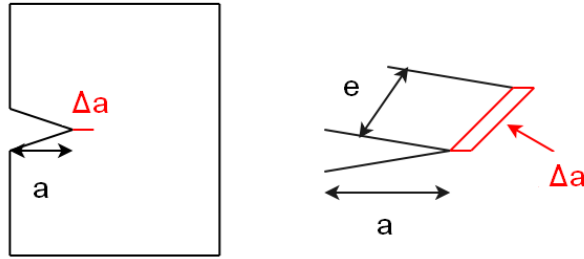
Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, une fissure est définie comme étant une entaille de forme quelconque dans un solide constitué d'un matériau à comportement élastique linéaire. La fissure dans le solide au repos est supposée d'épaisseur nulle et les deux lèvres de la fissure sont libres de contrainte.

Sous l'effet d'un chargement externe, les lèvres de la fissure se déplacent l'une par rapport à l'autre. Il y a trois possibilités de déplacement relatif pour une fissure (figure 1.3).

- Le mode I : mode d'ouverture, pour lequel le déplacement relatif est dans la direction normale à la fissure.
- Le mode II : mode de cisaillement plan, pour lequel le déplacement relatif est tangent à la fissure et reste dans le plan de référence.
- Le mode III : mode de cisaillement antiplan, pour lequel le déplacement relatif est tangent à la fissure et perpendiculaire au plan de référence. Dans notre modèle 2D, nous traiterons uniquement des fissures de modes I et II.

Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans plusieurs modes simultanément, le principe de superposition est applicable en élasticité linéaire.

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} \quad (1.8)$$

FIGURE 1.4 – Propagation de la fissure sur une longueur Δa

1.3 L'Énergie de Griffith

Considérons un matériau contenant une fissure de longueur a (figure 1.4). L'extension Δa de cette fissure s'accompagne du bilan d'énergie suivant [Zeg03] :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elast.} + \Delta U \quad (1.9)$$

avec

- ΔW_{ext} : la variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures)
- $\Delta W_{elast.}$: la variation d'énergie élastique (emmagasinée)
- ΔU : l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa

Dans la théorie de Griffith qui s'applique à une rupture fragile, l'énergie ΔU correspond à l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces dans le matériau. L'énergie de Griffith G , également appelée taux de restitution d'énergie représente la variation de ΔU par unité de surface correspondante, ou encore :

$$G = \frac{\Delta U}{\Delta A} \quad (1.10)$$

où $A = e\Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur une longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e . En faisant tendre ΔA vers 0 et en considérant une épaisseur unitaire, nous obtenons :

$$G = \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial a} \quad (1.11)$$

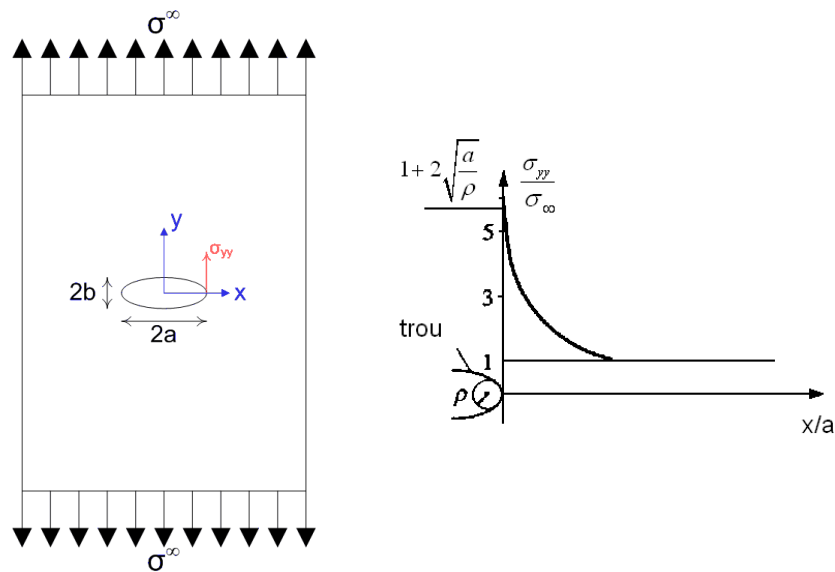


FIGURE 1.5 – Effet d'un trou elliptique sur la répartition des contraintes dans une plaque

Si nous considérons que γ_s est l'énergie spécifique de création de surface, nous pouvons encore écrire :

$$G = 2\gamma_s \quad (1.12)$$

Pour comprendre la signification de G , nous pouvons encore imaginer le modèle suivant : remplaçons les liens entre les atomes par des ressorts de raideur k . Suite au chargement de l'ensemble du système, les ressorts, pour lesquels la tension limite est atteinte, lâchent et restituent de l'énergie au système.

1.4 Facteurs d'intensité de contraintes

Considérons une plaque de dimensions infinies soumise à une contrainte de traction uniforme σ_∞ et comprenant un trou. Le champ de contraintes à l'intérieur de la plaque est influencé par la présence du trou. La figure 1.5 montre schématiquement, dans le cas d'un trou elliptique, la variation des contraintes σ_{yy} le long de l'axe x . La valeur nominale (en $x = a$) de la contrainte σ_{yy} peut s'exprimer [Sch00] par :

$$\sigma_{yy,max} = \sigma_\infty \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) = \sigma_\infty \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \quad (1.13)$$

avec :

- σ_{yy} : contrainte dans la direction y sur une surface de normale y
- σ_∞ : contrainte uniforme appliquée sur la plaque
- a, b : demi-axes de l'ellipse constituant le trou
- ρ : rayon de courbure au sommet du trou elliptique

Pour un trou circulaire ($a = b$), nous trouvons à partir de (1.13) la valeur de $\sigma_{yy,max} = 3\sigma_\infty$. Il y a donc une concentration de contraintes d'un facteur 3 dans ce cas. Cette concentration de contrainte dépend évidemment de la forme du trou dans la plaque. Elle est plus importante dans le cas d'un trou elliptique, elle tend vers l'infini lorsque b tend vers 0 (figure 1.6). Il s'agit là d'une fissure très fine ($\rho \rightarrow 0$)¹. Dans ce cas, le champ des contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$, approximé au premier ordre, proche du front de fissure peut être décrit, sur base de la théorie élastique, par les expressions suivantes [Par04] :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \end{cases} \quad (1.14)$$

avec

- K : facteur d'intensité de contraintes
- r, θ : coordonnées polaires dans le plan x, y

Les relations (1.14) utilisent toutes K , le facteur d'intensité de contraintes. Ce facteur dépend du cas de charge du matériau et des dimensions de la fissure². K est défini par

1. Le problème de la plaque contenant une fissure aiguë et celui de la plaque contenant un trou circulaire en son centre seront davantage illustrés à la section 2.3.

2. Pour un cas plus général, les facteurs d'intensité de contraintes dépendent de la géométrie du corps, de ses dimensions ainsi que du chargement appliqué.

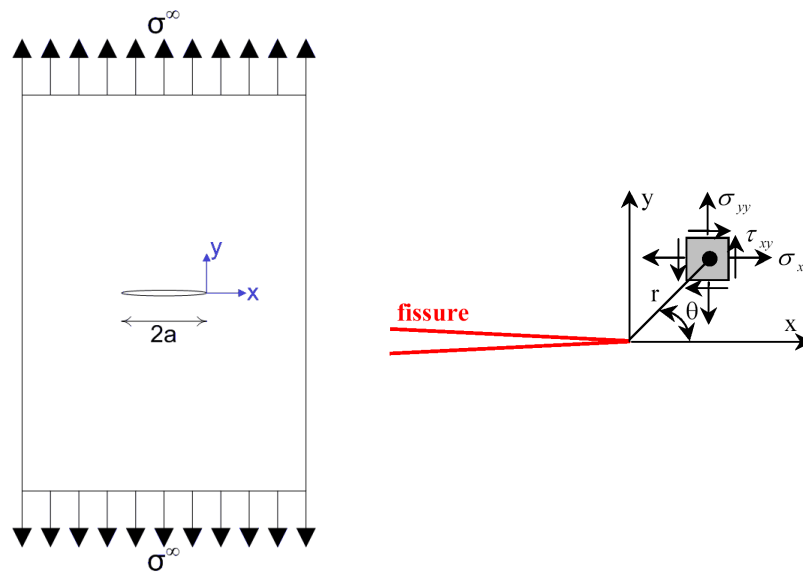


FIGURE 1.6 – Définition des contraintes au front de la fissure

la relation suivante :

$$K = Y \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (1.15)$$

avec

- Y : facteur de correction, fonction de a
- a : dimension déterminante de la fissure

Le facteur d'intensité de contraintes s'exprime en $N/mm^{3/2}$. Le facteur de correction Y peut être réécrit sous la forme d'un produit de trois facteurs de correction :

$$Y = Y_e Y_f Y_s \quad (1.16)$$

avec (figure 1.7) :

- Y_e : facteur de correction dépendant de la forme de la fissure elliptique (ce facteur de correction n'intervient que dans le cas tridimensionnel, dépend du facteur a/c)
- Y_f : facteur de correction dépendant de la dimension finie de la plaque (ce facteur dépend des rapports a/w et a/t)
- Y_s : facteur de correction pour le cas où la fissure atteint une surface libre (ce facteur dépend des rapports a/w et a/c)

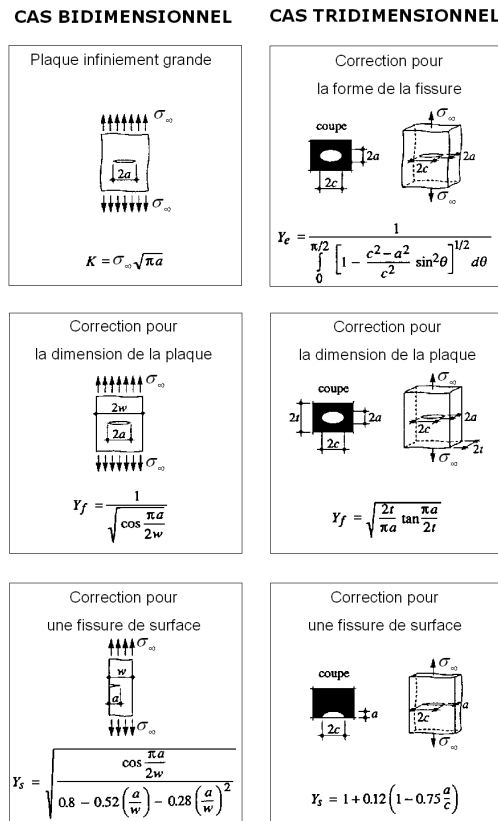


FIGURE 1.7 – Formulation analytique des facteurs de correction - Tiré de [Sch00]

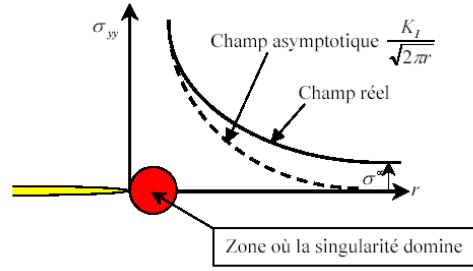


FIGURE 1.8 – Définition des contraintes au front de fissure

Pour comprendre ce qui se passe en tête de fissure, il faut reprendre la formulation générale des contraintes [Zeg03] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (1.17)$$

Les fonctions f_{ij} et g_{ij} sont adimensionnelles et dépendent du mode de chargement, g_{ij} dépend également de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré. Sur base de l'équation (1.17), nous remarquons qu'au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes sont singulières à cause du terme en $1/\sqrt{r}$, car r tend vers 0. La figure 1.8 illustre la zone plastique en tête de la fissure où la singularité domine. Après cette zone plastique, lorsque nous restons proches de la tête de fissure, les termes d'ordre supérieur sont négligeables et l'approximation suivante conduit à de bonnes valeurs :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.18)$$

Pour des valeurs plus grandes de r , les termes d'ordre supérieur deviennent plus importants et leur somme tend progressivement vers la contrainte appliquée. Le facteur d'intensité de contraintes (FIC) définit l'amplitude de la zone plastique. Il existe trois types de facteurs d'intensité de contraintes : K_I, K_{II} et K_{III} correspondant respectivement aux sollicitations en mode I, II , et III . Les FIC sont additionnables s'ils concernent le même mode de sollicitation.

$$K_I^{total} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \dots$$

mais

$$K_{total} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

1.5 Zone plastique

La mécanique linéaire de la rupture prévoit des contraintes infinies en tête d'une fissure aiguë (à cause du terme en $1/\sqrt{r}$). Cependant, en réalité, en fond de fissure, ρ n'est jamais nul, cela signifie que les contraintes y sont très importantes, mais pas infinies. Nous parlerons de zone plastique, car les contraintes dépassent la limite élastique du matériau. Il y a une redistribution des contraintes près de cette zone.

Lorsque la taille de la zone plastique devient trop importante, la théorie de la mécanique linéaire de la rupture devient imprécise. Des corrections existent pour cette théorie pour des dimensions raisonnables de la zone plastique. Au-delà d'une certaine plastification, le FIC, ne convient plus pour décrire les champs de contraintes et de déformations, il faut alors recourir à d'autres paramètres que sont le CTOD (Crack Tip Opening Displacement) et l'intégrale de Rice J (équivalent à G). Cette étude sort du cadre de notre travail, elle est reprise dans l'ouvrage [Par04]. Il est donc important de connaître la taille de la zone plastique au fond de fissure. Cette taille peut être estimée à l'aide de deux méthodes : l'approche d'Irwin et celle de Dugdale-Barenblatt. Les deux approches consistant en une correction du FIC, nous présenterons uniquement la première.

1.5.1 Approche d'Irwin

En mode I d'ouverture, en aval de la fissure, la contrainte σ_{yy} (en $\theta = 0$) est donnée par :

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.19)$$

Irwin considère, en première approximation [Zeg03] que la frontière entre zones élastique et plastique correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau. Ce lieu est caractérisé par le rayon r_E . Pour déterminer celui-ci, il suffit de remplacer dans l'expression précédente σ_{yy} par σ_E , où σ_E est la limite d'élasticité du matériau. Cela conduit à l'expression suivante pour r_E :

$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (1.20)$$

La longueur r_E est représentée à la figure 1.9. La contrainte est considérée constante

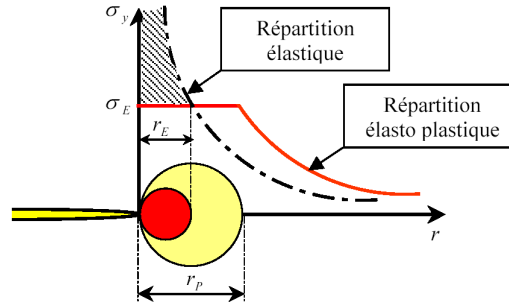


FIGURE 1.9 – Répartition des contraintes en aval de la fissure - Tiré de [Zeg03]

dans la zone plastique. Cette hypothèse implique une redistribution des contraintes afin d'assurer l'équilibre de celles-ci en élastique et en élastoplastique. Cela conduit à :

$$\int_0^{\infty} \sigma_{yy} dr = \sigma_E \cdot r_p + \int_{r_E}^{\infty} \sigma_{yy} dr \quad (1.21)$$

ou encore

$$\sigma_E \cdot r_p = \int_0^{r_E} \sigma_{yy} dr \quad (1.22)$$

En combinant (1.19), (1.20) et (1.22), nous pouvons évaluer r_p :

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 = 2r_E \quad (1.23)$$

Pour les valeurs de r au-delà de r_p la distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique est obtenue par une translation de la répartition élastique sur la distance r_E . Pour tenir compte de cette translation, Irwin définit un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de fissure de r_E . Cela revient à considérer la fissure comme ayant une longueur de $a + r_E$ au lieu de a . Le FIC devient

$$K_{eff} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi(a + r_E)} = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^{\infty}}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.24)$$

1.5.2 Forme de la zone plastique

Irwin estime la taille de r_p pour $\theta = 0$. Pour avoir r_p pour toutes les valeurs de θ , il faut appliquer un critère de plasticité ; nous ne tiendrons pas compte dans ce cas des

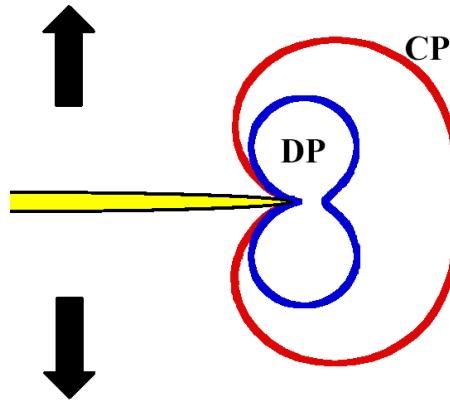


FIGURE 1.10 – Forme de la zone plastique en mode I

redistributions des contraintes. Prenons celui de von Mises dans l'espace des contraintes principales :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_E^2 \quad (1.25)$$

En mode I de rupture (figure 1.10) , cela donne :

– En contraintes planes

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (1.26)$$

– En déformations planes

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_E^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left((1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (1.27)$$

Nous pouvons également déterminer les zones plastiques en modes II et III. Le mode II est repris sur la figure 1.11.

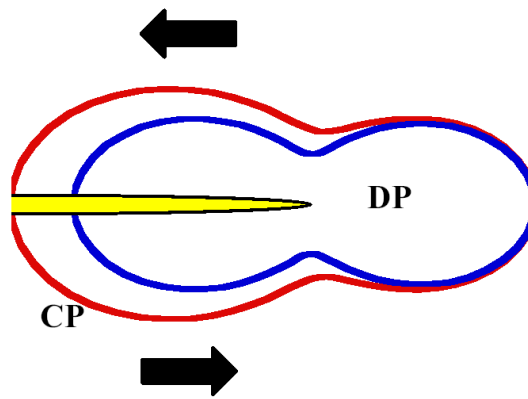


FIGURE 1.11 – Forme de la zone plastique en mode II

Chapitre 2

Approche énergétique

Nous développerons dans ce chapitre la première approche de modélisation de propagation de fissures en milieu homogène, basée sur le critère de maximisation de la restitution d'énergie. Les principaux résultats obtenus seront exposés, afin de confronter ceux-ci avec la théorie ou des résultats connus.

2.1 Établissement des déplacements

2.1.1 Résolution de problèmes d'équilibre en élasticité

La première modélisation de propagation de fissure envisagée est une fissuration en comportement élastique linéaire. Il convient donc tout d'abord de réaliser un modèle de résolution des déplacements dans ces conditions. Pour notre modèle, nous restons dans le cadre de l'élasticité linéaire isotherme et des petites déformations.

Un corps occupe un domaine Ω dont les frontières sont notées Γ . Il est soumis à des forces de surface \underline{t} sur Γ_t et des déplacements imposés $\underline{u}(\underline{x})$ sur Γ_u . Pour ce problème, il est interdit de poser une force et un déplacement sur une même surface et dans la même direction ; nous avons donc pour chaque direction :

$$\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset \text{ et } \Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma \quad (2.1)$$

Il pourrait également être soumis à des forces volumiques \underline{f} sur Ω . En considérant des petites déformations, les équations aux dérivées partielles nécessaires pour résoudre ce

problème en état plan de contraintes [Leg03] sont les suivantes¹ :

– les relations cinématiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.3)$$

– les relations constitutives

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\delta}}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.4)$$

– les équations d'équilibre

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.5)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \underline{t} \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (2.6)$$

avec

- $\underline{\underline{\varepsilon}}$: Tenseur des déformations infinitésimales
- \underline{u} : Vecteur des déplacements
- \underline{x} : Vecteur position
- $\underline{\underline{\sigma}}$: Tenseur des contraintes
- \underline{n} : Vecteur normal extérieur à la frontière
- E : Module d'élasticité
- ν : Coefficient de Poisson
- $\underline{\underline{\delta}}$: Tenseur identité

Par la méthode des éléments finis, ces équations peuvent se ramener au système (2.7), cette transformation est développée dans [Leg03].

$$KX = F \quad (2.7)$$

avec

- K : Matrice de raideur du système
- F : Vecteur des forces qui découle des conditions aux frontières
- X : Vecteur des déplacements aux nœuds du système

1. L'opérateur ∇ représente le gradient, l'opérateur $\nabla \cdot$ représente la divergence, $\text{tr}()$ représente la trace d'un tenseur.

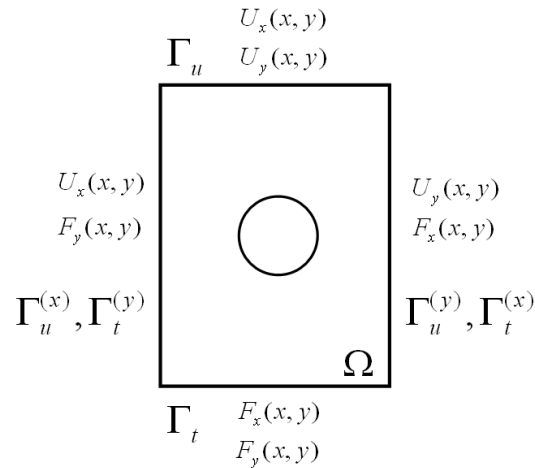


FIGURE 2.1 – Problème général en élasticité

Pour calculer le vecteur des déplacements, il suffit de multiplier l'inverse de la matrice de raideur par le vecteur des forces. Typiquement, cette méthode est capable de calculer les déplacements en tout point du maillage pour un domaine quelconque avec un cas de charge tout à fait général (voir figure 2.1).

Pour valider notre programme, nous allons reprendre le problème du disque de Lamé. Il s'agit d'un disque troué de rayon intérieur a et de rayon extérieur b , en matériau homogène soumis à une pression intérieure p_i et une pression extérieure p_o (figure 2.2). Nous faisons ici l'hypothèse des déformations planes. L'expression analytique du déplacement radial [Rék80] est :

$$u_r = \frac{1}{2G(b^2 - a^2)} [(1 - 2\nu)(a^2 p_i - b^2 p_o)r + \frac{a^2 b^2}{r}(p_i - p_o)] \quad (2.8)$$

avec

- G : module de cisaillement
- ν : coefficient de Poisson

Dans notre exemple, les paramètres du problème ont les valeurs suivantes :

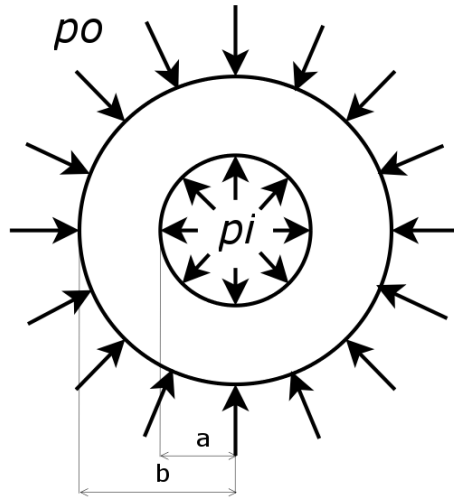


FIGURE 2.2 – Problème du disque de Lamé

a	: 7mm
b	: 25mm
p_i	: 10N/mm ²
p_o	: 10N/mm ²
E	: 32000N/mm ²
ν	: 0,2

Les déplacements aux nœuds du maillage sont repris à la figure (2.3). Nous pouvons voir que les deux cartes de déplacements (la solution analytique et celle implémentée dans le cadre de ce travail) sont similaires. Cependant, pour valider notre programme, il ne suffit pas d'avoir les bonnes valeurs des déplacements pour un maillage particulier, il faut encore s'assurer que celles-ci convergent bien vers les valeurs analytiques du problème en raffinant le maillage.

2.1.2 Convergence des solutions

L'exemple utilisé pour illustrer cette section est toujours le problème de Lamé, avec les mêmes conditions. Seulement, étant donné que le problème est symétrique, seul le quart du domaine sera considéré (figure 2.4). Nous pouvons voir à droite de la figure

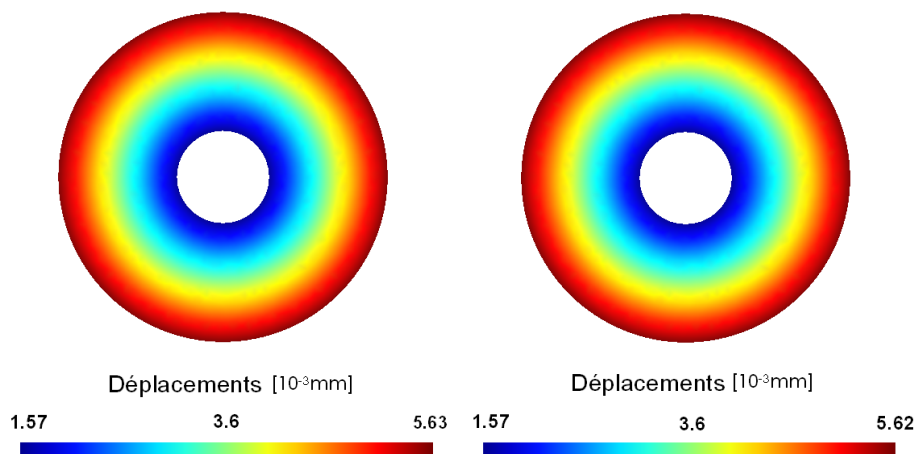


FIGURE 2.3 – Déplacements : Solutions analytique et implémentée

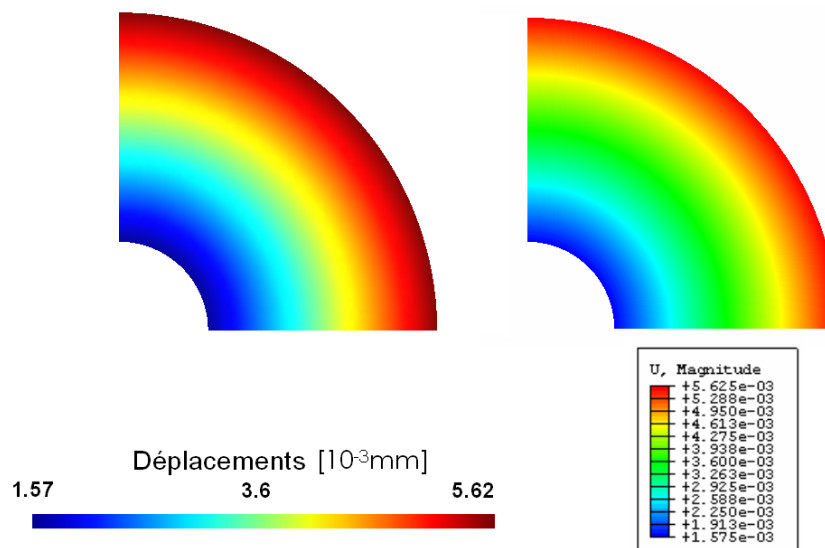


FIGURE 2.4 – Déplacements pour le quart du disque de Lamé : Solutions implémentée et obtenue par Abaqus

2.4 la solution donnée par le logiciel de simulation Abaqus² pour le même problème. Cette solution donne également les mêmes résultats. Deux types de convergence ont été envisagés pour ce programme : les convergences L_∞ et L_2 . La première vérifie que le maximum des erreurs en chaque point diminue avec la taille du maillage. La seconde vérifie que l'intégration sur le domaine de l'erreur diminue avec la taille du maillage.

Convergence	Formulation
L_∞	$\max(u_i^h - u_i) \quad i = 1, \dots, nbNod$
L_2	$\sqrt{\sum_{n=1}^{nbTr} \sum_{j=1}^{nbPt} Je _n \omega_j (u_j^h - u_j)^2}$

avec

- $nbNod$: nombre de nœuds du maillage
- $nbTr$: nombre de triangles du maillage
- $nbPt$: nombre de points d'intégration de Hammer par triangle
- $|Je|_n$: Jacobien de l'élément n

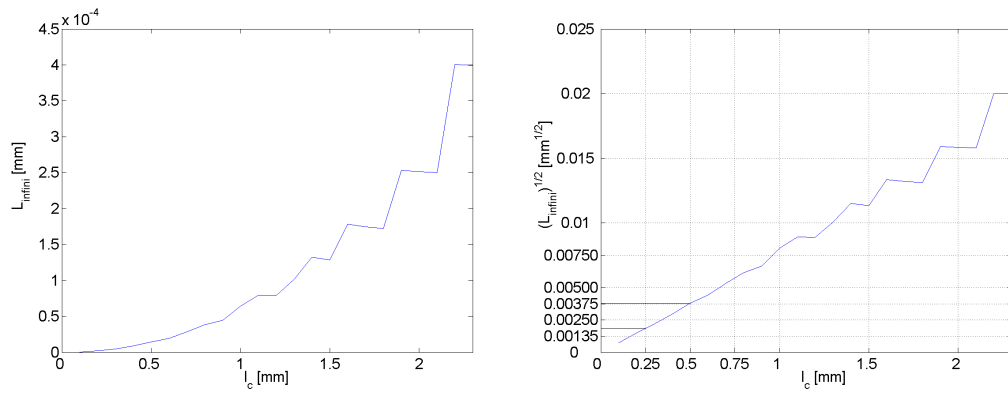
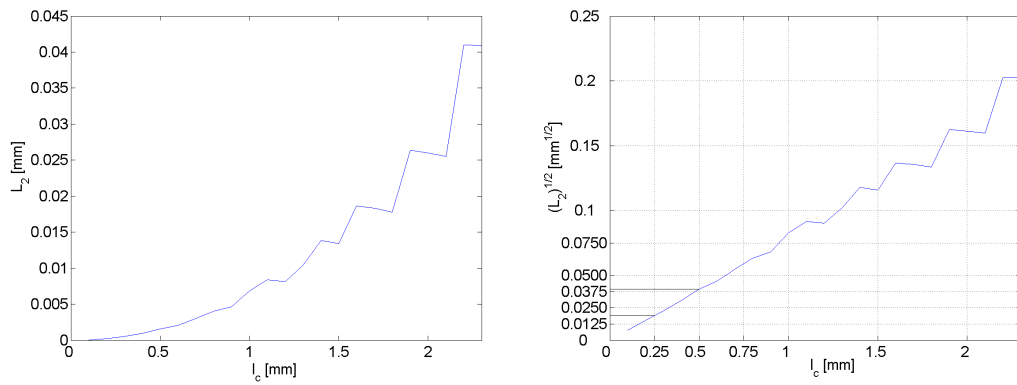
La figure 2.5 illustre la convergence L_∞ de l'erreur sur les déplacements. Sur le graphe de gauche, nous observons que l'erreur L_∞ diminue avec la longueur caractéristique du maillage. Pour les valeurs de l_c comprises entre 0,1 mm et 0,8 mm, l'approximation de la fonction de convergence peut se faire par une fonction carrée. Pour vérifier cela, le graphe de droite représente la racine carrée de l'erreur L_∞ en fonction de l_c ; où l_c représente la longueur caractéristique du maillage, définie comme le rayon du cercle circonscrit de chaque triangle. Ce graphe met en évidence la droite entre les valeurs 0,1 mm et 0,8 mm de l_c . Cela implique que l'ordre de la convergence L_∞ pour les déplacements est de 2.

L'erreur L_2 est représentée à la figure 2.6, le graphe de droite illustre la racine carrée de l'erreur L_2 . L'évolution est à nouveau linéaire sur ce graphe pour des petites valeurs de l_c . Nous pouvons donc en conclure que pour des maillages assez raffinés, diminuer la longueur caractéristique du maillage d'un facteur 2 revient à diminuer l'erreur L_∞ et l'erreur L_2 d'un facteur 4. Ces résultats sont confirmés par la théorie. L'ordre de l'erreur commise sur les déplacements est donnée par la formule suivante [Bon05] :

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\| = O(h^{p+1}) \quad (2.9)$$

avec

2. Ce logiciel réalise également un calcul par la méthode des éléments finis

FIGURE 2.5 – Convergence L_∞ des déplacementsFIGURE 2.6 – Convergence L_2 des déplacements

- \underline{u} : solution exacte
- \underline{u}_h : solution approximée
- h : pas du maillage
- p : ordre des fonctions de forme utilisées par la méthode des éléments finis

Comme dans notre cas les fonctions de forme sont linéaires, il est logique que les erreurs L_∞ et L_2 soient d'ordre 4.

2.2 Propagation de la fissure

2.2.1 Principe général

Dans le cadre de cette étude, nous ne nous intéressons pas au critère de rupture proprement dit, mais plutôt à la direction que va prendre la fissure. Nous avons donc besoin d'un critère permettant de prédire cette direction de fissuration. Nous utiliserons pour cela la maximisation du taux de restitution d'énergie, ou énergie de Griffith car, selon le critère énergétique, la fissure se propagera dans la direction qui maximise ce taux de restitution d'énergie. Nous savons qu'une extension de fissure de longueur da s'accompagnera des variations d'énergie énoncées par la relation 1.9. Cette relation peut être écrite en fonction des différentes matrices calculées par éléments finis [Ing03] de la forme :

$$\overline{X}^T \cdot \overline{F} = \frac{\overline{X}^T \cdot \overline{K} \cdot \overline{X}}{2} + \Delta U \quad (2.10)$$

Où X est le vecteur des déplacements du système, K est sa matrice de raideur et F est le vecteur des forces appliquées. La direction de la fissuration sera celle qui donnera une énergie de Griffith G maximale, ce qui implique, en maximisant l'expression 1.11 :

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = 0 \quad (2.11)$$

En maximisant cette énergie de Griffith, nous pourrons donc déterminer le chemin de la fissure dans un solide d'une géométrie quelconque soumis à des charges diverses.

S'il était question de déterminer si oui ou non la propagation de la fissure devait avoir lieu, il conviendrait d'ajouter un critère de rupture qui, sous forme énergétique, serait de la forme :

$$G \geq G_c \quad (2.12)$$

Où G_c représente un taux de restitution d'énergie critique, défini en [Zeg03] et fonction de la ténacité du matériau.

2.2.2 Aspects concernant l'implémentation

Une fissure dans un matériau implique un champ de déplacements discontinu le long de la ligne de fissuration. La méthode par éléments finis utilisée devra donc reproduire ces conditions. Or, les fonctions de base de la méthode des éléments finis sont continues

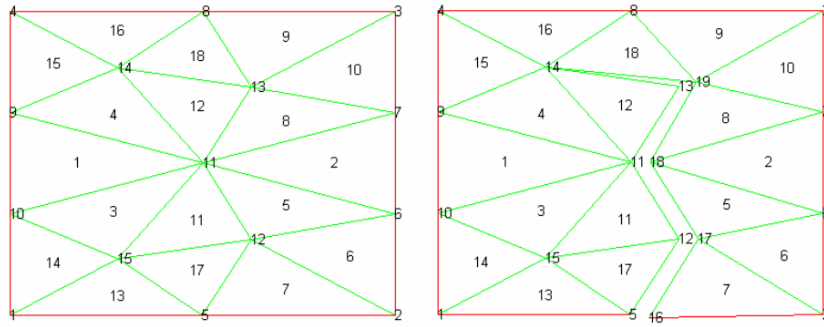


FIGURE 2.7 – Doublage des nœuds du maillage

sur l'ensemble du domaine. Une fissure ne pourra donc pas traverser un élément. La ligne de fissuration devra coïncider avec les frontières d'éléments finis. De plus, il faut dédoubler les nœuds se trouvant sur la ligne de fissuration ; afin de permettre la séparation de ceux-ci et ainsi obtenir un champ de déplacements discontinu à travers cette ligne de fissuration. La fissure représente ainsi une cavité infiniment mince. Les nœuds dédoublés devront porter des numéros distincts, même si leur position est géométriquement confondue. Un tel dédoublement des nœuds peut être visualisé sur la figure 2.7 où la première image représente le domaine non fissuré comportant uniquement des nœuds simples alors que sur l'image de droite les nœuds ont été dédoublés le long de la ligne de fissure ; et un nouveau numéro a été attribué à chaque nœud créé. L'écartement entre les deux entités d'un nœud double a été réalisé artificiellement afin de visualiser le dédoublement mais chaque nœud double contient en réalité deux points confondus lorsque le solide est au repos.

Afin d'obtenir le chemin de fissuration maximisant le taux de restitution d'énergie, nous allons réaliser une propagation virtuelle de fissure dans diverses directions (figure 2.8). Chaque direction de fissuration testée nous permettra, après calcul des déplacements, d'obtenir une valeur de l'énergie après propagation de fissure par direction $U_{1 \rightarrow 7}$. A l'aide de cette énergie et de celle calculée avant propagation U_i , nous pourrons calculer le taux de restitution d'énergie pour chacune de ces directions. Ensuite, il suffit de suivre la direction pour laquelle le taux de restitution d'énergie est maximum ; et poursuivre plus en avant la propagation de la fissure.

C'est la première méthode qui a été utilisée dans cet ouvrage afin de déterminer le chemin de fissuration. Le fonctionnement du programme est repris à la figure 2.9 de

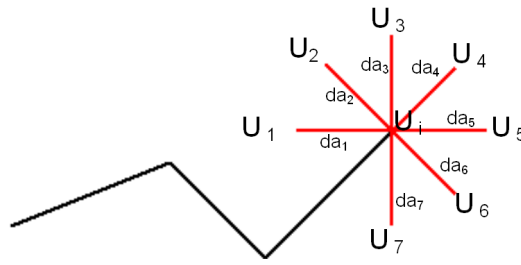


FIGURE 2.8 – Extension virtuelle de fissure

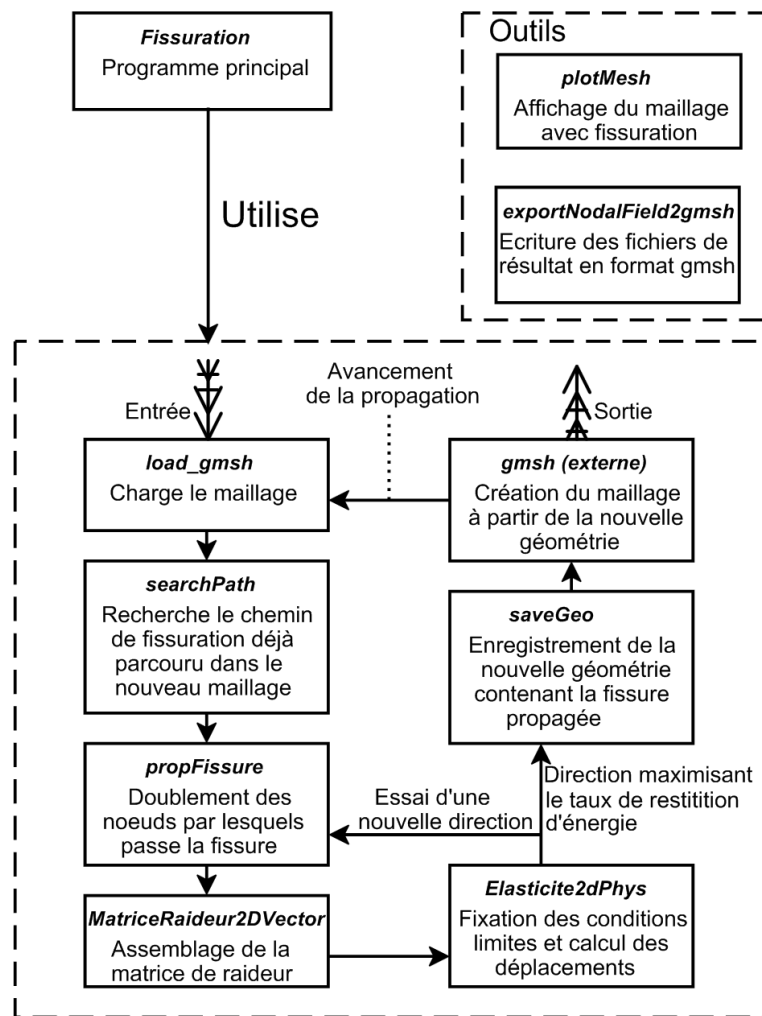


FIGURE 2.9 – Architecture générale du programme

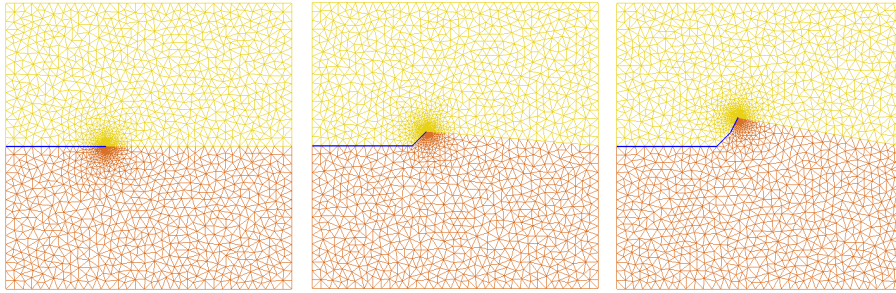


FIGURE 2.10 – Remaillage en tête de fissure

manière très résumée, avec l'indication du rôle de chaque fonction du programme. L'ensemble a été implémenté dans le cadre de ce travail. Il fonctionne en coopération avec le programme externe `Gmsh` chargé de réaliser le maillage. Nous considérons comme géométrie l'ensemble des frontières du solide, comprenant également les lèvres de la fissure ; alors que le maillage est la division de la surface définie par la géométrie en éléments triangles. Dans le programme réellement implémenté (et ceci n'apparaît pas dans le schéma 2.9), afin d'avoir plus de liberté dans les directions de propagation à essayer (et ne pas uniquement suivre les directions proposées par le maillage), une nouvelle géométrie et un nouveau maillage sont réalisés pour chaque direction de propagation virtuelle. Nous choisissons donc les directions de propagation possibles et le maillage est réalisé en fonction de ces directions plutôt que l'inverse. Ces opérations de remaillage utilisent d'ailleurs un temps négligeable par rapport au reste de l'exécution.

Le maillage est progressivement affiné en se rapprochant de la tête de fissure (figure 2.10) . En effet, certaines grandeurs physiques possèdent de très grandes variations de leur valeur lorsque nous sommes proches de la tête de fissure. Prenons le cas des contraintes : elles possèdent, comme vu précédemment, une valeur théorique infinie en tête de fissure³, alors que leurs valeurs deviennent acceptables lorsque nous nous écartons légèrement de cette tête de fissure. Étant donné que nous considérons un comportement élastique, les déformations varient de la même manière et influencent elles-mêmes la valeur des déplacements utilisée pour le calcul de l'énergie de séparation des surfaces. Il est donc nécessaire d'obtenir un maillage assez fin en se rapprochant

3. Ce champ varie en effet en $\sqrt{1/r}$ où r est la distance par rapport à la tête de fissure. Cette variation en $\sqrt{1/r}$ s'approxime très mal par des polynômes, utilisés dans les fonctions de forme afin de représenter les champs de variables.

de la tête de la fissure. Vu que le maillage est reconstruit pour chaque incrément de propagation de fissure, il est facile d'obtenir un maillage en permanence raffiné en tête de fissure. De cette manière, le maillage aura une taille caractéristique uniforme, excepté près de la tête de la fissure où il sera plus fin.

Cette nécessité d'un maillage affiné en tête de fissure est exprimée de manière plus formelle dans [Bon05] par le fait que le caractère singulier en pointe de fissure de la solution élastique en déformation et en contrainte dégrade les propriétés de convergence de la solution approchée vers la solution exacte quand le pas de maillage h tend vers zéro. En effet, définissons la norme en énergie $\|\cdot\|_E$ d'un champ de déplacements \underline{u} par :

$$\|\underline{u}\|_E^2 = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] : D : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] dV \quad (2.13)$$

Où $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représente le tenseur des déformations et D la matrice des modules d'élasticité (matrice de Hooke). En considérant \underline{u} comme la solution exacte et \underline{u}_h comme la solution approchée par éléments finis, la norme en énergie de l'erreur sur le champ de déplacements dans le cas d'un solide élastique ne présentant pas de singularité (pas de fissure) varie comme :

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_E = \mathcal{O}(h^p) \quad (2.14)$$

Dans cette équation, h représente le pas de maillage alors que p est l'ordre des fonctions de forme utilisées par la méthode des éléments finis. Nous voyons ici que, si h tend vers 0, la solution tendra vers la solution exacte, et cela de manière encore plus rapide si la valeur de p est élevée. Dans notre simulation, nous utilisons des fonctions de forme linéaires et la norme énergétique de l'erreur sur le champ de déplacements varie donc linéairement avec le pas du maillage. Si le solide est fissuré, par contre, cette norme énergétique varie de la manière suivante :

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_E = \mathcal{O}(h^{1/2-\eta}) \quad (2.15)$$

avec η positif. La norme énergétique variera dans le meilleur des cas comme la racine carrée du pas de maillage. Par rapport à un solide non fissuré, la solution convergera donc de manière beaucoup plus lente vers la solution exacte au fur et à mesure que h diminuera. De plus, le fait d'utiliser des fonctions de forme d'ordre élevé n'améliorera pas la situation, car l'erreur est dans ce cas indépendante de l'ordre de celles-ci. Il est donc inutile d'utiliser des fonctions de forme d'ordre supérieur à 1 près de la pointe de fissure, mais il est nécessaire d'avoir un maillage très fin afin d'améliorer la représentation de la singularité.

Concernant le temps d'exécution, nous pouvons voir, dans le tableau suivant, les pourcentages d'utilisation du temps de calcul pour une avancée de 5 incréments de longueur de fissure; chaque incrément de fissure étant testé dans 7 directions afin de déterminer la direction maximisant la valeur de G :

Opération	Temps (% du total)
Établissement de la situation initiale (1 fois)	3,5 %
Assemblage de la matrice de raideur	79,5 %
Résolution du système d'équations	9,3 %
Modification du fichier de géométrie	0,9 %
Remaillage	2,6 %
Chargement du maillage	1,8 %
Dédoublement des nœuds de la fissure	2 %
Autres opérations	0,4 %

Ce tableau nous montre effectivement que le temps de remaillage est assez faible par rapport à l'ensemble du temps de calcul. Il montre également que la majorité du temps de calcul est consacrée à l'assemblage de la matrice de raideur du système, et un dixième du temps total est consacré à la résolution du système d'équations. Ces opérations s'effectuant pour chaque direction de propagation testée, ce sont donc elles qui utilisent la majorité du temps d'exécution de la simulation.

2.3 Analyse des résultats

2.3.1 Champ de contraintes à proximité d'une anomalie

Dans cette section, nous tenons à illustrer davantage la théorie et valider notre calcul des contraintes de von Mises. Pour ce faire, nous allons reprendre deux exemples déjà vus au chapitre 1. Le premier est la plaque rectangulaire, trouée circulairement en son centre. Nous traiterons ensuite le cas de la plaque contenant une fissure aiguë. Le cas de la plaque trouée circulairement ne traite pas de fissuration, mais nous permet de visualiser l'évolution des contraintes lorsque nous passons d'une anomalie circulaire à une anomalie très fine comme une fissure.

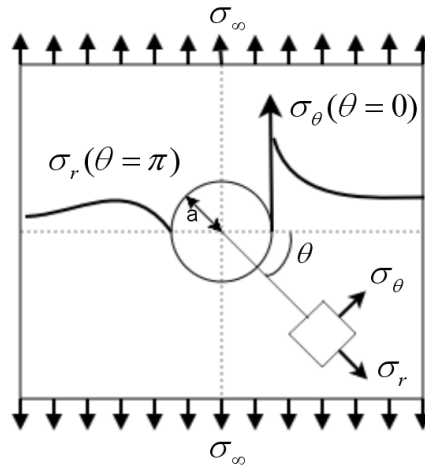


FIGURE 2.11 – Distribution des contraintes

Champ de contraintes dans une plaque trouée

Considérons une plaque rectangulaire de 80 mm de large et de 120 mm de haut comportant un trou circulaire en son centre dont le rayon est de 5 mm . La plaque est soumise à une traction simple dans le sens de la hauteur. La contrainte appliquée est de 10 N/mm^2 . La théorie vue en 1.4 prévoit pour ce problème une concentration de contraintes de 3 à la frontière du trou circulaire, pour les angles (en radian) de 0 et π . La solution analytique dans le cas d'une plaque infinie est donnée par les expressions suivantes [Par04] :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos(2\theta + \pi) \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta + \pi) \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \sin(2\theta + \pi) \end{cases} \quad (2.16)$$

La figure 2.11 indique les conventions utilisées pour ce problème et l'allure des contraintes le long de l'axe central horizontal. Les cartes des contraintes, analytique et obtenue par éléments finis, sont reprises à la figure 2.12.

La solution obtenue par éléments finis respecte bien l'allure générale du champ de contraintes. La concentration de contraintes de 3 à la frontière du trou circulaire, pour les angles en radian de 0 et π est très visible. Pour finir, nous pouvons encore constater qu'en s'éloignant de l'anomalie, les contraintes de von Mises tendent progressivement vers la contrainte imposée aux frontières supérieure et inférieure du solide. La différence

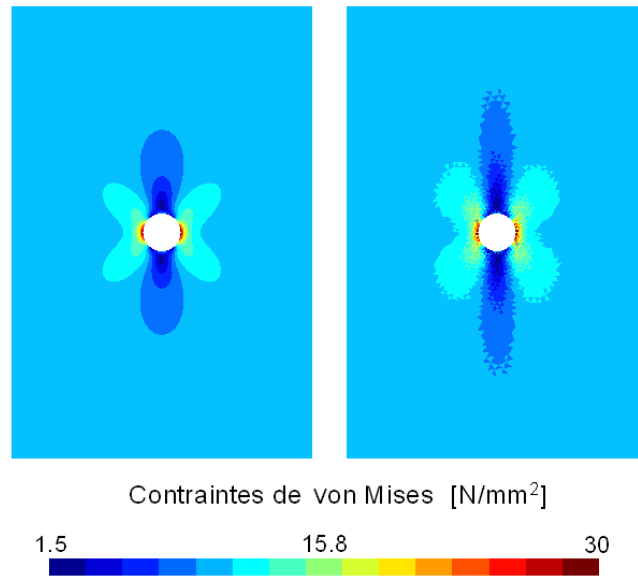


FIGURE 2.12 – Contraintes de von Mises : Solutions analytique et obtenue par éléments finis

entre la solution analytique et la solution numérique est due à l'influence des frontières, la théorie étant valide pour une plaque de dimensions infinies.

Champ de contraintes en tête de fissure

Pour établir la carte des contraintes en tête de fissure, considérons une fois de plus une plaque rectangulaire, de 60 mm de large et de 40 mm de haut. La plaque est fissurée horizontalement à mi-hauteur ; et est soumise à de la traction simple dans le sens de la hauteur. La contrainte appliquée est de 10 N/mm^2 et la fissure mesure 2 mm . La figure 2.13 reprend la géométrie et le chargement de la plaque.

Pour des raisons de facilité nous avons travaillé sur la moitié droite du problème, profitant ainsi de la symétrie. Les conditions aux limites sont : la ligne de symétrie dont les déplacements dans la direction horizontale sont fixés à 0, et la ligne horizontale à mi-hauteur fixée dans la direction verticale. Les contraintes analytiques sont données par les relations 1.14. Étant donné que nous nous intéressons au cas du mur de maçonnerie, l'approche utilisée sera celle des contraintes planes. En effet, nous considérons le mur

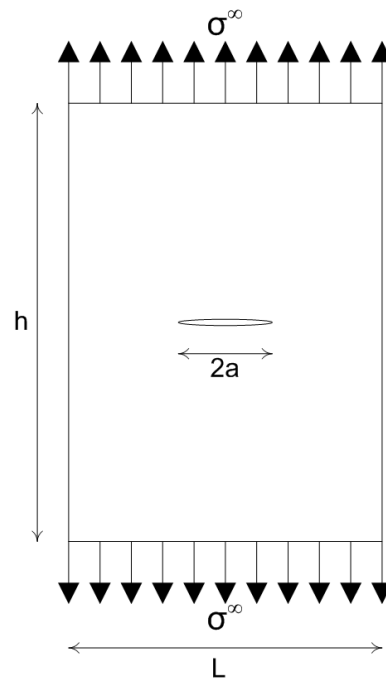


FIGURE 2.13 – Caractéristiques géométriques et chargement

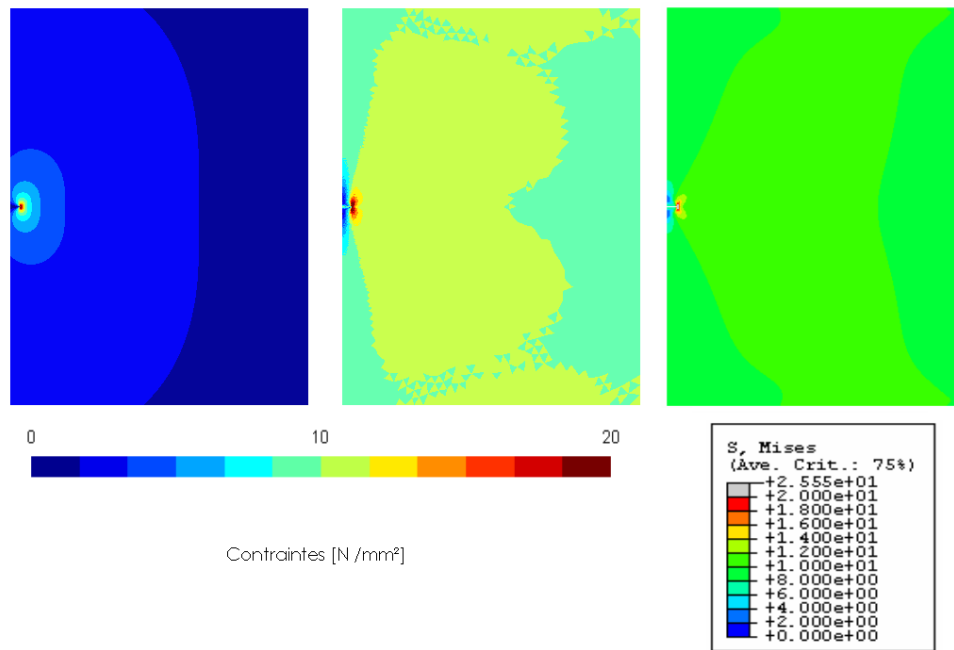


FIGURE 2.14 – Contraintes en mode I : Solutions analytique, implémentée dans le cadre de ce travail et par Abaqus

de dimensions suffisamment importantes par rapport à son épaisseur pour que celui-ci soit assimilé à une plaque. Ainsi, nous considérons des contraintes nulles dirigées dans la direction perpendiculaire au plan xy , mais les déformations ne sont pas nulles. Les résultats des simulations sont repris à la figure 2.14. À première vue, la différence entre la solution analytique et les solutions obtenues par éléments finis est assez importante. C'est le cas, si nous nous plaçons loin de la fissure. En effet, le deuxième terme de la solution analytique reprise dans l'équation 1.17 n'est pas inclus dans le calcul de la solution. La solution est donc correcte lorsque le premier terme de la relation 1.17 possède une grande importance par rapport au deuxième terme, ce qui se passe pour une valeur de r petite. La solution analytique est donc correcte lorsque nous nous trouvons assez près de la tête de fissure. Pour la solution analytique, nous voyons donc seulement l'effet de concentration dû à la fissure. Pour ce qui est de la solution numérique, nous pouvons observer que, en s'écartant de la tête de fissure, la contrainte se rapproche de

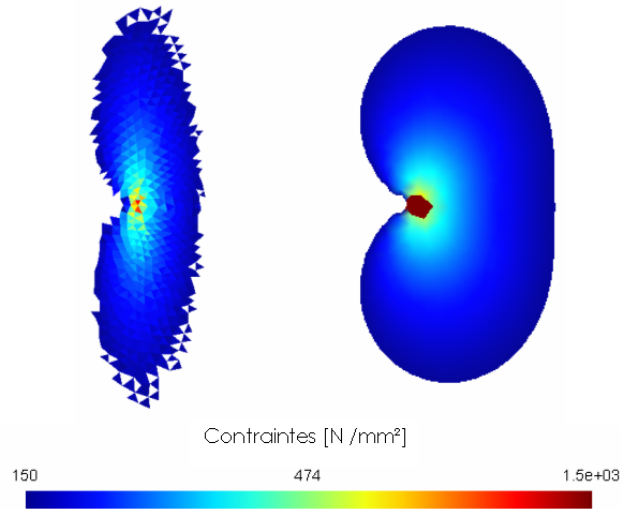


FIGURE 2.15 – Zone plastique en mode I : Solutions par éléments finis et analytique

la valeur de 10 N/mm^2 , ce qui correspond à la contrainte appliquée extérieurement sur les faces supérieure et inférieure du solide. Nous pouvons observer que ces valeurs sont très semblables à celles, également en figure 2.14, calculées par le logiciel de simulation Abaqus. La valeur obtenue analytiquement lorsque nous nous écartons de la tête de fissure tend quant à elle vers 0. Si nous nous rapprochons du front de fissure à la limite de plasticité, nous retrouvons une zone plastique (figure 2.15) assez semblable par les deux approches. Les cartes ont été obtenues en posant la limite plastique à 150 N/mm^2 . La largeur moins importante de la zone plastique pour l'approche par éléments finis est sans doute toujours due au fait de cette simplification du terme de la solution analytique, car au plus nous nous rapprochons de la fissure, au plus les deux solutions se rejoignent. Nous pouvons également observer que la forme de la zone plastique donnée par la solution analytique correspond bien à celle décrite à la figure 1.10 pour un état de contraintes planes.

Chargeons maintenant cette même plaque, mais en cisaillement afin d'obtenir les contraintes en mode II. Les efforts sur les faces horizontales de la plaque seront donc dirigés horizontalement au lieu de verticalement. Étant donné que nous ne pouvons plus profiter de la symétrie du système, nous devons considérer la plaque entière. En considérant une limite élastique de 150 N/mm^2 , nous obtenons la zone plastique représentée en figure 2.16. qui est assez proche de celle que nous avons vue en théorie à la figure 1.11.

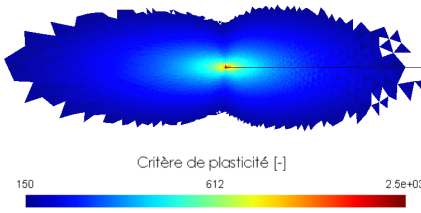


FIGURE 2.16 – Zone plastique en mode II : Solution par éléments finis

2.3.2 Valeur du taux de restitution d'énergie

Le critère utilisé dans l'approche décrite par ce chapitre est un critère basé sur la valeur du taux de restitution d'énergie G , ou énergie de Griffith. Il est donc important de vérifier l'exactitude du calcul de cette grandeur par le programme lors de la phase de validation. Selon [Zeg03], pour une fissure de longueur $2a$ dans une plaque de dimensions infinies constituée d'un matériau de module de Young E et soumise à une contrainte de traction σ^∞ , l'énergie de Griffith par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad (2.17)$$

Considérons (figure 2.13) une plaque de 30 mm de largeur sur 50 mm de hauteur ainsi qu'une fissure initiale de longueur $2a = 1$ mm. Appliquons lui une contrainte de traction de 20 N/mm² en considérant une épaisseur unitaire de la plaque ainsi qu'un module de Young du matériau $E = 35000$ N/mm². Pour cette plaque, l'énergie de Griffith par unité de surface fissurée devrait valoir :

$$G = \frac{\pi(20)^2 0,5}{35000} = 0,018 \text{ mJ/mm}^2 \quad (2.18)$$

Or, en calculant cette énergie à partir des déplacements obtenus par éléments finis, nous observons les valeurs par unité de surface reprises dans le tableau suivant ; en fonction de la taille finale de la fissure obtenue après la propagation de celle-ci :

Taille finale de la fissure [mm]	Énergie de Griffith [mJ/mm ²]
1,25	0,030
1,5	0,032
2	0,040
2,5	0,046
3	0,054
3,5	0,063
4	0,070

Nous pouvons constater que toutes ces valeurs sont supérieures à celle obtenue théoriquement et deviennent de plus en plus élevées au fur et à mesure que la longueur de propagation de la fissure est importante; alors que ces valeurs sont pourtant définies par unité de longueur. La raison en est la suivante : cette relation théorique est valable pour une extension de fissure dx tendant vers 0. En effet, la propagation de fissure d'une longueur plus importante équivaut à une succession de petites extensions de fissure. Chaque nouvelle extension s'opère donc sur une fissure initiale de longueur $2a$ incrémentée de la somme des extensions précédentes dx . Pour une propagation d'une longueur $\Delta l = n \cdot dx$, l'énergie de Griffith correspondante doit donc être calculée en posant $dx = 2da$ par :

$$G \cdot \Delta l = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} da + \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 (a + da)}{E} da + \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 (a + 2da)}{E} da + \dots \quad (2.19)$$

En étendant cette somme à n termes, nous pouvons écrire :

$$G \cdot \Delta l = \sum_{i=1 \rightarrow n} \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 (a + ida)}{E} da \quad (2.20)$$

Étant donné que da doit tendre vers 0, nous pouvons passer de cette somme à l'intégrale suivante :

$$G \cdot \Delta l = G \cdot (2a_f - 2a_i) = \int_{a_i}^{a_f} \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} da \quad (2.21)$$

Où a_i et a_f représentent respectivement les demi-longueurs de la fissure avant et après la propagation de celle-ci. En développant cette intégrale, nous obtenons :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2}{2E} \frac{(a_f^2 - a_i^2)}{2(a_f - a_i)} = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2}{4E} (a_f + a_i) \quad (2.22)$$

Si nous utilisons cette relation pour le cas de notre fissure de longueur initiale $2a_i = 1mm$, nous pouvons comparer la courbe obtenue avec celle calculée à partir des déplacements résolus par éléments finis (premier graphe de la figure 2.17). Nous observons que les valeurs de l'énergie sont plus élevées dans le cadre du calcul par éléments finis et cette différence s'accroît pour des longueurs finales de fissure plus grandes. Cette différence est causée par les frontières du domaine. En effet, la relation théorique est valable pour une plaque de dimensions infinies ce qui signifie que la longueur de fissure doit avoir une taille beaucoup plus petite que les dimensions de la plaque. L'influence des conditions frontières se fait donc plus importante au fur et à mesure que la fissure est grande. Si nous choisissons une fissure initiale de longueur $4mm$, nous pouvons d'ailleurs observer (graphe de droite de la figure 2.17) que l'erreur sur G est encore plus

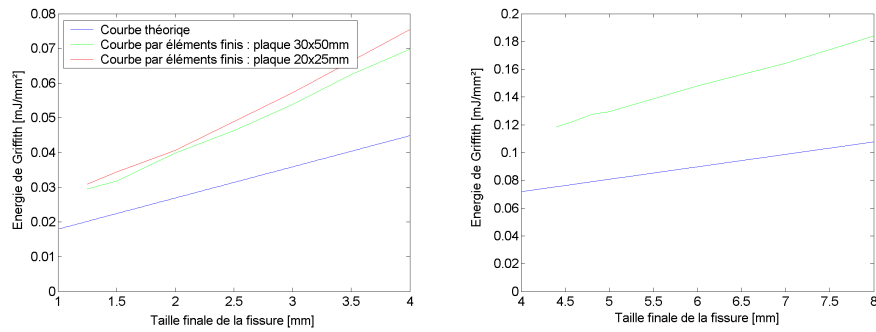


FIGURE 2.17 – Énergie de Griffith pour des propagations de fissures de longueurs initiales de 1 mm et 4 mm

grande. L'erreur sur G pour une infime propagation de cette fissure de longueur initiale 4 mm est de plus assez proche de l'erreur faite sur la fissure de longueur initiale 1 mm propagée jusqu'à 4 mm , alors que dans ces deux cas l'influence des conditions frontières s'exerce de la même manière. Nous pouvons donc penser que les courbes théorique et par éléments finis se rejoindront pour une fissure de longueur tendant vers 0 ou des dimensions de la plaque tendant vers l'infini.

Afin de nous conforter dans notre hypothèse, essayons de calculer l'énergie de Griffith pour une même fissure de longueur initiale de 1 mm , mais en considérant une plaque de dimensions réduites, soit 20 mm de large sur 25 mm de hauteur. Nous pouvons observer (2.17) que la courbe du taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur d'extension de fissure s'écarte encore d'avantage de la courbe théorique. Or, dans cette situation de dimensions réduites, les conditions frontières se font sentir d'avantage. De plus, l'énergie s'écarte encore plus de la courbe théorique et de la courbe calculée pour une plaque de dimensions plus grandes lorsque la longueur de la fissure devient importante. L'erreur sur la courbe obtenue pour une petite plaque par rapport à la courbe obtenue pour une grande plaque possède le même comportement (la même forme) que l'erreur obtenue sur la grande plaque par rapport à la solution théorique.

Considérons maintenant une plaque plus grande, de 40 mm de largeur et 60 mm de hauteur. Nous obtenons alors pour une fissure de longueur finale $1,25\text{ mm}$ un taux de restitution d'énergie de $0,023\text{ mJ}/\text{mm}^2$, ce qui est très proche de la valeur théorique de $0,019\text{ mJ}/\text{mm}^2$. Il semble donc qu'il s'agisse bien de l'influence des conditions frontières.

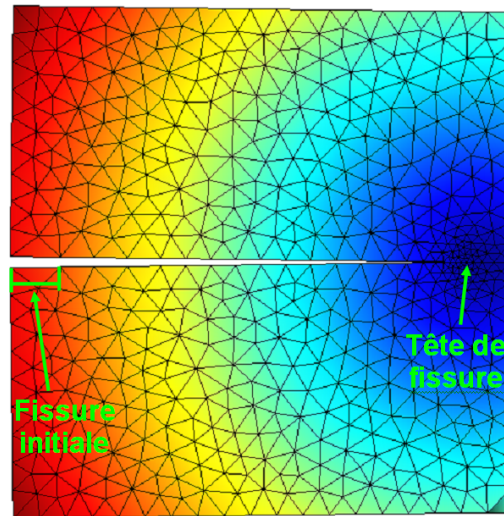


FIGURE 2.18 – Propagation en mode d'ouverture

2.3.3 Cas des modes purs

Le critère de rupture utilisé est, comme nous l'avons vu plus haut, un critère énergétique. Dans ce cas, la propagation de la fissure (si elle doit avoir lieu) se produira dans la direction le long de laquelle la quantité d'énergie de déformation est minimale ; ce qui, si θ est l'angle de déviation par rapport au prolongement rectiligne de la fissure, donne $\theta = 0^\circ$ pour le mode I (ouverture) et $\theta = 79,2^\circ$ pour le mode II (cisaillement plan). Cette valeur de $79,2^\circ$ est valable pour un coefficient de Poisson de $\nu = 0,2$ (le développement se trouve dans [Mia95]).

Cas du mode d'ouverture

Pour ce cas très simple, considérons une plaque carrée sur laquelle une fissure horizontale est amorcée à mi-hauteur, partant du côté gauche. Afin de soumettre celle-ci à une sollicitation en mode I , appliquons une contrainte de traction aux deux faces, supérieure et inférieure, de la plaque. La fissure (figure 2.18⁴) se propage de manière parfaitement horizontale. Cette horizontalité est parfaite, car une des directions de propagation testée est l'horizontale parfaite ; elle sera donc adoptée. Dans des cas plus

4. Nous pouvons remarquer l'affinement du maillage réalisé en tête de fissure

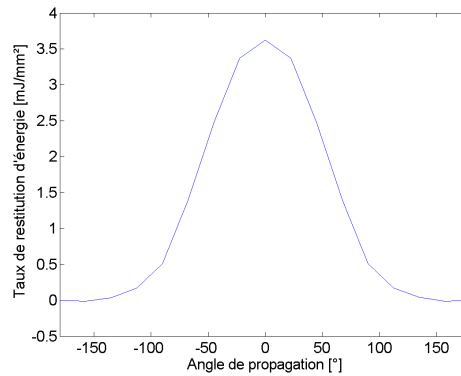


FIGURE 2.19 – Taux de restitution d'énergie et angle de propagation

compliqués, les directions de propagation testées devront suivre un chemin qui n'est pas forcément le chemin exact, étant donné que ne seront testées qu'un nombre fini de directions.

Nous pouvons voir (figure 2.19) l'évolution du taux de restitution d'énergie en fonction de la direction de propagation testée, où l'angle de propagation est l'angle de déviation de l'incrément de fissure par rapport au prolongement rectiligne. Les angles -180° et 180° représentent le retour en arrière (taux de restitution nul, car la situation n'est pas modifiée), alors que l'angle 0° représente la prolongation de la fissure sur l'horizontale. Pour cet exemple, 16 directions de propagation séparées chacune par un angle de même amplitude ont été choisies, dans l'intervalle $[-180^\circ \ 180^\circ]$. Nous voyons donc que la direction préférentielle est bien l'horizontale, et nous pouvons également observer la symétrie attendue autour de cette horizontale. La valeur de l'énergie de Griffith diminue très rapidement autour de sa position maximale. Cette constatation est un avantage pour la précision du modèle, car la direction préférentielle est nettement définie. Nous pouvons également observer que les directions de propagation impliquant un retour de la fissure vers l'arrière (c'est-à-dire une diminution de la coordonnée x) possèdent une énergie de Griffith très basse.

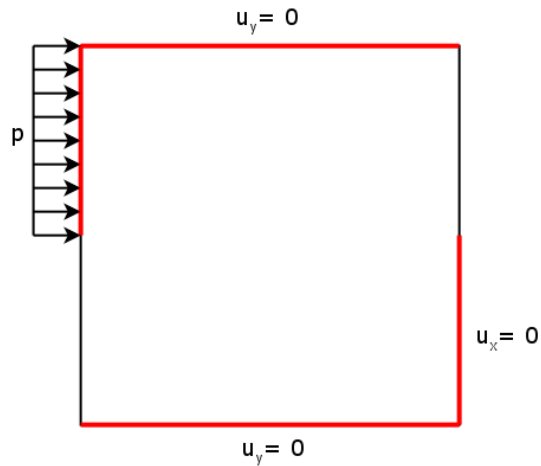


FIGURE 2.20 – Mode de cisaillement : conditions imposées aux limites

Cas du mode de cisaillement plan

Afin d'obtenir une situation proche du cisaillement pur, nous allons considérer la même plaque carrée que pour le mode d'ouverture, mais dont le chargement et les conditions imposées sont schématisées en figure 2.20, où p représente une charge répartie alors que u_x et u_y sont les déplacements imposés dans les directions x et y . Une fissure initiale est présente à mi-hauteur de la plaque, débutant sur le côté gauche de celle-ci.

Comme énoncé précédemment, nous nous attendons à un angle de déviation de la fissure de $79,2^\circ$. La figure 2.21 indique un angle de $77,6^\circ$ pour la simulation par éléments finis ; ce qui est assez proche des prévisions. La différence est sans doute due au fait que nous n'avons pas des conditions de cisaillement pur. Il convient de mesurer cet angle assez près de la tête de la fissure initiale, car après un certain seuil de propagation, le résultat est influencé par les conditions limites et nous nous éloignons davantage du cisaillement pur. Nous pouvons d'ailleurs observer que l'angle se réduit de plus en plus au fur et à mesure que la fissure se propage.

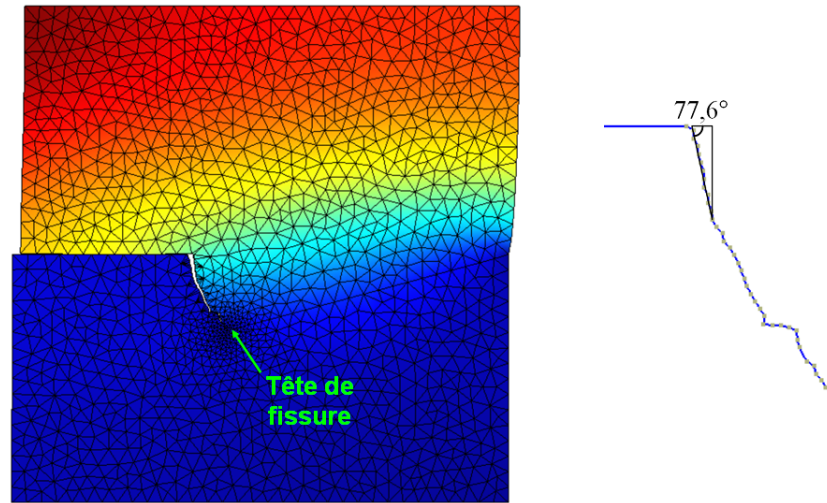


FIGURE 2.21 – Propagation en mode de cisaillement plan

2.3.4 Poutre en cisaillement

Parmi les essais de validation effectués figure la simulation d'une poutre mise en flexion quatre points. Nous nous intéressons uniquement à la partie mise en cisaillement, c'est-à-dire la zone située entre les appuis et les points d'application des forces qui leur sont directement voisins. La fissuration qui pourrait s'amorcer au centre de la poutre à cause de la flexion n'est donc pas prise en compte. Nous pouvons voir (figure 2.22) les conditions imposées ainsi que l'évolution des résultats obtenus lors de la propagation de la fissure. Étant donné que le système est symétrique, seule la moitié de la poutre est représentée. Une fissuration initiale (la partie verticale) est réalisée au-dessus de l'appui à rouleaux. Nous observons que, comme prévu par la théorie [Cap02], la fissure va dévier de son chemin, et ceci afin de rejoindre le point d'application de la force. Le modèle ne semble donc pas être mis en cause par cet essai.

2.3.5 Matériau hétérogène

Afin de préparer l'application du modèle à un mur de maçonnerie, il est nécessaire d'effectuer plusieurs simulations sur un matériau hétérogène pour une géométrie assez simple. Le principe de différenciation est le suivant : les triangles dont le centre de gravité est situé dans la moitié supérieure de la plaque possèdent un module d'élasticité

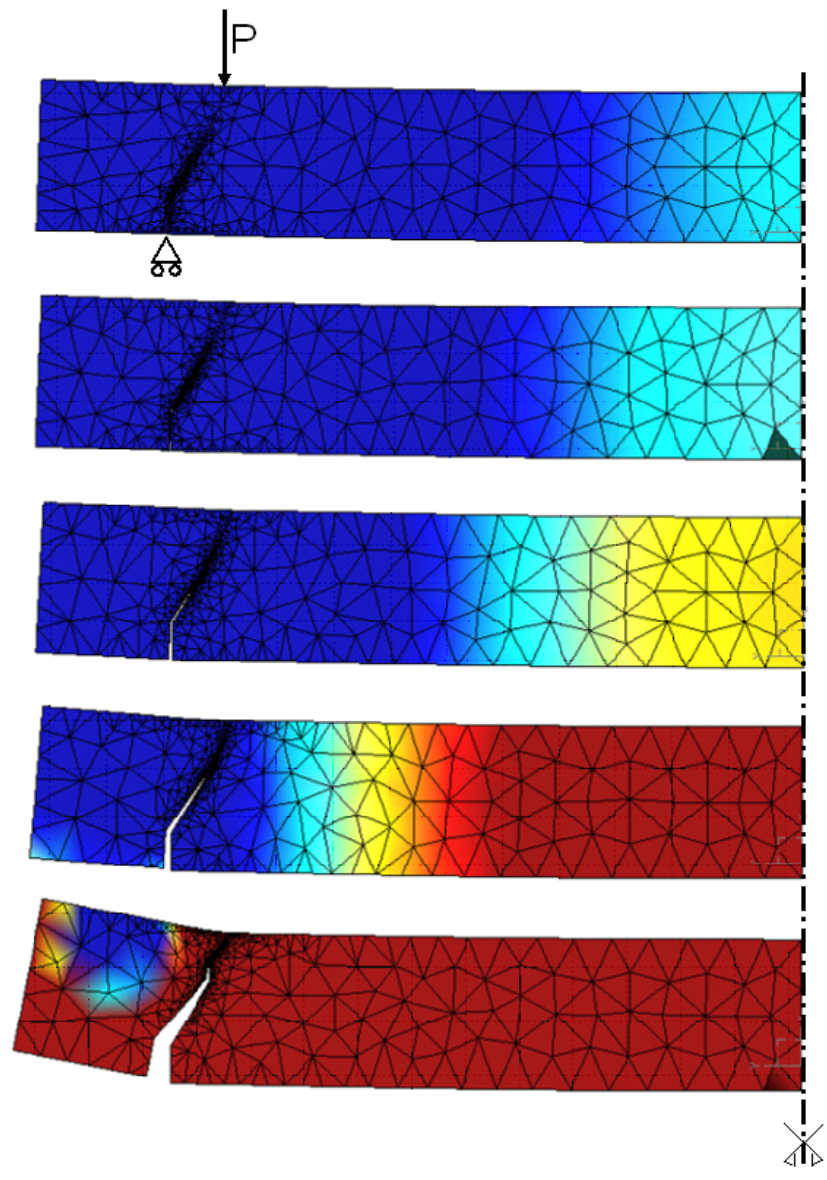


FIGURE 2.22 – Poutre soumise à un essai quatre points

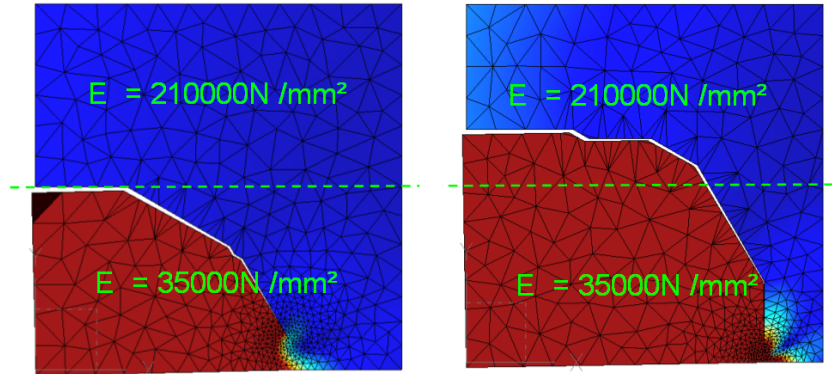


FIGURE 2.23 – Propagation en matériau hétérogène

de 210000 N/mm^2 alors que les triangles situés dans la moitié inférieure de la plaque possèdent un module de Young de 35000 N/mm^2 . La plaque est alors mise en traction simple, dans les mêmes conditions que pour la simulation réalisée en 2.3.3 afin de tester le mode d'ouverture. Les résultats obtenus montrent bien que la fissure se dirige vers le matériau mou (figure 2.23). Sur la figure de gauche, la fissuration initiale se trouve sur l'interface entre les deux matériaux. La fissure se dirige directement vers le matériau au module d'élasticité le plus bas. Ensuite, la fissure s'étant propagée vers le bas, les conditions de chargement forcent celle-ci à rejoindre le bord inférieur de la plaque et atteindre la rupture. Même constat lorsque nous entamons la fissuration dans le matériau le plus dur (figure de droite). La fissure se dirige vers le matériau mou avec une direction de plus en plus verticale, puis descend jusqu'à l'extrémité inférieure de la plaque. Ces résultats concordent bien avec ce à quoi nous pouvons nous attendre.

Néanmoins, il faut préciser que ce modèle ne prend aucunement en compte les caractéristiques de résistance de chaque matériau. Il ne peut de ce fait simuler des matériaux de résistances différentes. En effet, si le matériau mou possédait une résistance limite beaucoup plus élevée que celle du matériau dur, la fissure devrait se diriger vers le matériau mou, mais ensuite dévier de sa direction afin de se propager le long de l'interface. Afin de tenir compte de ces caractéristiques de résistance différentes, il faudrait inclure dans le modèle le taux de restitution d'énergie critique G_c et suivre le chemin pour lequel G/G_c est le plus élevé. La valeur de G_c prenant en compte les caractéristiques de ténacité du matériau, ce critère permettrait de choisir de propager la fissuration dans l'un ou l'autre matériau. Prendre le maximum de G/G_c ne prédit toutefois pas si la propagation va avoir lieu, mais peut uniquement donner la direction de propagation. L'ajout de $G \geq G_c$ permet quant à lui de déterminer l'existence d'une propagation.

Chapitre 3

Modélisation par un treillis de poutres

Les matériaux hétérogènes possèdent des mécanismes de fracture compliqués, en relation avec leur microstructure. Ces mécanismes engendrent généralement une fissuration principale, ainsi que diverses fissurations secondaires et microfissures, difficiles à modéliser par une approche élastique linéaire. De plus, l'approche énergétique réalisée précédemment demande l'introduction d'une fissure initiale à déterminer auparavant. Un modèle assez bien adapté pour un matériau hétérogène est réalisé par un treillis de poutres, consistant en un arrangement de petits éléments de poutres pouvant transmettre des efforts. Un tel treillis permet en outre, par son irrégularité, de modéliser l'hétérogénéité du matériau. La simulation de la propagation du chemin de fissuration est accomplie par une analyse élastique linéaire du treillis chargé, et par suppression des poutres dont l'état de contraintes dépasse un critère limite. De cette manière, la charge sera redistribuée sur les poutres restantes, le critère de rupture sera à nouveau appliqué et ainsi de suite. Afin de respecter le processus naturel de fissuration, les éléments de poutre seront supprimés un par un, ou avec une légère relaxation. Cette méthode sera développée dans ce chapitre. Les principaux résultats obtenus seront ensuite exposés, afin de confronter ceux-ci avec la théorie ou des résultats connus ; ainsi qu'avec la première approche décrite au chapitre 2.



FIGURE 3.1 – Système d'axes local pour un élément de poutre

3.1 Fonctionnement du modèle

3.1.1 Équations du modèle

Établissement des déplacements

La matrice de raideur locale utilisée pour chaque élément (ou micropoutre) est la matrice classique de rigidité d'une poutre dont les conventions de notation pour les déplacements et angles de rotation sont reprises à la figure 3.1 :

$$\begin{Bmatrix} f_1^x \\ f_1^y \\ m_1 \\ f_2^x \\ f_2^y \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_b A_b}{l} & 0 & 0 & -\frac{E_b A_b}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_b I_b}{l^3} & \frac{6E_b I_b}{l^2} & 0 & -\frac{12E_b I_b}{l^3} & \frac{6E_b I_b}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_b I_b}{l^2} & \frac{4E_b I_b}{l} & 0 & -\frac{6E_b I_b}{l^2} & \frac{2E_b I_b}{l} \\ -\frac{E_b A_b}{l} & 0 & 0 & \frac{E_b A_b}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_b I_b}{l^3} & -\frac{6E_b I_b}{l^2} & 0 & \frac{12E_b I_b}{l^3} & -\frac{6E_b I_b}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_b I_b}{l^2} & \frac{2E_b I_b}{l} & 0 & -\frac{6E_b I_b}{l^2} & \frac{4E_b I_b}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Le membre de gauche du système d'équations représente les efforts appliqués aux points correspondants. Le module d'élasticité E_b de chaque élément de poutre est simplement fonction du module d'élasticité E ainsi que du coefficient de Poisson ν du matériau [Cha02a] :

$$E_b = \frac{E}{\sqrt{3}(1-\nu)\sqrt{\frac{1-3\nu}{1+\nu}}} \quad (3.2)$$

Les valeurs de A_b et I_b proviennent des mesures géométriques de l'élément de poutre :

$$A_b = bh \quad \text{et} \quad I_b = \frac{bh^3}{12} \quad (3.3)$$

Les notations l , b et h représentent respectivement la longueur, l'épaisseur (profondeur) et la hauteur de chaque élément de poutre. La valeur de l dépend du maillage et b est égal

à l'épaisseur du matériau. Afin d'obtenir une indépendance des résultats par rapport à la taille du maillage (et donc par rapport à l), la valeur de h doit être liée à la longueur de la manière suivante :

$$h = l \cdot \sqrt{\frac{1 - 3\nu}{1 + \nu}} \quad (3.4)$$

Nous aurons donc pour un même matériau un rapport h/l toujours constant.

La matrice de raideur locale ainsi obtenue est ensuite amenée dans le repère global au moyen de la matrice de rotation suivante [Rem02] :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Où α est l'angle que forme la micropoutre avec l'axe global des x . La matrice de raideur dans le système d'axes global devient alors :

$$[k_{global}] = [T]^T [k_{local}] [T] \quad (3.6)$$

Une matrice de raideur locale est définie pour chaque élément, et chacune d'elles est ensuite assemblée dans la matrice globale de raideur pour former le système d'équations suivant :

$$[F] = [K][U] \quad (3.7)$$

Où $[F]$ représente le vecteur des forces, $[K]$ la matrice de raideur globale et $[U]$ le vecteur des déplacements. Une fois le système résolu, les déplacements et rotations sont obtenus dans le vecteur $[U]$ pour chaque point.

Application du critère de rupture

Afin de déterminer les efforts (normal et tranchant) dans une poutre, il convient tout d'abord d'exprimer à nouveau les déplacements aux deux extrémités de cette poutre dans le système d'axes local défini dans la figure 3.1. Nous obtenons ensuite l'expression suivante pour l'effort normal [Sch97], déduite des lois de l'élasticité linéaire :

$$F = \frac{E_b A_b}{l} (u_1 + u_2) \quad (3.8)$$

Alors que pour l'effort tranchant nous avons :

$$Q = \frac{12E_b I_b}{l^3}(v_1 + v_2) - \frac{6E_b I_b}{l}(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.9)$$

Le critère de rupture pour une poutre peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$\frac{F/A_b}{f_t} + \frac{|V|/A_b}{f_{sh}} > 1 \quad (3.10)$$

Où f_t et f_{sh} représentent les résistances respectivement à la traction et au cisaillement des micropoutres¹. Comme énoncé précédemment et afin de correspondre au mieux à la propagation réelle de la fissuration, les poutres seront rompues une à une successivement, ou avec une légère relaxation (c'est-à-dire que plusieurs poutres seront rompues simultanément, avant le recalcul des déplacements).

3.1.2 Aspects concernant l'implémentation

L'architecture générale du programme, entièrement réalisé dans le cadre de ce travail, et les relations entre fonctions sont représentées à la figure 3.2. La fixation des conditions limites s'effectue de la même manière que pour l'analyse élastique. La fonction `breakBeam` réalise la rupture des poutres dépassant le seuil critique de contraintes par la soustraction de leur raideur propre dans la matrice globale de raideur. De cette manière, l'assemblage de cette matrice globale n'est réalisé qu'une seule fois par la fonction `MatriceRaideur2DSluys` et la matrice n'est que légèrement modifiée par la suite. Ceci permet un gain de temps considérable quand nous savons que la majorité du temps de calcul est utilisée pour l'assemblage, alors que la résolution seule du système ne prend qu'environ un dixième du temps d'assemblage.

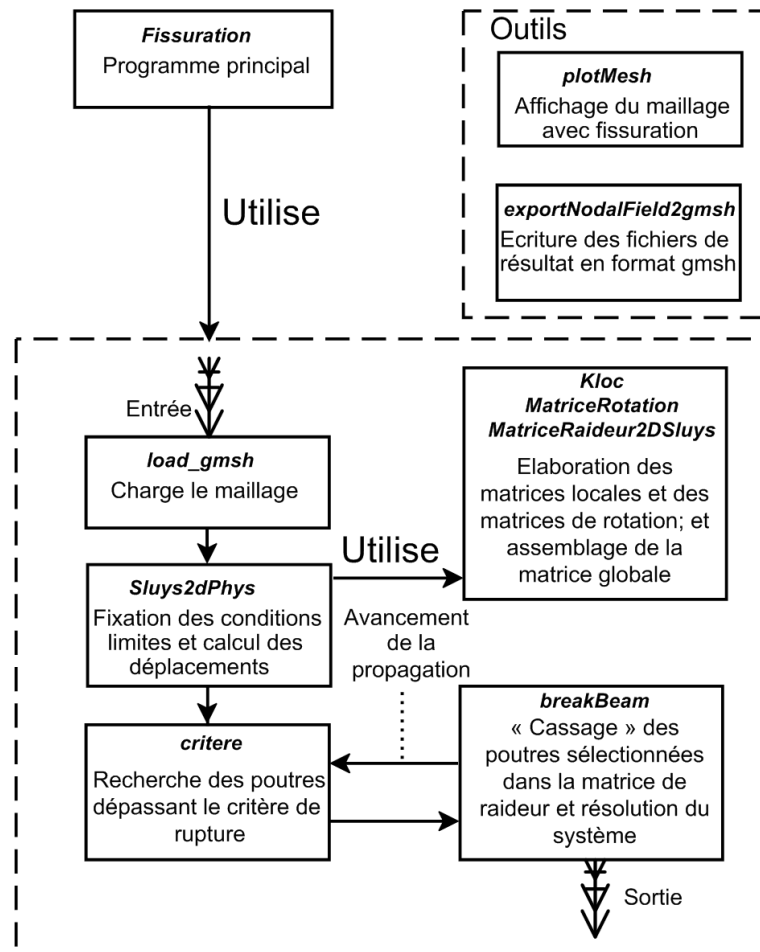


FIGURE 3.2 – Architecture générale du programme

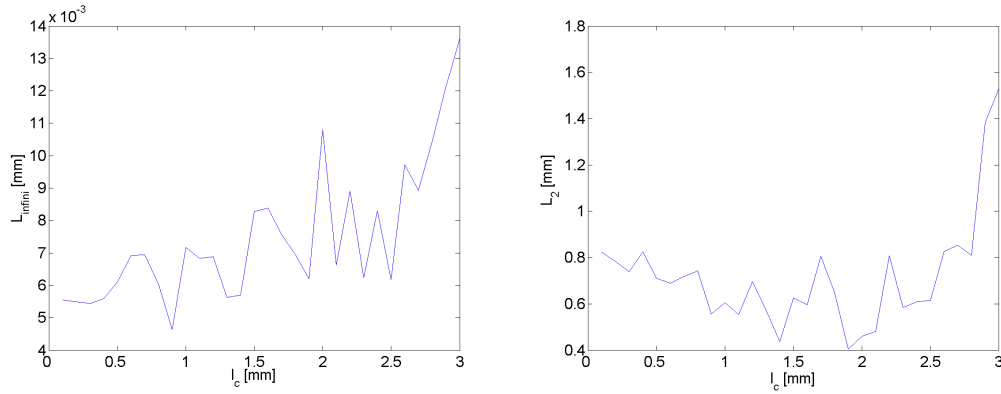


FIGURE 3.3 – Convergences L_{∞} et L_2 des déplacements obtenues par le modèle de treillis de poutres

3.2 Analyse des résultats

3.2.1 Déplacements

Les déplacements obtenus par cette méthode se rapprochent toujours de la solution analytique, mais l'erreur subsistant n'est pas négligeable. De plus, le modèle ne converge pas vers la solution analytique lorsque le maillage est raffiné (figure 3.3). Nous obtenons tout de même des résultats satisfaisants. La figure 3.4 donne les déplacements pour le problème de Lamé dont les résultats peuvent être comparés avec la figure 2.3 pour laquelle les conditions géométriques et d'efforts appliqués sont les mêmes que dans ce cas-ci. Nous observons que les valeurs données pour le calcul des déplacements restent approximatives. Nous pouvons toutefois constater que l'allure générale des déplacements reste bien respectée.

Si le modèle ne converge pas, il n'est tout de même acceptable que pour un domaine de validité de la longueur caractéristique du maillage l_c . Nous pouvons en effet voir à la figure 3.3 qu'au-delà d'un $l_c = 2,5 \text{ mm}$ l'erreur devient très importante.

1. Nous pouvons remarquer ici que la modélisation est réalisée par un treillis de poutres proprement dit. Il existe d'autres types de modélisation, soit basé sur des treillis de barres (ne transmettant entre elles que les efforts normaux, et dont le critère de rupture utilise donc uniquement l'effort normal défini en 3.8), soit ne transmettant que les efforts normaux et tranchants (et donc pas les moments ; la relation 3.9 se trouve alors amputée de son dernier terme faisant intervenir les θ_i)

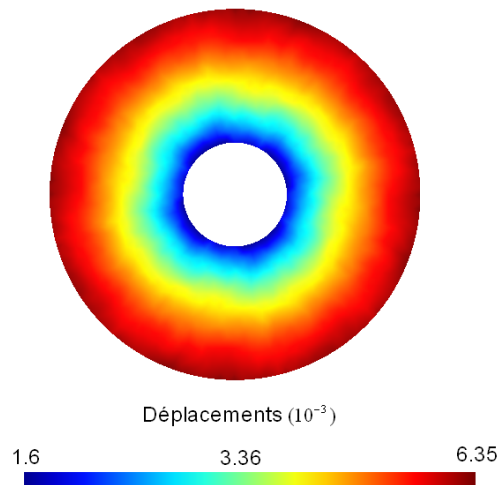


FIGURE 3.4 – Déplacements par le modèle de de treillis de poutres

3.2.2 Champ de contraintes en tête de fissure

Nous pouvons, comme réalisé dans le chapitre précédent et dans les mêmes conditions de chargement et géométrie, visualiser les lobes de contraintes autour de la fissure. Dans ce cas, ne connaissant que les efforts de traction et tranchants dans chaque micro-poutre, la fonction que nous allons représenter est une moyenne sur chaque nœud du critère de rupture défini en 3.10 pour chaque poutre dont le nœud fait partie. Il s'agit donc d'un rapport de contrainte sur la contrainte limite élastique. La limite de la zone plastique sera ainsi atteinte lorsque la fonction vaudra 1. Nous pouvons voir (figure 3.5) les résultats obtenus en comparaison avec la solution analytique en contraintes planes. La limite élastique est toujours fixée à 150 N/mm^2 . Nous pouvons observer que la superficie et la forme de la zone plastique sont assez semblables dans les deux cas ; et que ce modèle se rapproche donc de l'hypothèse de contraintes planes. Nous sommes confortés dans cette hypothèse en observant la zone plastique en mode II (figure 3.6) pour laquelle nous pouvons observer une forme assez semblable aux lobes en contraintes planes donnés par la théorie en 1.11.

Il est à noter que les résultats obtenus sont assez irréguliers ce qui est une conséquence de l'organisation aléatoire du maillage et peut modéliser une certaine hétérogénéité du matériau.

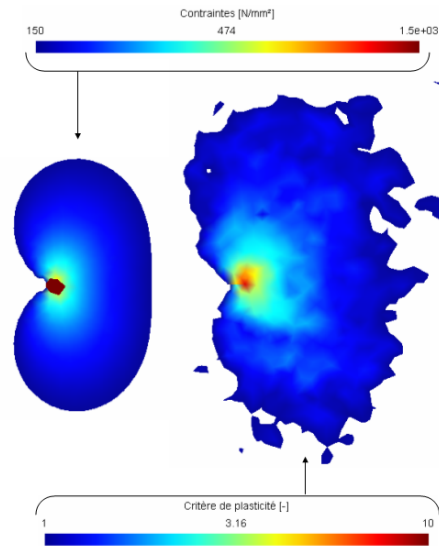


FIGURE 3.5 – Zone plastique en mode I : Solutions analytique et par éléments finis

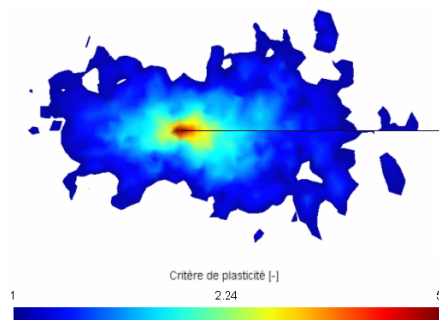


FIGURE 3.6 – Zone plastique en mode II : Solution par éléments finis

3.2.3 Cas des modes purs

A l'opposé du critère énergétique utilisé précédemment, le critère de rupture utilisé dans le modèle de treillis de poutres peut quant à lui être assimilé à un critère de contrainte, c'est-à-dire qu'il y a extension de fissure ou rupture lorsque l'état de contraintes au voisinage de la fissure atteint une configuration critique. C'est bien notre cas, étant donné que nous cassons chaque poutre dont l'état de contraintes dépasse un seuil fixé, fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques de cette poutre. Selon ce critère, la propagation de la fissure (en considérant que la fissure se propage) se fera dans le plan passant par le front de la fissure et au travers duquel la contrainte de tension est maximale; ce qui se traduit [Mia95], en utilisant l'expression des contraintes définie entièrement en fonction des facteurs d'intensité de contraintes par :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3.11)$$

Où K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité de contraintes en modes I et II , et θ donne l'angle par rapport au plan prolongeant la fissure de manière rectiligne. Cette relation peut être calculée par la transformation en coordonnées polaires des équations 1.14, suivie de la maximisation de la contrainte. Nous pouvons en tirer :

$$\cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] = 0 \quad (3.12)$$

Nous savons que pour $\theta = \pm\pi$ (bords libres de la fissure), nous obtenons une solution triviale car les contraintes sont nulles sur ces faces. Il reste :

$$[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] = 0 \quad (3.13)$$

Si nous considérons le mode d'ouverture (mode I) pur, nous obtenons donc :

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0^\circ \quad (3.14)$$

Alors que pour le mode de cisaillement plan, nous avons :

$$(3 \cos \theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \theta = 70,5^\circ \quad (3.15)$$

Comme nous le voyons, cette valeur est sensiblement différente de celle obtenue par critère énergétique qui est de $79,2^\circ$. De plus, au contraire du critère énergétique, cette valeur est indépendante du coefficient de Poisson. La valeur en mode I est par contre la même que l'on utilise le critère énergétique ou le critère de contraintes. Les deux critères seront donc de plus en plus équivalents en se rapprochant d'une situation de mode d'ouverture.

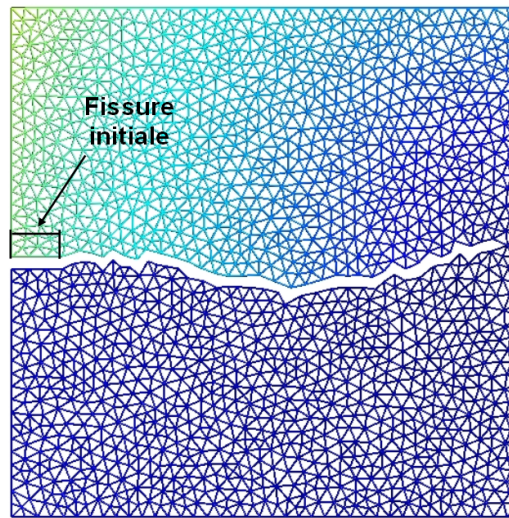


FIGURE 3.7 – Propagation en mode d'ouverture

Cas du mode d'ouverture

Considérons une fois de plus une plaque en traction, comprenant une fissure amorcée à mi-hauteur. Les dimensions de la plaque et les sollicitations sont les mêmes que celles qui étaient d'application pour le modèle énergétique en 2.3.3. Nous pouvons voir (figure 3.7) que la fissure part globalement de manière horizontale. Cette observation respecte donc les prédictions théoriques. Les déviations du chemin de fissuration sont dues à l'hétérogénéité du maillage, et le parcours de la fissure se rapproche de ce à quoi nous pourrions nous attendre pour un matériau pas complètement homogène.

Cas du mode de cisaillement plan

Pour le cas du cisaillement plan, reprenons le cas de charge de la figure 2.20. Cette fois, étant donné que nous ne sommes pas limités à une seule tête de fissure, nous pouvons entamer une fissure initiale à mi-hauteur, mais des deux côtés, gauche et droit, de la plaque. Nous nous attendons à un $\theta = 70,5^\circ$. Nous pouvons observer (figure 3.8) que l'angle obtenu est de $68,0^\circ$. Comme pour le cas précédent, l'angle est mesuré assez près de la tête de fissure initiale. Nous pouvons donc constater que pour ce cas de cisaillement plan, la valeur obtenue est assez proche de celle attendue par la théorie. Nous pouvons tout de même voir que, tant pour le cas du critère énergétique que du

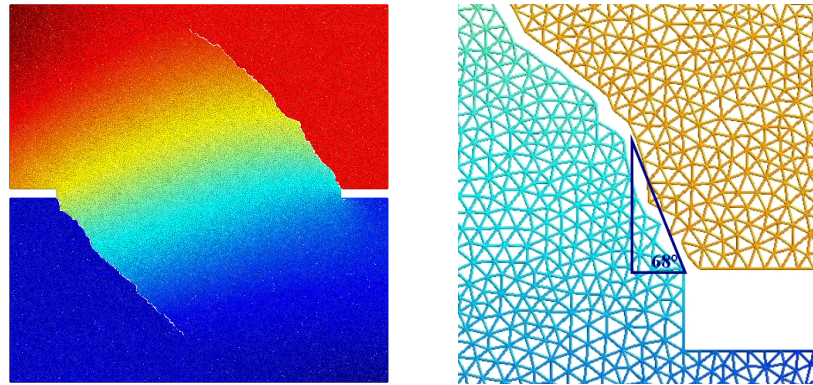


FIGURE 3.8 – Propagation en mode de cisaillement plan

critère de contraintes, nous obtenons une valeur légèrement moindre de celle attendue. Sans doute cela est-il dû à notre cas de charge et d'imposition de déplacements qui ne fournit pas exactement du cisaillement pur.

3.2.4 Influence de la taille du maillage

Mode d'ouverture

Afin de mesurer l'influence de la taille du maillage sur les résultats de simulation, reprenons le cas du mode d'ouverture dans les mêmes conditions géométriques, matérielles et de contraintes appliquées; mais étendons ce cas à des maillages de différentes longueurs caractéristiques. Les tailles caractéristiques de maillage définies sont 3 mm , 5 mm , 7 mm et 10 mm . Sur les résultats obtenus (figure 3.9), nous pouvons observer que le chemin de fissuration peut être assez différent en fonction de la taille du maillage. Toutefois, la tendance générale reste autour de la fissuration horizontale. Ces résultats, sur lesquels une évolution progressive de tendance en fonction de la taille de maillage ne semble pas apparaître montrent que ces différents chemins de fissuration ne sont pas dus à la taille du maillage proprement dite, mais plutôt à l'arrangement des triangles qui diffère. De cette manière, ces différents chemins représentent les résultats de l'hétérogénéité du matériau; de la même manière, si nous déchirons des dizaines de feuilles de papier suivant ce mode d'ouverture, nous n'aurons pas deux fois le même chemin de fissuration. Cette constatation pose le problème de l'hétérogénéité : ne connaissant pas les hétérogénéités sur le matériau réel, il est impossible de prédire avec certitude le

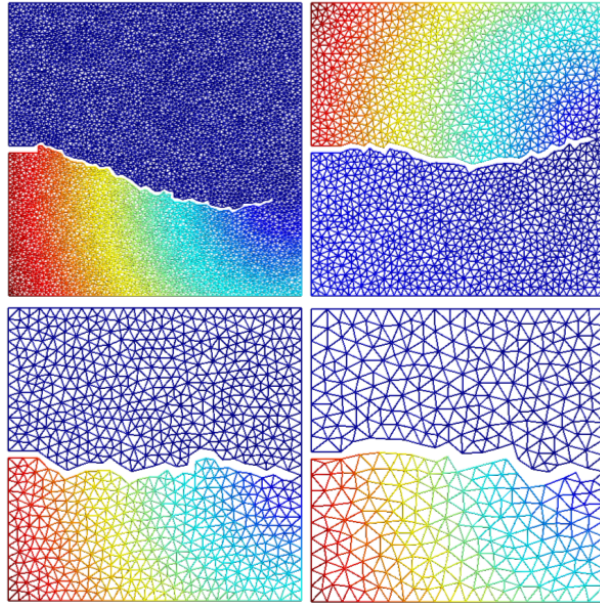


FIGURE 3.9 – Propagation en mode I, avec maillages de longueurs caractéristiques différentes

chemin que va prendre la fissuration. Afin d'obtenir des chemins de fissuration validés pour un certain intervalle de confiance, deux solutions sont possibles : réaliser un grand nombre de simulation, avec des maillages chaque fois différents et réalisés de manière aléatoire ; ou bien utiliser des distributions statistiques pour les caractéristiques physiques et géométriques (maillage) permettant ainsi de réduire nombre de simulations, et c'est ce qui est développé dans [van02].

Mode de cisaillement plan

Testons maintenant le mode de cisaillement plan (repreons également le cas déjà traité) avec des maillages de tailles différentes. Nous pouvons voir (figure 3.10) les résultats obtenus pour un maillage fin, un maillage grossier ainsi que pour un maillage moyen, mais raffiné en se rapprochant du centre de la plaque. Le chemin de propagation semble globalement peu influencé par la taille du maillage. De même, la modification sur le même solide de la taille caractéristique du maillage ne semble pas influencer le chemin de propagation de la fissure. Toutefois, et cela est assez logique, le maillage plus grossier semble donner des changements de direction plus marqués (la propagation de fissure en

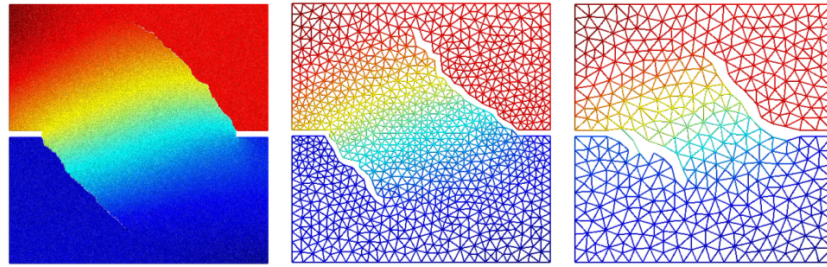


FIGURE 3.10 – Propagation en mode II, avec maillages de longueurs caractéristiques différentes

cassant une seule poutre provoque un avancement plus important du chemin si cette poutre est de longueur plus importante), et la tendance générale de la direction semble moins bien suivie. Il est à noter que la rupture d'une poutre dans un maillage grossier a bien évidemment plus d'influence que la rupture d'une poutre dans un maillage fin. En effet, les poutres étant en nombre inférieur doivent reprendre une plus grande partie des charges. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'épaisseur des poutres augmente avec la longueur de celles-ci dans le modèle de treillis de poutres. Les larges fissures créées pour le maillage grossier déforment donc la structure de manière plus importante que les fissures que nous pouvons trouver pour le maillage fin.

3.2.5 Influence de l'orientation du maillage

Nous pouvons penser que l'orientation du maillage va avoir une influence sensible sur la direction de la fissure. Afin de le déterminer, réalisons un essai de traction avec différents maillages (un maillage irrégulier et deux maillages réguliers²). Une entaille est réalisée de chaque côté de la plaque à mi-hauteur de celle-ci, alors qu'une contrainte de traction homogène est appliquée aux faces supérieure et inférieure de la plaque. Les résultats (figure 3.11) montrent que la direction horizontale de fissuration est bien respectée pour chaque maillage. Toutefois, comme nous pouvons l'observer, les deux maillages réguliers favorisent nettement la direction parfaitement horizontale et ne modélisent pas une certaine hétérogénéité du matériau. En effet, les poutres ayant une orientation horizontale sont très peu sollicitées par l'effort de traction verticale (cet effort a d'ailleurs pour effet de les mettre en compression, les renforçant davantage selon

2. Ces maillages sont réalisés par un empilement de triangles équilatéraux de 1mm et 2mm de côté

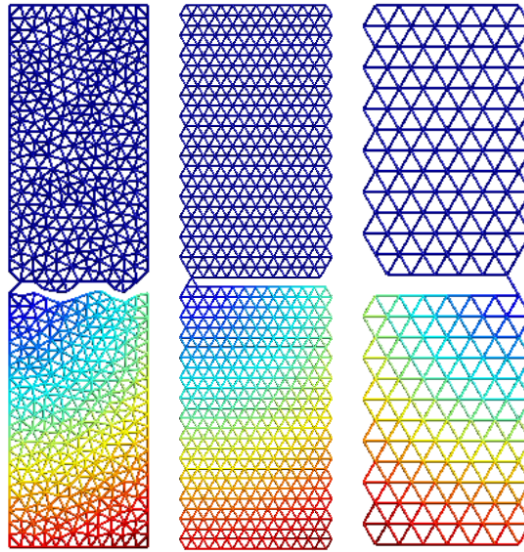


FIGURE 3.11 – Simulation de poutre en traction avec différents maillages

le critère de rupture 3.10), et elles ne se rompent donc pas. Ainsi, la fissuration est canalisée entre les lignes horizontales. Pour le maillage irrégulier, pour lequel les poutres n'ont pas d'orientation préférentielle, l'hétérogénéité du matériau est mieux modélisée. Le maillage irrégulier présenté ici n'est toutefois pas complètement irrégulier, car une ligne horizontale sépare la moitié supérieure de la moitié inférieure de la plaque en traction. De ce fait, la fissure reste continuellement du même côté de cette ligne horizontale. Nous pouvons également observer que la fissure s'amorce selon le cas par la gauche ou par la droite. Ceci est normal. N'ayant aucune préférence particulière, la fissuration va choisir un côté, soit par une asymétrie de maillage, soit dans le cas d'une symétrie parfaite par un arrondi mathématique. Ensuite, la fissure amorcée, soumise à une concentration de contraintes plus forte, va se propager jusqu'au côté opposé.

Dans ce cas, l'orientation particulière du maillage n'a pas eu une influence trop négative, car la fissuration est précisément canalisée dans sa trajectoire théorique. Ce n'est cependant pas toujours le cas. Nous pouvons observer (figure 3.12) un cas de maillage particulier. Ce maillage pourrait très bien s'appliquer dans le cas d'un mur de maçonnerie. En effet, la partie centrale, représentant un joint entre deux briques voisines possède des dimensions assez réduites par rapport aux dimensions de la brique. Il convient donc d'avoir un maillage assez raffiné dans cette zone de joint. Toutefois, la

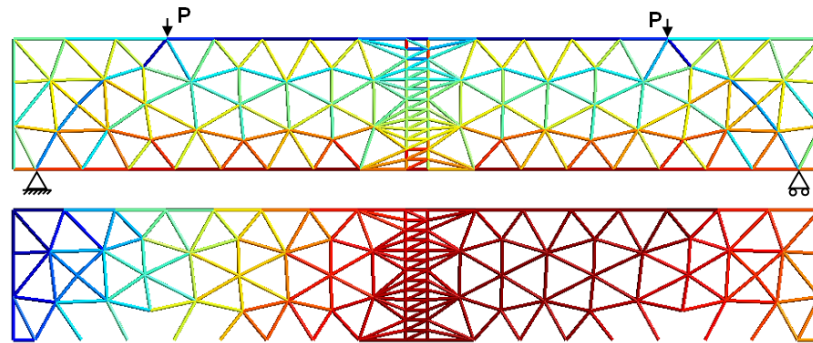


FIGURE 3.12 – Poutre en matériau hétérogène en flexion avec maillage particulier

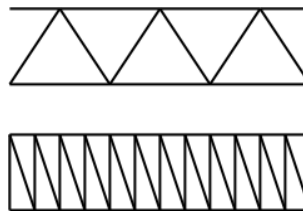


FIGURE 3.13 – Différents types de maillage

brique de dimensions plus importantes ne nécessite pas un maillage si raffiné. Il faut donc une transition entre un maillage raffiné et un maillage plus grossier. Sur la figure 3.12, nous pouvons observer les conditions imposées au solide. Il s'agit donc d'un essai de flexion quatre points. De ce fait, le moment fléchissant est constant entre les points d'application des deux forces et la fissure devrait donc se créer sur la face inférieure du solide et pour une coordonnée horizontale située entre ces points d'application de forces. Toutefois, la partie centrale (qui peut donc représenter un joint dans un mur) possède une résistance à la traction f_t deux fois moindre que la résistance à la traction des deux parties extérieures. C'est donc dans cette partie centrale que la fissure devrait s'amorcer. Or, ce n'est pas le cas (image inférieure de la figure 3.12). La raison expliquant ce phénomène est la configuration du maillage. En effet, nous savons que chaque micropoutre possède une hauteur augmentant linéairement avec sa longueur de manière à rendre les résultats insensibles à la longueur de ces micropoutres. Toutefois, comme nous pouvons le voir en figure 3.13, lorsque le maillage est constitué comme le schéma inférieur (c'est à dire avec des triangles plus plats), la longueur (et donc la hauteur) des micropoutres est légèrement diminuée par rapport à la disposition du

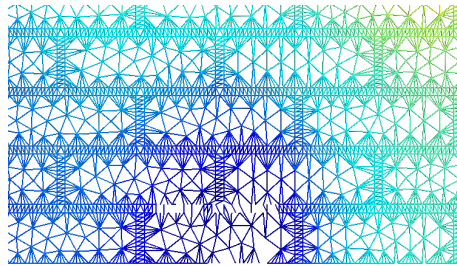


FIGURE 3.14 – Partie centrale de la fibre inférieure d’un mur en flexion quatre points

schéma supérieur (dans la figure 3.13 la longueur est diminuée de 17% pour les micropoutres verticales et 12% pour les micropoutres inclinées), mais le taux d’occupation des poutres sur le même espace est nettement supérieur (celui-ci est augmenté de 300% dans notre illustration). La résistance dans cette configuration est donc bien plus grande que celle que donnerait la configuration du schéma supérieur. De plus, dans le schéma inférieur, les poutres possèdent une orientation beaucoup plus verticale, ce qui leur permettra d’accroître encore leur résistance en reprenant plus directement les efforts de traction. Si nous avons considéré un effort de cisaillement horizontal, la configuration possédant de larges triangles obtiendrait sans doute une résistance supérieure. Ainsi, si nous observons sur l’image supérieure de la figure 3.12 l’affichage des contraintes sollicitant chaque micropoutre (il s’agit en réalité du rapport des contraintes sur la contrainte de résistance maximale, différenciant ainsi les deux matériaux), nous pouvons voir que, dans ce que nous pouvons considérer comme de la brique (les deux grands rectangles extérieurs), la contrainte de traction n’est pas uniforme sur la fibre inférieure des briques entre les points d’application des forces. S’agissant d’un essai quatre points, ces contraintes se devraient d’être uniformes, mais les empilements de triangles plus plats dans les extrémités intérieures des briques font qu’il y a plus de micropoutres pour reprendre la même traction ; la contrainte dans ces poutres est donc diminuée. Pour ce qui est du joint (la partie centrale), la contrainte est également diminuée vu le grand nombre de poutres presque horizontales mais, étant donné que la résistance à la traction de ce matériau est diminuée, le rapport de la contrainte appliquée aux poutres sur la contrainte de résistance maximale reste tout de même important, sans être toutefois suffisant pour entraîner la rupture. Ce sont donc les briques qui vont céder, dans la zone où le maillage est réalisé par des triangles plus ouverts. Nous pouvons observer (figure 3.14) une zone de mur représentant la fibre inférieure de la partie

centrale de celui-ci. Ce mur est soumis à un essai de flexion quatre points. Il s'agit donc de l'extension du cas précédent au mur complet. Les mêmes conclusions sont à tirer : la fissuration s'amorce également dans la brique et non dans le joint. Une partie des micropoutres appartenant aux joints horizontaux se sont rompues, car celles-ci n'ont pas une géométrie permettant de reprendre les efforts de cisaillement entre les deux couches de briques.

Nous pouvons facilement imaginer que d'autres organisations de maillage peuvent amener à des résultats s'écartant du comportement d'un matériau réel. Les redistributions des efforts dans un treillis de poutres ayant une certaine organisation peuvent favoriser la reprise de certains types d'efforts ou annuler d'autres types d'efforts dans les poutres. C'est d'ailleurs ce que les concepteurs de structures en treillis de poutres réelles recherchent afin d'améliorer la résistance de leur structure en minimisant le matériau. Il faut donc veiller à éviter toute organisation artificielle ou régularité du maillage si nous voulons modéliser au mieux le matériau hétérogène (excepté si nous voulons reproduire une organisation spécifique de la structure microscopique du matériau).

3.2.6 Comparaison avec des résultats existants

Afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus par [Cha02b] avec un maillage régulier, essayons d'appliquer la même méthode pour le critère de rupture que celle utilisée dans ce document, c'est-à-dire non plus rompre les micropoutres une à une et recalculer les contraintes et déplacements après chaque rupture d'une micropoutre³, mais rompre en une seule fois toutes les poutres dont les contraintes dépassent le critère limite et ensuite recalculer les déplacements et la redistribution des contraintes. Les résultats obtenus pour deux tailles de maillage différentes sont présentés en figure 3.15, notés *A* pour les simulations réalisées dans le cadre de ce travail, alors que ceux provenant de [Cha02b] sont notés par un *B*. Il y a quelques différences visibles. Tout d'abord, dans les deux cas, la fissuration s'amorce à une hauteur inférieure lorsque nous considérons la modélisation *B*, mais la raison en est simple : bien que dans les deux cas une entaille initiale ait été réalisée, l'entaille présente dans la modélisation *A* est effectuée à mi-hauteur alors que dans *B* celle-ci a été réalisée un peu plus bas. Une autre différence, plus problématique, concerne la microfissuration s'étendant autour de la fissure principale. En effet, il semble que, pour notre implémentation *A*, cette mi-

3. C'est ce qui implémenté dans le cadre de ce travail et qui est décrit dans [Sch96]

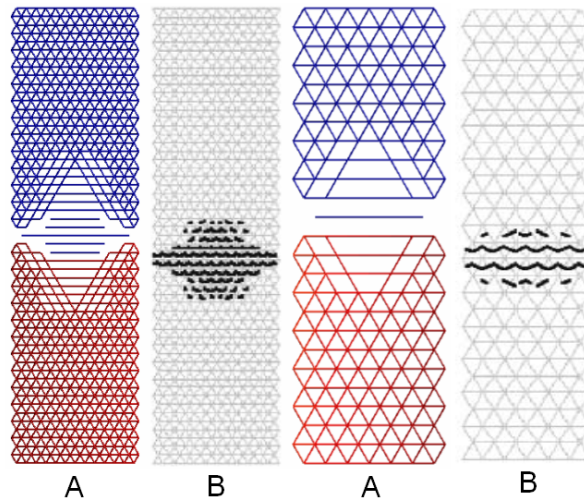


FIGURE 3.15 – Essai de traction : comparaison avec des résultats existants

crofissuration, parallèle à la fissure principale, s'étend de manière plus prononcée vers les extrémités de la plaque. Cela s'explique également par une différence des conditions de modélisation. En effet, le matériau considéré en *A* possède des caractéristiques de résistance identiques sur tout le matériau, alors que pour *B*, la partie centrale possède une résistance à la traction moindre⁴, ce qui a pour effet de concentrer la fissuration en cet endroit plus faible.

3.2.7 Essai quatre points sur une poutre

Afin de tester notre modèle dans de nouvelles conditions, considérons maintenant le cas de la poutre en flexion quatre points (réalisé précédemment pour le modèle énergétique). Toutefois, dans le cas du modèle de treillis de poutres, nous pouvons nous intéresser à plusieurs têtes de fissure; et le choix entre fissure de flexion/cisaillement est fait par le programme lui-même. Nous ne devons donc pas fixer à priori une fissuration initiale. Les résultats ainsi obtenus sont repris en figure 3.16. Pour les deux premières représentations, la distance horizontale entre chaque appui et le point d'application de la force la plus proche est suffisamment grande. De cette manière, comme nous pouvons le voir en figure 3.17, l'effort de flexion possède une valeur importante par

⁴. Cette partie centrale possède une résistance à la traction des micropoutres de $3,16\text{MPa}$ alors que pour le reste de la plaque cette résistance est de $4,16\text{MPa}$

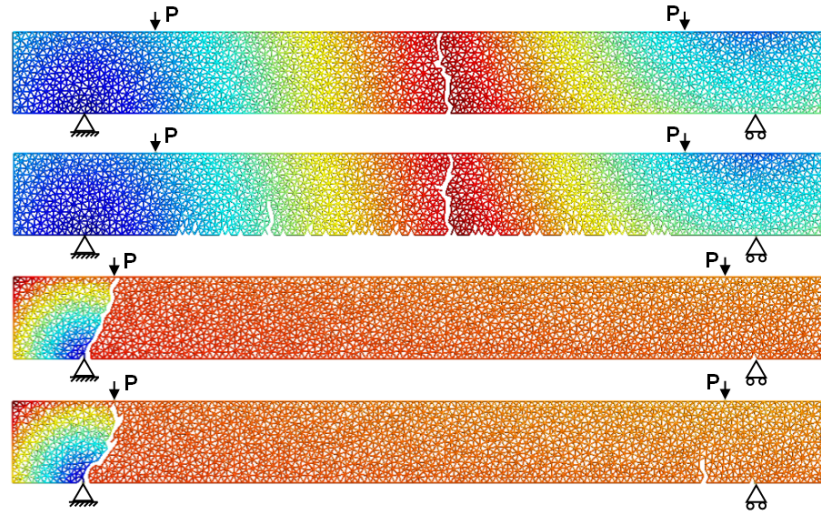


FIGURE 3.16 – Poutre soumise à un essai quatre points

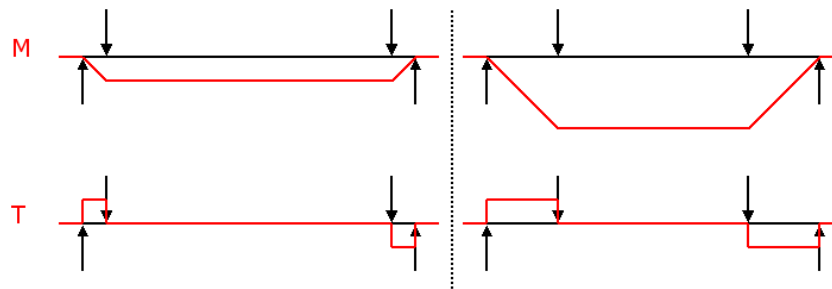


FIGURE 3.17 – Efforts dans une poutre soumise à un essai quatre points

rapport à l'effort tranchant. La fissure va donc se développer en flexion sur une abscisse située entre les points d'application des deux forces ; ce qui est bien le cas lorsque nous regardons la fissure.

Si nous déplaçons les points d'application des forces vers les extrémités de la poutre, nous pouvons voir (figure 3.17) que les efforts de flexion vont être diminués alors que la valeur de l'effort de cisaillement entre les appuis et les points d'application des forces restera inchangée. De cette manière, l'effort de cisaillement va avoir tendance à prendre de l'importance par rapport au moment fléchissant ; et nous nous dirigerons vers une fissuration de cisaillement similaire à celle vue en 2.3.4. C'est ce que nous pouvons voir sur la troisième poutre de la figure 3.16. Cette fissuration ne se fait toutefois que sur un seul côté de la poutre, pourtant symétrique. Nous pouvons expliquer cela par le fait que les hétérogénéités du maillage ont poussé la fissure à être entamée plutôt d'un côté que de l'autre. Une fois la fissure entamée, la propagation de celle-ci sera préférentiellement choisie à la création de nouvelles fissures, car la fissure créée engendre une concentration de contraintes et une réduction de la section de la poutre.

Dans la réalité, il se peut que la microfissuration se fasse simultanément en divers endroits ; ou du moins que leur succession se réalise de manière rapide, avant que les contraintes n'aient eu le temps de se redistribuer. Afin de simuler cela, nous pourrions laisser une certaine relaxation pour la rupture des micropoutres, c'est-à-dire non plus casser ces micropoutres une par une et recalculer les nouveaux déplacements et contraintes directement ; mais plutôt en casser plusieurs avant de passer à la suite. Ceci est réalisé pour les seconde et quatrième poutres de la figure 3.16. Nous pouvons voir que pour le cas de la flexion dominante, un grand nombre de microfissures s'amorcent sur la face inférieure de la poutre, pour les abscisses situées entre les points d'application des deux forces. Cette microfissuration est validée par la pratique et s'explique facilement en théorie. En effet, lorsque nous observons le diagramme des moments en figure 3.17, nous pouvons voir que le moment fléchissant est constant sur toute la longueur considérée. Ainsi la fissuration, ne connaissant pas de position préférentielle pour s'amorcer, va se développer sur toute la longueur, au gré de la disposition du maillage. Si cette disposition avantage un chemin de fissuration particulier, celui-ci va se développer et augmenter la concentration de contraintes en sa tête, arrêtant ainsi la propagation des autres microfissures. Dans le cas du cisaillement dominant, nous pouvons voir qu'une fissure de cisaillement s'est amorcée, mais également une fissure de flexion. Finalement, le cisaillement prenant le dessus, la rupture se fera selon ce mode. Nous pouvons éga-

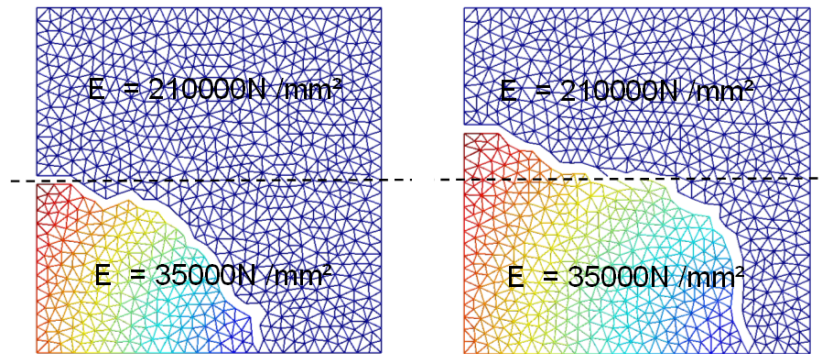


FIGURE 3.18 – Propagation en matériau hétérogène

lement observer que la fissure de cisaillement s’ouvre en divers chemins de fissuration ; ce qui était également difficile à modéliser avec la première approche énergétique.

Grâce à cet essai, nous avons pu observer quelques effets intéressants, que nous pouvons retrouver dans la réalité. Toutefois, nous n’avons pas obtenu une modélisation d’un essai réel, pour lequel une multitude de fissures de flexion, cisaillement ou flexion/cisaillement sont présentes (plus d’informations sur la fissuration des poutres en flexion se trouvent dans [Cap02]). Cela semble être dû à la taille du maillage par rapport aux dimensions de la poutre. Il est évident que la taille caractéristique de la microstructure d’un mortier par exemple est bien inférieure à celle de notre maillage. De cette manière, une microfissure sur un matériau réel est très petite et n’a qu’une influence limitée sur le comportement du matériau alors que la plus fine des fissures dans notre modèle possède de bien plus grandes proportions et une plus grande influence sur le comportement.

3.2.8 Matériau hétérogène

Testons maintenant ce modèle pour un matériau hétérogène, avec les mêmes conditions que pour la modélisation utilisant le critère énergétique faite en 2.3.5, c’est-à-dire avec un module d’élasticité plus élevé pour la partie supérieure de la plaque que pour la partie inférieure. Les résultats se trouvent en figure 3.18 et nous pouvons voir que le chemin de propagation est très similaire, dans les deux cas étudiés, à celui observé avec le critère énergétique en figure 2.23. Le chemin de fissuration est également attiré

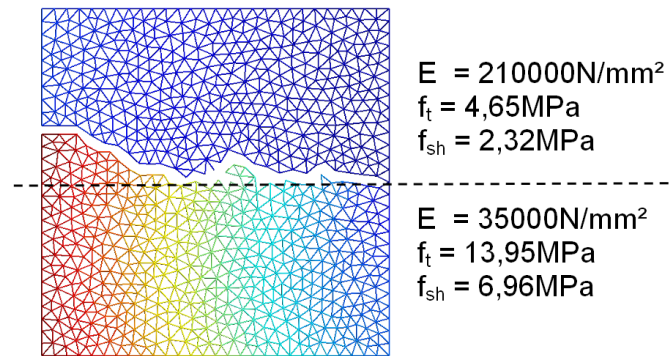


FIGURE 3.19 – Propagation en matériau hétérogène avec résistances différentes

vers le matériau mou. Pour cet essai, les caractéristiques de résistance des matériaux, supérieur et inférieur, sont égales. Étant donné que le modèle de treillis de poutres nous le permet, nous allons également tenter d'assigner deux résistances différentes aux deux parties de la plaque. Pour ce faire, nous allons donner aux micropoutres des valeurs des résistances au cisaillement f_{sh} et à la traction f_t triples pour la moitié inférieure que pour la moitié supérieure. Comme nous pouvons observer (figure 3.19), la fissure est attirée par le matériau mou et descend jusqu'à l'interface. Cependant, une fois celle-ci atteinte, la résistance trop élevée du matériau mou force la fissure à longer l'interface jusqu'à l'extrémité de la plaque. Ces résultats sont donc concluants.

Chapitre 4

Confrontation des deux méthodes

Nous avons décrit dans les chapitres précédents deux modélisations de la propagation des fissures ; et validé ces modélisations pour des cas de géométries et chargements simples. Afin de poursuivre notre étude, il convient dès lors de confronter ces deux méthodes pour déterminer laquelle sera la mieux adaptée à la modélisation d'un mur en maçonnerie.

4.1 Limitations dans le chemin de fissuration

Un des avantages de la méthode de treillis de poutres est le fait qu'elle permet la modélisation de plusieurs chemins de propagation simultanés. Cette approche permet donc la modélisation des microfissures fortement présentes dans certains matériaux tels que les bétons. L'approche macroscopique ne considérant qu'un chemin de fissuration est donc limitative dans ce sens. La modification du programme maximisant l'énergie de Griffith afin de considérer plusieurs chemins de fissuration est possible, bien que ce programme demanderait un temps de calcul bien plus élevé. Le nombre de possibilités à tester serait en effet beaucoup plus grand. De plus, cette modification ne permettrait que de modéliser des séparations de fissures en plusieurs branches (dont le nombre est limité), ou bien les propagations séparées de fissures bien distinctes. Elle ne permettrait pas de créer de la microfissuration par elle-même, le nombre de cas à tester afin de choisir celui donnant la plus haute restitution d'énergie devenant alors infini.

De ce fait, un autre désavantage de la méthode énergétique est qu'il est nécessaire

d'amorcer soi-même la fissure car le programme ne le fera pas de lui-même. Ceci implique de connaître à priori en quel endroit cette fissure va s'amorcer, ce qui n'est pas toujours évident dans certains cas de chargement et de géométrie. Le modèle de treillis de poutres, quant à lui, permet l'amorçage par le programme d'un grand nombre de fissures simultanées (le nombre de fissures créées change, comme nous l'avons vu, avec la relaxation effectuée pour la rupture des micropoutres), et même l'interaction entre ces différentes fissures.

Bien que l'approche énergétique soit limitée par le nombre de chemins de fissuration à tester, l'approche par treillis de poutres est quant à elle limitée par le maillage que le chemin de fissuration doit suivre. Celui-ci en effet ne progresse que par la rupture des poutres soumises aux efforts trop importants, et ne peut donc progresser que dans une direction traversant ces poutres. De plus, la longueur d'un incrément de fissuration est déterminée par le passage de la tête de fissure à partir d'un triangle vers le triangle voisin séparé du précédent par la poutre rompue.

4.2 Facilité d'implémentation

Le modèle élastique nécessite un remaillage en tête de fissure pour chaque nouveau calcul des déplacements, ainsi qu'une fissuration totalement intégrée dans la géométrie du problème. Ceci implique des modifications dynamiques de cette géométrie qui peuvent poser quelques problèmes, notamment pour des géométries plus complexes comme un mur de maçonnerie pour lequel la fissure (ou certaines de ses propagations virtuelles) doit fréquemment passer d'un matériau à l'autre. Le problème est plus facile à résoudre par l'approche du treillis de poutre. Chaque micropoutre possède au départ les caractéristiques propres à sa géométrie, ainsi qu'au matériau qu'elle modélise. Ensuite, il n'y a plus à prendre en compte les différences entre matériaux ; il s'agit juste de rompre les poutres pour lesquelles le critère de rupture est dépassé, en faisant intervenir les caractéristiques propres de ces poutres. La propagation de la fissuration ne modifie pas la géométrie du problème, mais ne fait que soustraire certains éléments de la matrice de raideur par suppression des poutres rompues. L'approche multimatériaux et l'extension à des cas plus généraux est donc plus aisée.

Un autre problème à considérer pour l'approche énergétique est celui de l'implémentation d'une loi de contact. En effet, certaines configurations peuvent provoquer le

renfermement, ou même la formation, de fissures en compression sur elle-mêmes ; puis le chevauchement des deux zones situées de part et d'autre de la fissure. Cette situation ne modélisant pas la réalité, il est donc impératif de créer une loi de contact interdisant le chevauchement de surfaces. Une forme simple d'une telle loi est :

$$F = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq 0 \\ \infty & \text{si } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où ε représente la distance entre deux nœuds confondus au repos et dédoublés par une fissure. Cette distance est positive dans le cas d'une ouverture de fissure et négative dans le cas contraire. F représente la force entre ces deux nœuds, dirigée dans la direction de cette distance ε et positive lorsqu'elle tend à faire ouvrir la fissure.

Pour ce qui est de l'approche par treillis de poutre, la rupture se fait par un critère en traction et cisaillement sur chaque micropoutre. Une micropoutre ne sera donc pas rompue par la compression, ce qui fait que les fissures auront toujours tendance à s'ouvrir naturellement. Certaines modifications des conditions pourraient toutefois, dans des cas assez rares, refermer des fissures sur elles-mêmes et entraîner un chevauchement de surfaces mais ce cas ne sera pas abordé.

4.3 Indépendance des solutions

Nous avons vu que l'approche de modélisation par treillis de poutres peut être fortement influencée par l'orientation et l'organisation du maillage utilisé, et ceci constitue un inconvénient majeur. Il s'agit donc d'éviter pour ce modèle toute organisation artificielle du maillage. De plus, la taille du maillage modifie également l'importance de la fissure et son influence sur le comportement du matériau. Pour le modèle de maximisation du taux de restitution d'énergie, la solution est entièrement basée sur le calcul des déplacements réalisé par la méthode des éléments finis à partir des équations d'élasticité 2D, et cette solution est indépendante de l'organisation du maillage, ou du moins tend toujours vers la solution analytique lorsque le pas de maillage tend vers zéro. L'organisation du maillage n'a donc pas d'influence pour un maillage suffisamment fin.

4.4 Matériau modélisable

De par son approche continue, la modélisation élastique s'appliquera plus facilement aux matériaux plutôt homogènes ou à structure microscopique très fine par rapport aux dimensions de l'ensemble. La modélisation par treillis de poutres représentera mieux les matériaux à structure plus grossière, pour lesquels les hétérogénéités engendrent des effets plus visibles. Les matériaux granuleux tels que le mortier conviendront donc mieux à cette seconde approche. Plus la taille des micropoutres sera faible, plus la modélisation reflétera le comportement d'un matériau homogène à structure fine.

D'autre part, l'approche par treillis de poutres modélisera mieux les matériaux ayant tendance à développer une microfissuration alors que l'approche énergétique modélisera davantage des matériaux pour lesquels existent seulement des fissures principales bien marquées.

4.5 Précision

Pour le calcul des déplacements, le premier modèle réalisé par la méthode des éléments finis dérivant directement de la solution analytique, est d'une précision très acceptable pour un maillage raisonnable et tend vers la solution exacte lorsque la longueur caractéristique du maillage tend vers zéro. Le second modèle, en plus de ne pas converger vers la solution lorsque le maillage est raffiné, ne donne pas des résultats toujours très précis. Toutefois, l'allure générale des déplacements est respectée, et la différence sur les valeurs des déplacements ne semble pas avoir beaucoup d'influence sur le chemin de propagation de fissure calculé.

4.6 Modélisation du multimatériaux

Comme nous l'avons vu, bien que l'approche énergétique permette de prendre en compte des modules d'élasticité et coefficients de Poisson différents pour plusieurs matériaux, elle ne permet pas (du moins sans l'ajout d'un critère de rupture, nécessitant le calcul d'une énergie de Griffith critique) d'assigner différentes caractéristiques de résistance à ces matériaux, susceptibles de changer le chemin de propagation de la fissuration. La version actuelle du programme ne peut pas se généraliser à des matériaux

de résistances différentes comme le mur de maçonnerie. Le modèle de treillis de poutres prend, quant à lui, directement cette résistance en compte en utilisant les résistances limites à la traction et au cisaillement pour chaque micropoutre.

4.7 Temps d'exécution

L'ordre du temps d'exécution dépend de nombreux paramètres. Pour l'approche énergétique, les paramètres principaux sont, pour une géométrie donnée :

- **le pas caractéristique du maillage**, influençant sur le nombre de points et donc la taille de la matrice de raideur. Nous pouvons observer en figure 4.1 la courbe du temps d'exécution obtenue en fonction de la taille caractéristique du maillage, lors d'un essai de fissuration en mode I. Nous pouvons voir que l'approximation suivante modélise relativement bien la courbe obtenue :

$$t = \frac{140000}{l_c^4} + 45 \quad (4.2)$$

où t représente le temps d'exécution et l_c la longueur caractéristique du maillage. Étant donné que nous sommes en deux dimensions, le nombre d'inconnues varie en $n_{\text{inc}} = \mathcal{O}(l_c^{-2})$. La résolution a donc l'air de varier en $\mathcal{O}(n_{\text{inc}}^2)$. Ce résultat est conforté par le fait que le temps d'exécution est majoritairement utilisé par l'assemblage de la matrice de raideur dont le nombre d'éléments est égal au nombre d'inconnues mis au carré.

- **la longueur d'un incrément de propagation de fissure virtuel** (et donc le nombre de ces incréments). Si cette longueur est divisée par n , il faudra effectuer n fois plus d'incrément de propagation afin d'obtenir la même longueur de fissuration. L'influence sur le temps d'exécution est donc une relation inverse.
- **la longueur sur laquelle nous voulons propager la fissure**. De la même manière que pour le point précédent, cette valeur va faire varier le nombre d'incrément de fissure à réaliser afin d'être atteinte. L'évolution du temps d'exécution avec la longueur est linéaire. Nous pouvons observer en figure 4.2 que c'est bien le cas.
- **le nombre de directions de fissuration virtuelles à tester**. Le nombre de situations à calculer (et donc le temps d'exécution) varie également linéairement avec le nombre de directions à tester.

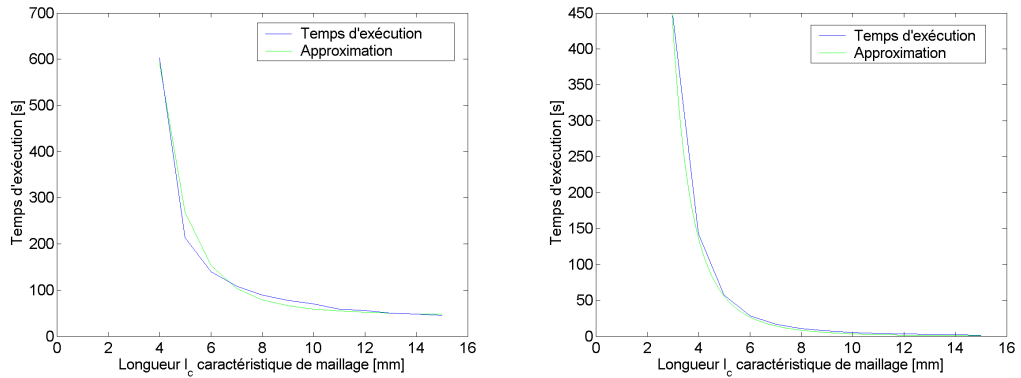


FIGURE 4.1 – Temps d'exécution en faisant varier la longueur caractéristique de maillage. Approches énergétique (à gauche) et par treillis de poutres (à droite)

L'évolution du temps d'exécution varie donc de la forme suivante :

$$\mathcal{O}(l_c^{-4}, a^{-1}, \Delta l, n_\theta) \quad (4.3)$$

où l_c , a , Δl et n_θ représentent dans l'ordre les quatre paramètres cités précédemment. Il existe évidemment d'autres paramètres influençant le temps d'exécution, mais ceux-ci sont moins déterminants. Seuls les paramètres cités influencent directement la taille de la matrice de raideur ainsi que le nombre d'assemblages de cette matrice et de résolutions du système d'équations à effectuer.

Pour le modèle de treillis de poutres, toujours en considérant une géométrie donnée, les paramètres principaux sont :

- **le pas caractéristique du maillage.** Celui-ci, en plus d'influencer la taille de la matrice de raideur, modifie également la longueur de propagation de la fissure lorsque nous cassons une poutre (une poutre rompue étant comprise dans un plus grand triangle correspondra à une plus grande avancée de fissure) et donc le nombre de ces propagations à effectuer afin d'atteindre la longueur totale de fissuration désirée. Nous pouvons également observer en figure 4.1 la courbe du temps d'exécution obtenue en fonction de la taille caractéristique du maillage. La courbe peut cette fois être modélisée par la relation suivante :

$$t = \frac{35000}{l_c^4} \quad (4.4)$$

Nous observons toujours une relation d'ordre $1/l_c^4$ pour le temps d'exécution.

- **la longueur sur laquelle nous voulons propager la fissure.** Cette influence est assez difficile à prédire, car au plus la fissure avancera, au plus le nombre de poutres utilisées diminuera et au plus chaque incrément de fissure sera effectué rapidement. Toutefois, si nous considérons que le nombre de poutres rompues est insignifiant par rapport au nombre de poutres totales, l'évolution du temps d'exécution avec ce paramètre sera linéaire. La droite d'évolution du temps d'exécution ne devrait toutefois pas être trop croissante, étant donné que l'assemblage de la matrice de raideur n'est pas réalisé de nouveau pour chaque incrément de propagation de fissure. Seule la résolution du système d'équations est en effet réalisée lors de ces incréments. Nous voyons en figure 4.2 que l'évolution est bien linéaire et que le nombre de poutres déjà rompues a donc bien une influence insignifiante sur le temps d'exécution.
- **le facteur de relaxation pour la rupture des poutres.** Si nous rompons le double de poutres simultanément chaque fois que nous avons calculé les déplacements et contraintes, le temps d'exécution sera quasi divisé par deux. Nous obtenons donc une relation inverse. Notons que, comme nous l'avons vu, cette relaxation peut influencer les résultats numériques obtenus.

Pour cette modélisation, nous pouvons donc caractériser l'évolution du temps d'exécution par :

$$\mathcal{O}(l_c^{-4}, \Delta l, f_r^{-1}) \quad (4.5)$$

où f_r représente le nombre de poutres rompues après chaque redistribution des contraintes

Les ordres des méthodes sont donc assez semblables pour les deux modélisations. Toutefois, cela n'implique pas que leurs temps d'exécution respectifs soient similaires. Théoriquement, le temps d'exécution du programme avantagera l'une ou l'autre modélisation en fonction de la longueur sur laquelle nous désirons propager la fissure. En effet, la matrice de raideur utilisée par le treillis de poutres considère les déplacements et forces selon les axes x et y , mais également selon l'angle de rotation θ (figure 3.1) ; alors que la matrice de raideur utilisée pour le calcul élastique classique des déplacements dans la première approche considère uniquement les deux directions x et y . La matrice de raideur utilisée pour le treillis de poutres possède donc des dimensions 50% plus grandes que dans le cas de la première approche, ce qui entraîne qu'elle contiendra 2,25 fois plus d'éléments. Quand nous savons que la majorité du temps de calcul est occupée par l'assemblage, cette différence est très significative.

De plus le modèle de treillis de poutres devra adopter un treillis plus raffiné afin d'obtenir des résultats de précision comparables. En effet, l'approche énergétique permet un remaillage en tête de fissure qui n'est pas réalisable dans le cas du treillis de poutres où ce remaillage ferait perdre toutes les informations concernant les poutres rompues et celles qui sont intactes. Il s'agit donc dans le cas du treillis de poutres de réaliser un maillage suffisamment fin sur tout le domaine, ou du moins pour les zones dans lesquelles la fissuration est susceptible de se propager. Le maillage dans le cas du treillis de poutres se doit d'être assez fin lorsque nous sommes proches de la fissure pour deux raisons : tout d'abord afin de représenter convenablement le champ de contraintes singulier proche de la tête de fissure. Ensuite, afin de limiter l'influence d'un pas de propagation de fissure. En effet, comme nous l'avons déjà énoncé, si les poutres proches de la tête de la fissure sont trop grandes, la rupture d'une de ces poutres va provoquer des modifications trop importantes sur le comportement du solide car la zone d'influence de la fissure sera plus vaste que la zone d'influence de la fissure réelle. Sur base de ces considérations, le maillage utilisé dans le cas de la modélisation par treillis de poutres possédera plus d'éléments qu'un maillage réalisé pour le même problème par l'approche énergétique. Rappelons que doubler le nombre des points du maillage entraînera une multiplication par quatre du nombre d'éléments de la matrice de raideur. Ceci, en plus de l'ajout de la coordonnée θ dans le modèle de poutres, fera que ce dernier utilisera un temps bien plus long pour l'assemblage de la matrice de raideur ainsi que la résolution du système.

Toutefois, la méthode de treillis de poutres ne nécessite qu'un seul assemblage total de la matrice de raideur. Ensuite, cette matrice sera seulement légèrement modifiée par la suppression de la raideur de chaque poutre rompue. L'approche énergétique devra quant à elle réaliser l'assemblage pour chaque direction de fissuration testée, et cela pour chaque incrément de fissuration. Tel que nous pouvons le voir sur la figure 4.2, cette différence est essentielle. En effet, pour de petites longueurs de propagation de fissure, le temps d'exécution de la modélisation par l'approche énergétique est plus bas. Mais dès que cette longueur (et donc le nombre d'incrément de propagation) augmente, le temps d'exécution augmente beaucoup plus vite pour l'approche énergétique que pour l'approche basée sur le treillis de poutre qui devient plus intéressante. Les paramètres utilisés (maillage, . . .) sont introduits de manière à obtenir une précision semblable pour les deux modèles, mais l'équivalence est impossible à obtenir et n'est jamais garantie. Ces résultats sont obtenus sur base d'un essai en mode I dans les mêmes conditions que ceux réalisés en 2.3.3.

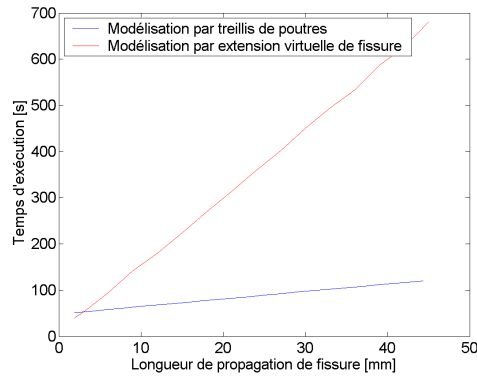


FIGURE 4.2 – Comparaison des temps d'exécution en faisant varier la longueur de propagation de fissure

Quelques améliorations effectuées sur l'implémentation du modèle énergétique pourraient permettre à celui-ci de gagner un temps de calcul important. Comme nous l'avons dit, chaque direction de propagation à tester nécessite un assemblage de la matrice de raideur. Le nombre de ces directions peut être réduit de deux manières :

- **Appliquer un critère de contraintes-cisaillement.** Pour cela, il faut tout d'abord estimer le champ de contraintes en tête de fissure. Ce champ donnant théoriquement une valeur infinie de contrainte au point considéré, il ne sera pas d'une grande précision. Toutefois, nous pouvons utiliser la direction du plan de contraintes principal de traction afin de se faire une idée de la direction de propagation à suivre. Ensuite, il suffit d'effectuer des propagations virtuelles autour de ce plan et suivre la direction pour laquelle le taux de restitution d'énergie augmente. Une fois que ce taux se met à diminuer lorsque nous nous éloignons davantage du premier essai de propagation virtuelle, nous sommes arrivés à un maximum.
- **Utiliser une approximation de la courbe $G(\theta)$** donnant l'énergie de Griffith en fonction de la direction de propagation. Si nous maximisons cette approximation, nous pourrions en utilisant moins de points obtenir une précision semblable qu'en adoptant l'approche consistant à choisir le point donnant le $G(\theta)$ maximum.

4.8 Récapitulatif

Le tableau suivant reprend un récapitulatif des conclusions dégagées dans ce chapitre :

	Approche énergétique	Modélisation par treillis de poutres
Nombre de fissures	Une (dans le cadre de ce travail)	Infini (microfissuration)
Amorçage de fissure	Manuel	Déterminé par le programme
Limitation de précision	Nombre de directions à tester limité Longueur d'un incrément de fissure fixé	Propagation uniquement dans la direction traversant les poutres Incrément de fissure provoquant le passage de la tête de fissure d'un triangle au suivant
Géométrie	À modifier dynamiquement	Fixe
Loi de contact	Nécessaire	Non nécessaire
Dépendance au maillage	Non, pour un maillage assez fin	Oui
Matériau modélisable	Tendance homogène	Tendance hétérogène
Précision en déplacements	Bonne, convergente	Moyenne, non convergente
Multimatériaux	Réalisable, mais caractéristiques de résistance identiques (dans le cadre de ce travail)	Réalisable avec caractéristiques de résistance différentes
Temps d'exécution	Augmente fortement avec la longueur de propagation	Augmente légèrement avec la longueur de propagation

De ce tableau, il apparaît que la méthode de modélisation par treillis de poutres offre plus d'avantages que la méthode énergétique pour la modélisation d'un mur de maçonnerie. Il apparaît également que l'implémentation de l'approche énergétique nécessite certaines adaptations afin de s'appliquer à un mur en maçonnerie. L'ajout d'un critère de rupture, ainsi que les problèmes de régénération de géométrie qui se poseraient pour de telles adaptations nous font préférer l'approche par treillis de poutre. Le grand problème de cette dernière méthode reste toutefois la dépendance à l'organisation du maillage.

Moyennant d'autres adaptations, une approche mixte pourrait être implémentée. Le mortier des joints, granuleux et siège de microfissuration se prêterait assez bien au modèle de treillis de poutres alors que la brique, qui se rompt généralement assez franchement et sur un seul front de fissure, pourrait être régie par l'approche énergétique. Ceci poserait certains problèmes, notamment par le fait que la matrice de raideur pour le modèle du treillis de poutres possède un plus grand nombre d'éléments par point (vu que les rotations en chaque point sont prises en compte) que celle réalisée pour le modèle énergétique.

Dans la suite, nous allons considérer le modèle de treillis de poutres et confronter celui-ci aux résultats obtenus en laboratoire pour un mur en maçonnerie.

Chapitre 5

Application au mur en maçonnerie

C'est dans ce cinquième chapitre que nous traitons du problème principal de cet ouvrage qu'est la propagation de fissures dans un mur en maçonnerie. Cependant, afin de valider nos résultats numériques, il est important d'avoir une idée du comportement réel du mur. C'est dans ce but qu'un essai en laboratoire a été réalisé, consistant en la mise en flexion d'un mur en brique.

Des essais expérimentaux ont également été effectués afin de déterminer les paramètres caractérisant les matériaux constituant le mur.

5.1 Résistance des matériaux

Pour la modélisation du mur en briques, nous allons utiliser le modèle de treillis de poutres. Celui-ci nécessite la connaissance de quatre paramètres que sont : les résistances à la traction et au cisaillement des micropoutres, le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Des essais sur les différents matériaux ont été réalisés en laboratoire afin de déterminer ces caractéristiques. Toutefois, les caractéristiques des micropoutres devront être déduites des caractéristiques macroscopiques résultant des essais.

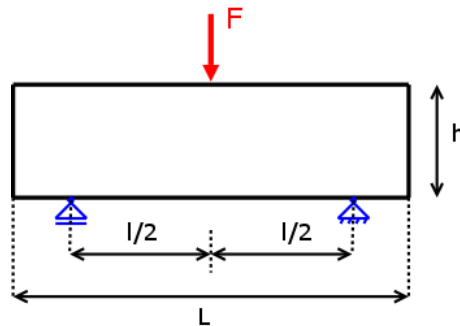


FIGURE 5.1 – Essai de flexion trois points

5.1.1 Mortier de jointoiment

Deux types d'essais ont été réalisés sur le mortier de jointoiment : l'essai de flexion trois points (figure 5.1) et l'essai de compression simple. Ces deux essais ont été réalisés après 16 jours de séchage du mortier. Les échantillons de ciment ont les dimensions suivantes : longueur $L = 15 \text{ cm}$, largeur $b = 4 \text{ cm}$ et hauteur $h = 4 \text{ cm}$. Chaque échantillon subit tout d'abord un essai de flexion trois points (la longueur l entre les deux appuis est de 10 cm) qui le divise en deux moitiés ; ensuite, chaque demi-barrette de mortier est soumise à un essai de compression simple. L'essai de flexion permet de déduire la résistance à la traction par flexion f_{ct} à l'aide de la théorie de l'élasticité linéaire :

$$f_{ct} = \frac{3Fl}{2bh^2} \quad (5.1)$$

L'essai de compression nous indique les résistances à la compression caractéristique et moyenne, notées respectivement f_{ck} et f_{cm} . Si nous supposons que notre mortier a le même comportement qu'un béton, il est possible de déduire de ces deux essais toutes les grandeurs nécessaires à notre modèle. Pour ce faire, nous utilisons les formules empiriques propres au matériau béton [Cap03]. Dans notre cas, le détail des valeurs expérimentales est repris au tableau suivant pour le mortier :

n°	$f_{ct} [N/mm^2]$	$f_c [N/mm^2]$
1	4,6	32,0 - 31,4
2	4,8	35,8 - 33,2
3	5,2	32,6 - 33,7
4	4,5	31,9 - 33,1
moy.	4,8	33,0

f_{ctm} vaut donc $4,8 N/mm^2$. Avec f_{cm} , nous pouvons déduire le module d'élasticité sécant moyen E_{cm} :

$$E_{cm} = 9,5 f_{cm}^{1/3}$$

où f_{cm} est exprimé en N/mm^2 et E_{cm} en kN/mm^2 . Le module E_{cm} vaut alors $30472 N/mm^2$. La résistance moyenne au cisaillement τ_{rm} , est donnée par :

$$\tau_{rm} = 0,068 \sqrt{f_{cm}}$$

Cette relation donne $\tau_{rm} = 0,39 N/mm^2$. Le coefficient de Poisson varie selon la résistance du béton, de 0,15 à 0,25. Vu sa faible influence, nous lui attribuerons, pour notre problème la valeur moyenne de 0,2.

5.1.2 Brique

Les briques utilisées sont pleines, leurs dimensions sont les suivantes : longueur $L = 17,8 \text{ cm}$, largeur $b = 8,3 \text{ cm}$ et hauteur $h = 6,3 \text{ cm}$. Leur fiche technique indique uniquement la résistance caractéristique à la compression qui est de $35 N/mm^2$. Pour déterminer la résistance à la traction, nous avons à nouveau à réaliser un essai de flexion trois points (figure 5.2) . Cette fois-ci, la longueur entre les deux appuis est de 13 cm . Cinq essais de flexion ont été réalisés, les résultats obtenus par l'équation 5.1 sont repris au tableau suivant :

n°	$f_t [N/mm^2]$
1	5,62
2	10,30
3	9,65
4	7,94
5	8,10
moy.	8,32

Il faut remarquer que ces valeurs sont assez différentes pour les cinq essais. Les briques peuvent donc avoir des caractéristiques variant sensiblement.

Pour obtenir une estimation de la résistance au cisaillement de la brique, nous prendrons le même rapport de résistance au cisaillement par rapport à la résistance à la traction que celui que nous avons calculé pour le mortier. Bien que cette hypothèse



FIGURE 5.2 – Essai de flexion 3 points sur une brique

puisse paraître grossière, cela importe peu car le cisaillement ne joue pas ici un rôle prépondérant, ceci d'autant plus dans la brique qui présente une résistance largement supérieure au mortier.

La valeur du module d'élasticité adoptée est une moyenne pour les briques provenant de [Wik] et vaut 14000 N/mm^2 .

5.1.3 Récapitulatif

En résumé, les valeurs de résistance que nous retiendrons pour notre modèle sont les suivantes :

Caractéristique	Notation	Mortier	Brique	Unité
R. traction	f_t	4,8	8,32	N/mm^2
R. cisaillement	f_{sh}	0,39	0,68	N/mm^2
Module de Young	E	30472	14000	N/mm^2
Coeff. de Poisson	ν	0,2	0,2	-

Il existe des coefficients correcteurs pour passer de la résistance à la traction obtenue par flexion à la résistance à la traction pure. Étant donné que nous ne connaissons pas ce coefficient pour la brique, nous ne l'appliquerons ni pour la brique, ni pour le mortier, et utiliserons la résistance à la traction par flexion. De cette manière, le rapport des résistances entre les matériaux brique et mortier sera le moins affecté.

Les valeurs des résistances sont celles données pour le matériau lui-même. Or, nous avons besoin pour notre modélisation des résistances à la traction et au cisaillement des micropoutres, et non du matériau. Il se peut donc qu'il y ait quelques adaptations à effectuer pour obtenir ces valeurs. Par exemple, dans [Cha02b], la résistance au cisaillement des micropoutres utilisée pour le béton est environ la moitié de la résistance à la traction alors que pour les caractéristiques macroscopiques de notre matériau nous avons environ un rapport de 12 entre ces deux résistances. Ces valeurs de résistance nous serviront donc davantage à évaluer la différence des caractéristiques entre joints et briques. Étant donné que nous cherchons la direction de propagation, sans calculer si celle-ci se fera ou non, les valeurs absolues des résistances ne sont pas très importantes mais plutôt le rapport entre elles. Nous considérerons donc pour les micropoutres les résistances à la traction macroscopiques obtenues pour les matériaux brique et joint données dans le tableau précédent. Pour ce qui est de la résistance au cisaillement des micropoutres, nous adopterons la moitié de la résistance à la traction, comme réalisé dans [Cha02b].

5.2 Essai sur le mur en briques

5.2.1 Essai quatre points

Nous avons vu que la théorie décrit assez fidèlement la direction des fissures dans les matériaux homogènes et ce pour des cas de charges relativement simples. Lorsque le chargement ou la géométrie devient plus complexe, il est encore possible dans certains cas de déterminer la solution générale. Cependant, pour des matériaux hétérogènes et complexes comme notre mur en brique, prévoir l'orientation des fissures en fonction du chargement afin de confronter les résultats avec la simulation est beaucoup plus difficile. La réalisation d'un essai de flexion quatre points sur un mur en maçonnerie donne un chemin de fissuration réel à comparer avec l'approche numérique. L'essai a été réalisé après 16 jours de séchage du mortier. Comme nous le voyons sur la photo (figure 5.3), la



FIGURE 5.3 – Photo du mur en brique

mise en charge du mur est réalisée au moyen d'un vérin hydraulique et d'une poutrelle permettant de répartir la charge du vérin en deux points. Les dimensions principales de l'essai sont reprises à la figure 5.4 .

5.2.2 Simulation préalable

Avant de nous intéresser aux résultats de laboratoire, observons les résultats d'une simulation effectuée avec la géométrie et les paramètres détaillés ci-dessus. Ces résultats, ainsi qu'un schéma de la fissuration, se trouvent à la figure 5.5. La fissuration s'engage dans un joint, là où la résistance est plus faible ; et à la fibre inférieure du mur entre les deux points d'application des forces comme prévu en théorie. Elle commence par un trajet rectiligne à travers les briques, s'incline vers l'horizontale dans une brique pour ensuite rejoindre et suivre un joint horizontal. Elle reprend ensuite une direction verticale pour rejoindre un joint vertical situé dans la rangée de briques supérieure et ainsi mettre le mur en rupture.

Nous observons donc que, bien que la résistance du joint soit moindre que celle de la brique, la fissuration provenant d'un joint débouchant sur une brique a tout de même tendance à traverser la brique. Cela lui coûte en effet moins d'énergie de traverser la brique que de contourner celle-ci par le joint, ce qui représente un plus long chemin de fissuration. La fissuration s'effectue néanmoins préférentiellement par le joint comme

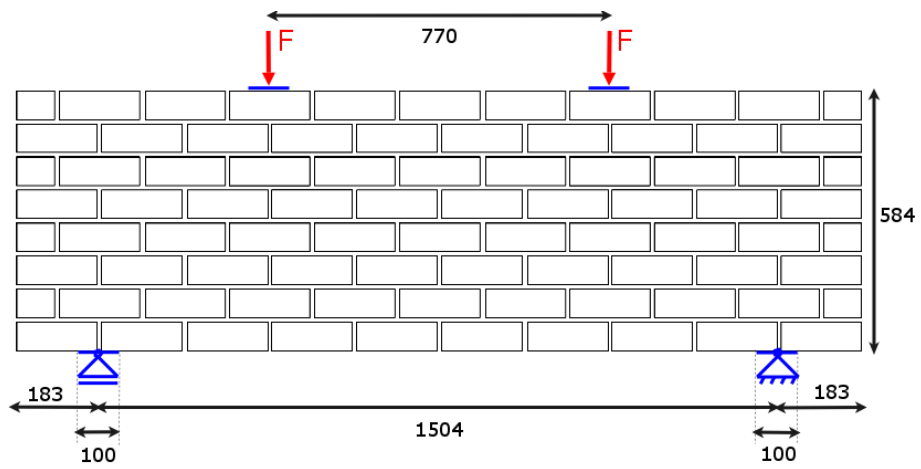


FIGURE 5.4 – Essai de flexion quatre points sur le mur en brique

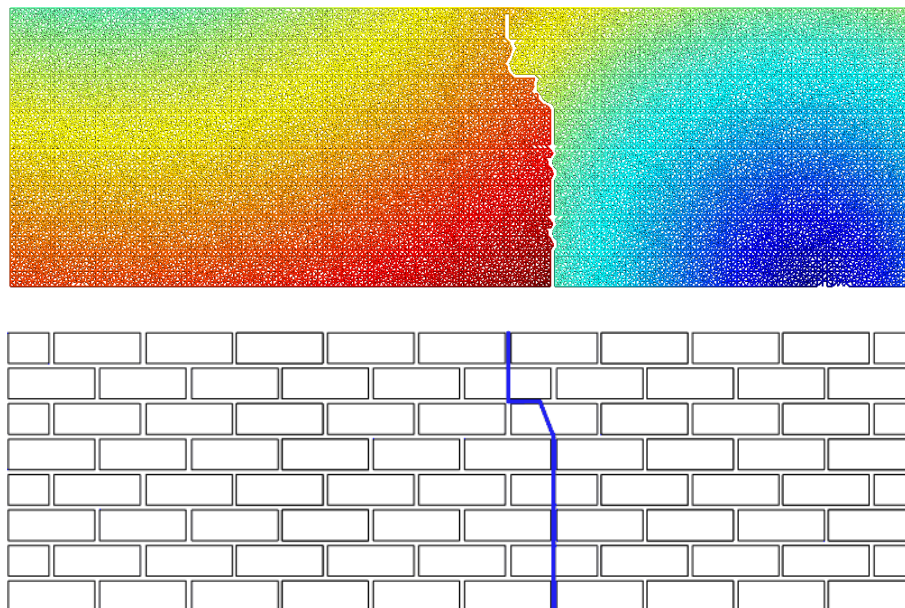


FIGURE 5.5 – Fissuration obtenue par simulation

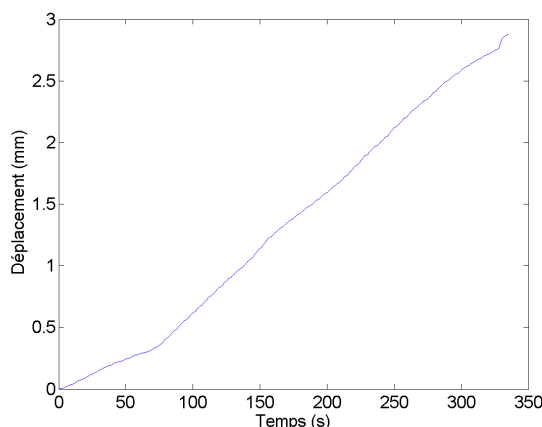


FIGURE 5.6 – Déplacement du vérin en fonction du temps

démonstré par la déviation présente dans la partie haute du mur.

Les trajectoires dans la brique sont soumises à de petites déviations dues au maillage, et pouvant être considérées comme une modélisation de l'hétérogénéité. Les briques, en effet, ne se rompent pas par une surface totalement plane.

Nous pouvons observer un léger décollement des briques au niveau de l'appui droit, du au fait que les conditions de simulation ne sont pas exactement les mêmes que sur le terrain. En effet, dans la simulation, l'appui de 10 *cm* de largeur est totalement fixé dans les directions *x* et *y*, alors que dans la réalité une rotation de cet appui est permise suite à la flèche développée par la flexion du mur.

5.2.3 Observations en laboratoire

Forces et déplacements

La mise en charge a été réalisée par déplacements imposés, le graphe de la figure 5.6, indique les déplacements du vérin en fonction du temps. Nous pouvons observer que la vitesse de chargement n'est pas constante. Elle est de 0,005 *mm/s* entre 0 et 72 *s* et de 0,01 *mm/s* à partir de 72 *s*. Le graphe de la figure 5.7 indique la force développée par le vérin afin d'obtenir le déplacement imposé en son extrémité. Sur base de ce graphe, nous pouvons faire les constatations suivantes : nous pouvons tout

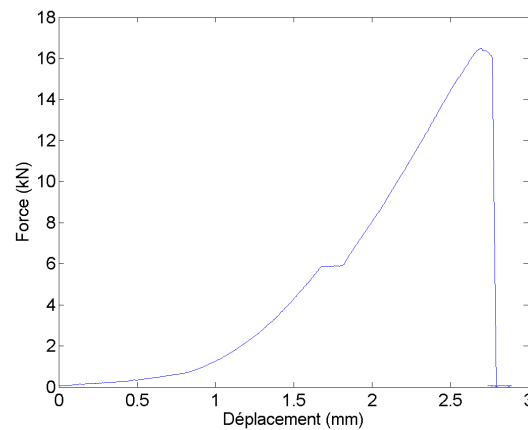


FIGURE 5.7 – Force en fonction du déplacement du vérin

d'abord observer une phase non-linéaire suivie d'un léger palier, dus à l'écrasement du caoutchouc entre la poutrelle de répartition des charges et le mur. Après ce palier, le déplacement du vérin correspond au déplacement vertical des points d'application des forces sur le mur. Le palier franchi, le graphe indique bien une relation linéaire entre les forces et les déplacements du mur. Enfin, une petite zone plastique est observée. Cela confirme notre hypothèse de matériau élastique, car le palier plastique est très réduit. Nous avons donc bien un comportement du matériau à tendance fragile. De plus, l'apparition de ce palier est due à la plasticité se développant en tête de fissure, mais également (et surtout) à la perte de raideur due à la microfissuration ou fissuration développée. Il s'agit donc plus d'une plasticité globale (de l'assemblage fissuré) décrite par la mécanique linéaire de la rupture que d'une plasticité du matériau lui-même en tête de fissure.

Fissuration du mur

La figure 5.8 montre l'état du mur après la rupture obtenue en laboratoire. Certains désordres ont toutefois été causés suite au choc du mur contre le sol après sa rupture. La fissuration vraisemblablement présente avant le choc contre le sol (l'essai a malheureusement été réalisé sans caméra) est représentée en figure 5.9. La fissuration a bien commencé entre les deux points d'appui, plus précisément à 37 cm à droite du centre du mur. Elle s'est propagée sur une hauteur de cinq briques avec un angle d'environ 45° ,



FIGURE 5.8 – Photo du mur en briques après l’essai de flexion quatre points

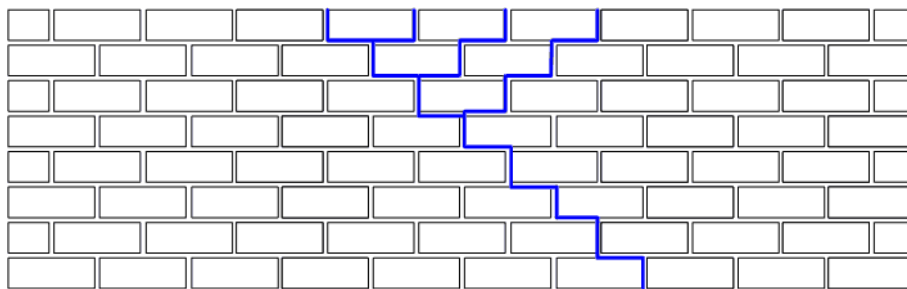


FIGURE 5.9 – Schéma de la fissuration

puis elle s'est séparée de part et d'autre de la cinquième brique en continuant à monter jusqu'au haut du mur. Sur la photo (figure 5.8), nous pouvons également observer une fissure partant du centre du mur, mais s'agissant vraisemblablement d'une fissure due au choc du mur sur le sol lors de la rupture totale de celui-ci. Les fissures ont été amorcées par les efforts de traction à la fibre inférieure du mur, et non par cisaillement entre les appuis et points d'application des forces. Contrairement à notre première prédiction, la fissuration ne passe pas par les briques, mais suit plutôt le joint. La cause est que la fissuration ne se fait ni dans le joint ni dans la brique, mais dans l'interface entre ces deux milieux. C'est donc là l'élément faible, qui n'est pas modélisé dans la simulation. Il s'agit donc de prendre cet élément en compte dans la modélisation. Pour cela, nous pouvons remplacer les caractéristiques de résistance du mortier des joints par les caractéristiques de l'interface joint-brique. Pour le critère de rupture, ce modèle considérera donc plus un ensemble de briques séparées par une interface d'une certaine résistance que par un matériau en lui-même. Pour ce qui est des déplacements, la raideur du joint de mortier sera toutefois conservée. De nouveaux essais doivent donc être réalisés.

5.2.4 Interface mortier-brique

Afin d'avoir une idée de la résistance de la jonction mortier-brique, nous avons réalisé un essai de traction pure sur deux demi-briques collées par un joint. Chaque extrémité de l'assemblage a été collée à une plaque métallique, afin de permettre la mise en tension. Un schéma descriptif de l'essai est repris à la figure 5.10. L'échantillon est suspendu par un câble, et des poids y sont ajoutés à sa base jusqu'à atteindre la rupture de celui-ci. Deux essais ont été réalisés, et l'assemblage s'est rompu pour les efforts suivants :

n°	Effort sur l'assemblage [N]
1	483
2	183
moy.	333

Sur base des deux essais, et en considérant une surface de l'interface de $83 \cdot 63 \text{ mm} = 5229 \text{ mm}^2$, nous obtenons une résistance moyenne à la traction de l'interface joint-brique de $0,063 \text{ N/mm}^2$. Nous pouvons observer l'extrême disparité des résultats qui pour des raisons techniques ne sont qu'au nombre de deux. Les joints verticaux entre

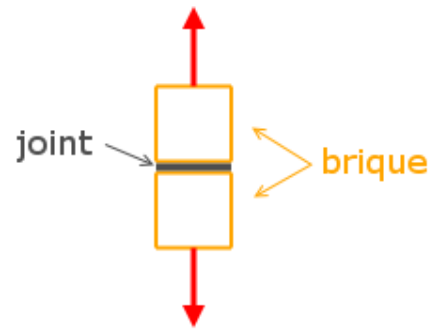


FIGURE 5.10 – Essai de traction pure sur l'assemblage mortier - briques

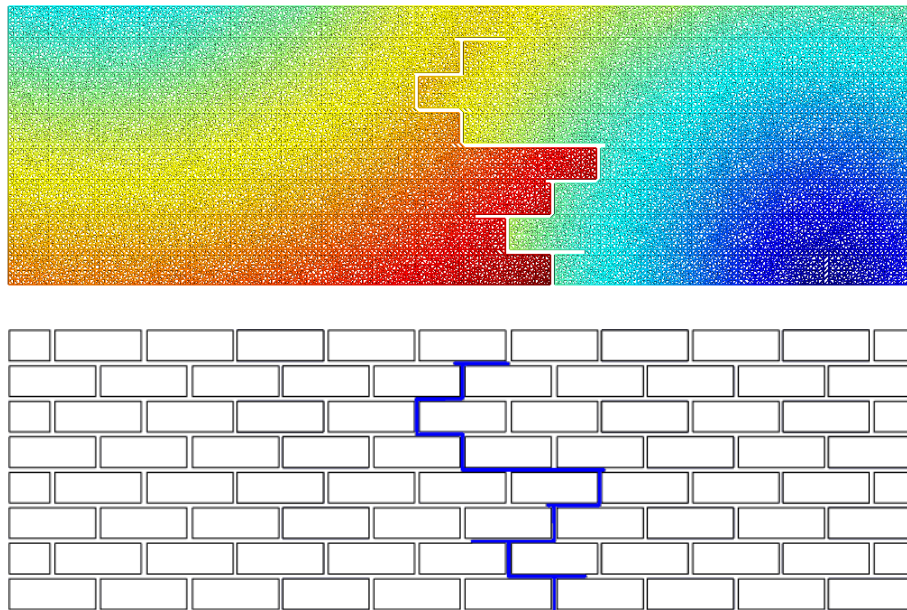


FIGURE 5.11 – Fissuration obtenue par simulation

briques peuvent être de caractéristiques très différentes car leur réalisation en pratique n'est pas reproductible facilement. Il faut donc prendre ces résultats avec prudence surtout avec si peu d'échantillons. Cet écart montre également la complexité de modéliser un tel mur de maçonnerie, étant données ces différences difficiles à simuler à moins de créer une modélisation statistique.

Ne connaissant pas de valeur pour la résistance au cisaillement, nous prendrons une fois de plus en nous référant à [Cha02b] la moitié de la résistance à la traction, bien que ceci n'ait pas un grand fondement. La valeur de la résistance au cisaillement n'est cependant pas aussi influente que la résistance à la traction, et son importance est donc réduite.

5.2.5 Simulation postérieure

Propagation de la fissuration

La nouvelle modélisation prenant en compte la rupture dans l'interface joint-brique, nous donne les résultats repris en figure 5.11 . Cette simulation crée un chemin de

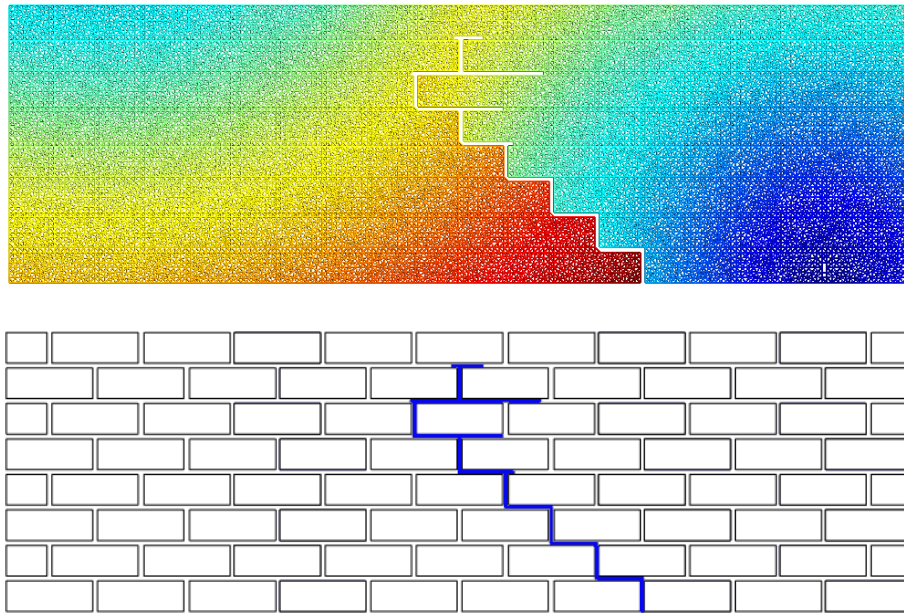


FIGURE 5.12 – Fissuration obtenue par simulation avec fissure amorcée manuellement

fissuration assez différent de celui observé en laboratoire. Toutefois la fissuration ne traverse plus la brique. Cette différence de chemin ne remet pas en cause la simulation. En effet, la fissure peut théoriquement s'amorcer sur toute la fibre inférieure du mur, entre les points d'application des forces. Le choix de la zone d'amorçage de la fissuration sera dû à des hétérogénéités et imperfections. Cet endroit où s'initie la fissure influencera toute la suite du chemin de fissuration. Pour nous rapprocher de l'expérience réalisée, nous allons donc fixer le lieu d'amorçage de la fissure (en amorçant la fissure sur les trois quarts de la hauteur d'un joint) et simuler la suite. Ce résultat est visible en figure 5.12. Nous pouvons observer que le résultat est assez proche de celui de la figure 5.9. La fissure part bien dans la même direction pour ces deux cas, et la première séparation de la fissuration s'effectue au même endroit. Ensuite, la fissuration semble de la même manière se déployer latéralement tout en avançant vers le haut. Nous avons d'ailleurs remarqué au laboratoire que l'adhérence entre briques et joints dans la partie centrale supérieure du mur était devenue extrêmement faible (quasi nulle) suite aux contraintes subies. La fissuration peut donc se développer dans toute cette zone avant la rupture, et les chemins de fissuration dans cette zone peuvent être très divers ; ceci d'autant plus que les caractéristiques d'adhérence des interfaces joint-brique sont très disparates.

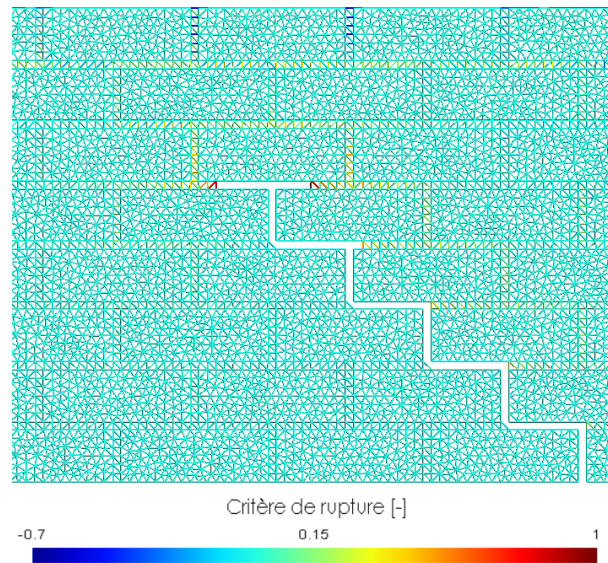


FIGURE 5.13 – Contraintes dans le mur lors de la propagation

Contraintes dans le mur

Nous pouvons visualiser à la figure 5.13 le critère de rupture pour chaque micropoutre (c'est-à-dire les contraintes divisées par les contraintes admissibles) à un moment donné de la propagation de la fissuration.

La première observation est le fait que le critère est plus élevé dans les joints que dans la brique, cette dernière étant beaucoup plus résistante se rapproche très peu du critère de rupture. Nous pouvons également observer que, dans la fibre supérieure, les micropoutres sont soumises à la compression.

Autour des deux têtes de fissure, le critère de rupture est très élevé, et va en diminuant lorsque nous nous éloignons de ces têtes de fissure le long des joints. Ces contraintes restent élevées dans les joints lorsque nous nous éloignons vers la partie supérieure du mur alors que la partie inférieure de celui-ci est libérée de contraintes.

5.2.6 Influence du maillage

Le maillage réalisé pour ce problème est assez raffiné, mais sa longueur caractéristique est néanmoins assez importante par rapport à la largeur d'un joint. La hauteur

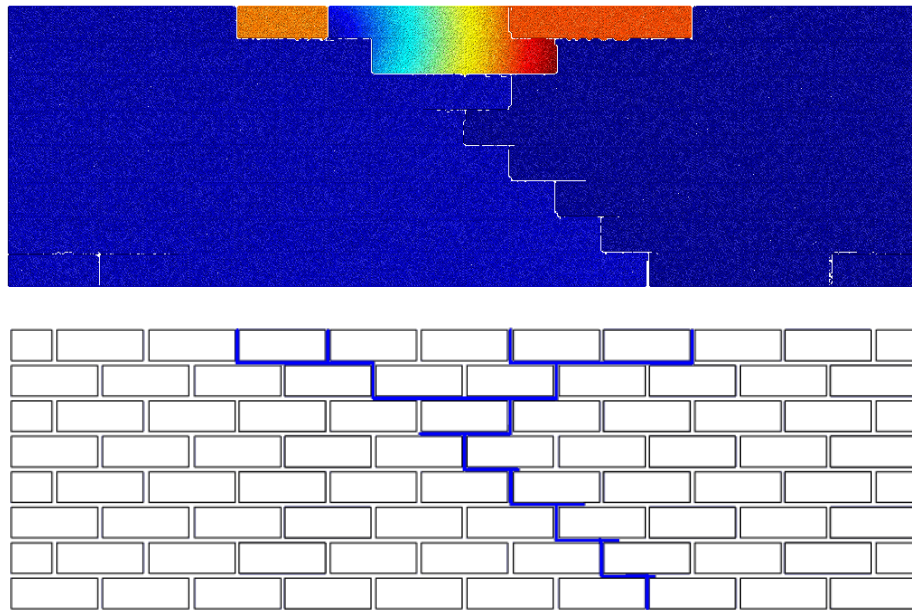


FIGURE 5.14 – Fissuration obtenue avec maillage affiné

des triangles équivaut en effet à la largeur d'un joint, ce qui fait que les joints ne sont maillés que par une seule couche de triangles. Cette couche unique peut avoir une influence sur le comportement de la simulation. Nous avons en effet vu qu'une organisation particulière du maillage pouvait avoir une influence sensible sur le comportement du système.

Nous pouvons observer (figure 5.14) la fissuration obtenue en diminuant la longueur caractéristique du maillage par deux. La fissuration n'est pas tout à fait la même que pour le maillage moins raffiné, mais elle reste toujours proche de la fissuration obtenue en laboratoire. Le chemin de fissuration dans la partie haute du mur dépend de variations infimes des paramètres et est difficile à modéliser. Toutefois, nous avons toujours une tendance à l'écartement de la fissuration vers l'extérieur lorsque nous nous approchons de la fibre supérieure du mur.

Il y a toujours un décollement des briques situées aux appuis, mais qui est encore dû à la modélisation de ces appuis fixés en rotation, qui diffère des conditions réelles.

Nous pouvons voir en figure 5.15 que la fissuration dans les joints peut être modélisée plus précisément, car elle peut maintenant se propager sur la largeur du joint. Toutefois,

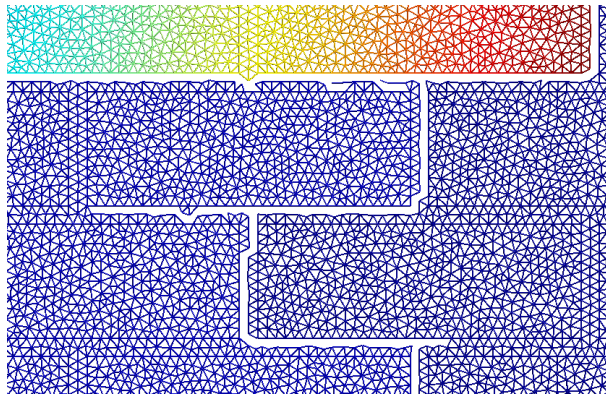


FIGURE 5.15 – Zoom sur la fissuration obtenue avec maillage affiné

si nous considérons le joint comme une simple interface (ce que nous faisons en lui donnant les caractéristiques de résistance à la rupture de l'interface), cette propagation à travers la largeur du joint a peu de sens. Elle peut toutefois nous indiquer de quel côté du joint le décollement va se faire, mais ces résultats sont à prendre avec beaucoup de précautions.

5.2.7 Estimation des paramètres par simulation

Afin de lier les paramètres macroscopiques aux paramètres des micropoutres, il peut être utile de réaliser une simulation des essais effectués sur les matériaux. Comme nous allons le voir, nous pourrions ainsi obtenir directement les paramètres microscopiques.

Considérons les essais de flexion trois points sur les briques et le mortier. Si nous fixons les conditions de chargement ayant provoqué la rupture, les paramètres de simulation devront être ajustés afin que la rupture se produise exactement pour ce chargement. Étant donné que la rupture se fera dans le matériau en traction, nous allons donc faire varier la résistance à la traction. Ne disposant pas d'essais de cisaillement, nous utiliserons toujours comme résistance au cisaillement des micropoutres la moitié de leur résistance en traction.

Pour ce qui est de l'essai trois points sur les barrettes de mortier, la charge de rupture moyenne est de 2036 N . Pour la géométrie considérée, la résistance à la traction limite des micropoutres provoquant la rupture en simulation est de $5,88\text{ N/mm}^2$. Nous pouvons observer (figure 5.16) que la rupture suit bien le schéma classique d'un essai

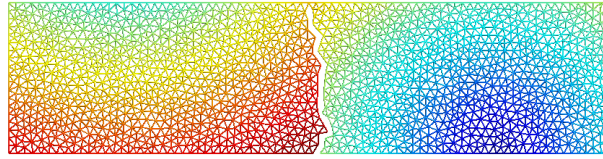


FIGURE 5.16 – Rupture du mortier en essai trois points

trois points.

Pour l'essai sur la brique, avec une charge à la rupture moyenne de 7030 N , la résistance à la traction limite donnée par la simulation est de 6,00 N/mm^2 .

Nous voyons que le rapport entre les résistances à la traction sur brique et mortier n'est pas le même selon que nous considérons les paramètres macroscopiques ou microscopiques. Au niveau macroscopique, ce rapport est de :

$$\frac{f_t \text{ brique}}{f_t \text{ mortier}} = 1,73 \quad (5.2)$$

Si nous considérons en approche microscopique les résistances des micropoutres, nous avons :

$$\frac{f_t \text{ brique}}{f_t \text{ mortier}} = 1,02 \quad (5.3)$$

Cette différence peut s'expliquer par le fait que, si nous considérons l'approche macroscopique, un facteur doit être utilisé pour passer de la résistance à la traction par flexion vers la résistance à la traction pure. Ce facteur dépend de la géométrie et du matériau. Ne connaissant pas ce facteur pour l'essai trois points sur les briques, nous n'en avons utilisé aucun, et les paramètres calculés macroscopiquement devraient être corrigés.

Remarquons toutefois que ces paramètres ont peu influencé les résultats obtenus précédemment. La partie la plus faible étant l'interface joint-brique (bien moins résistante que la brique), seule celle-ci a subi la rupture de micropoutres. La résistance des briques étant nettement supérieure, une imprécision sur celle-ci n'aura pas d'influence.

5.3 Essai antérieur

En 1999, le laboratoire de génie civil a effectué des essais similaires sur des murs en briques, à la demande la société **Cassart Special Products S.A.** dans le cadre de

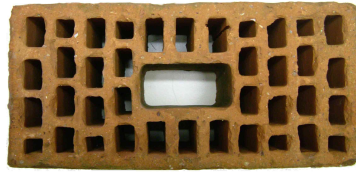


FIGURE 5.17 – Briques perforées

la certification de leurs armatures **Brickforce** pour murs en maçonnerie. Il s'agissait d'effectuer différents essais sur des murs armés et non armés. Nous nous intéressons ici à un essai de flexion quatre points sur un mur non armé, pour lequel nous allons tenter de rapprocher les résultats avec ceux obtenus par simulation.

5.3.1 Matériaux

Les briques utilisées sont des briques perforées de $290 \cdot 140 \cdot 140 \text{ mm}$ ayant un pourcentage de vides de 39%. Ces vides ne sont pas répartis uniformément, et une large cavité est présente au centre de la brique (figure 5.17). La présence de ces perforations pose évidemment des problèmes de modélisation, car il est évident que la fissuration va préférer passer par les cavités que traverser les sections pleines.

Ne connaissant pas le module d'élasticité de la brique, nous ferons l'approximation de multiplier le coefficient d'élasticité typique de la brique $E = 14000 \text{ N/mm}^2$ par le pourcentage de remplissage de la brique :

$$E_{\text{brique perforée}} = 14000 \frac{100 - 39}{100} = 8540 \text{ N/mm}^2 \quad (5.4)$$

Cette approximation est assez grossière, car il est évident que la matière retirée suite à la perforation a été enlevée dans les zones telles que la raideur soit le moins possible diminuée. De plus, il serait plus juste d'avoir un coefficient E pour chaque section de la brique et non un coefficient global. Nous allons tout de même vérifier par la simulation si notre homogénéisation peut être valable.

Nous déduirons la résistance à la traction de la brique à partir de sa résistance à la compression. Pour ce faire, nous garderons le même rapport entre la résistance à la traction et la résistance à la compression que celui que nous avons dans l'essai précédent. Nous obtenons ainsi une résistance à la traction de $4,75 \text{ N/mm}^2$. Cette

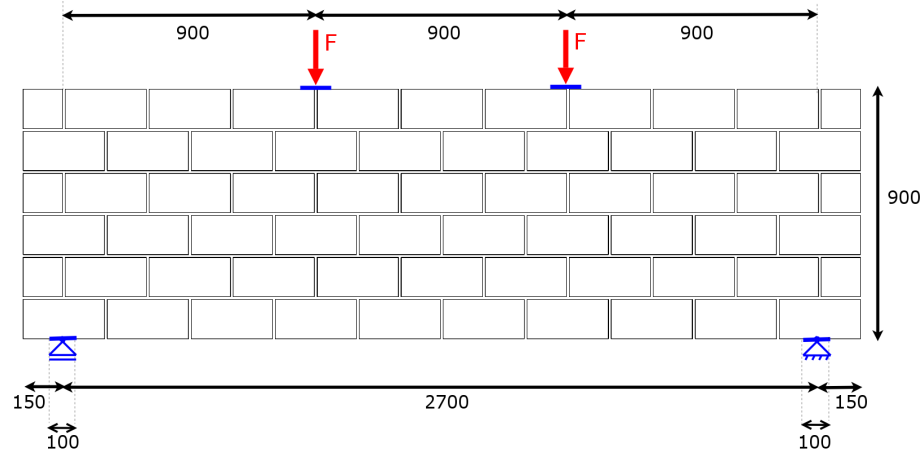


FIGURE 5.18 – Briques perforées

hypothèse est également assez grossière, mais sans renseignements supplémentaires il nous était impossible de les déduire. Il faudra donc sans doute modifier ces paramètres afin d'obtenir le résultat voulu.

La résistance du mortier à la traction par flexion a été calculée sur base de trois essais trois points et vaut $2,62 \text{ N/mm}^2$. Nous allons une fois de plus utiliser des résistances au cisaillement moitiés des résistances à la traction.

5.3.2 Essai sur mur

L'essai réalisé est assez semblable à celui présenté précédemment avec le mur en briques pleines. La géométrie du mur, ainsi que les conditions de chargement sont reprises en figure 5.18. Nous pouvons observer le chemin de fissuration en figure 5.19. Dans ce cas, la fissuration traverse les briques beaucoup plus facilement. C'est d'ailleurs dans une brique que la fissure s'initie, montrant par là le peu de différence de résistance entre joints et briques. Cependant, les joints offrent tout de même une direction préférentielle pour la fissuration car la fissure est parfois entraînée par le joint.

La modélisation a été réalisée en initiant manuellement la fissure au même endroit que celui donné par l'observation faite en laboratoire. La simulation (figure 5.20) nous donne le chemin de fissuration en réduisant la valeur de la résistance à la traction de la brique à $4,25 \text{ N/mm}^2$. Cette réduction de résistance est normale, la rupture se fera

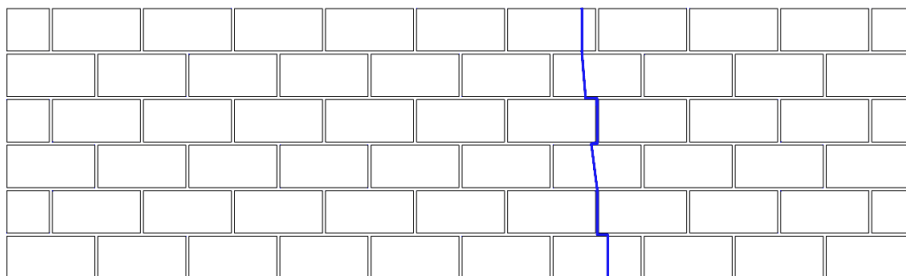


FIGURE 5.19 – Fissuration dans le mur

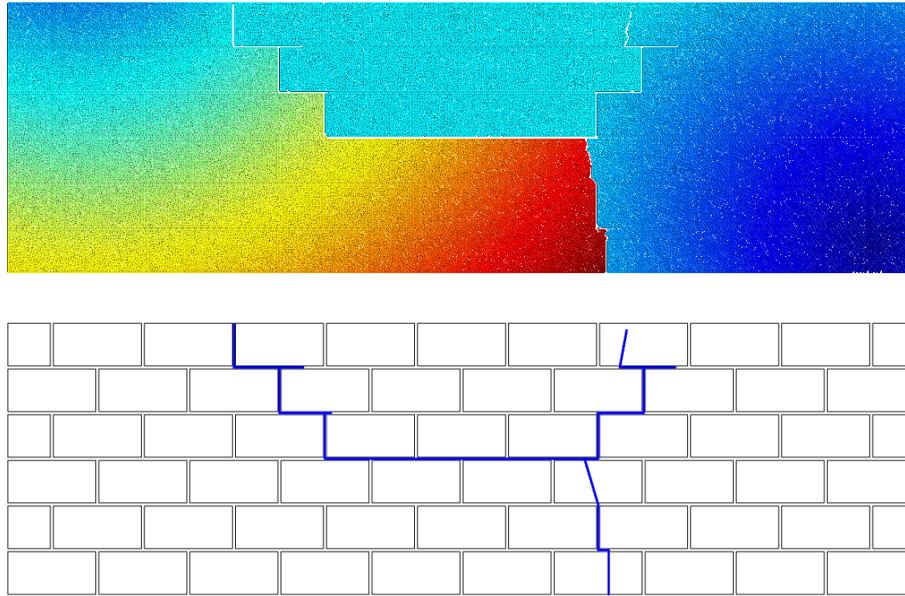


FIGURE 5.20 – Simulation de fissuration dans le mur

en effet dans les sections les plus faibles de la brique pour lesquelles la résistance est inférieure à la résistance moyenne. Nous voyons que l'allure est assez semblable pour le début de la fissuration. Toutefois, au lieu de continuer vers le haut, le chemin de fissuration trouvé par simulation se sépare horizontalement et part ensuite en diagonale. Cela s'explique en partie par le fait que les joints horizontaux sont plus résistants que les joints verticaux pour le cas réel. Ceux-ci peuvent en effet pénétrer dans les perforations de la brique et ainsi établir un meilleur contact avec celle-ci. La fissuration a alors plus de difficultés à suivre les joints horizontaux. De plus, dans la réalité, les briques par leur perforation verticale favorisent certains chemins de fissuration dans cette direction. Enfin, le peu de connaissance des paramètres et les approximations sur ceux-ci pour effectuer la simulation peuvent également expliquer cette différence. La fissuration dans un mur en maçonnerie comportant des briques creuses implique de nombreux paramètres, dont beaucoup sont peu connus ou très variables; et est assez complexe à modéliser.

Chapitre 6

Extension à des cas plus pratiques

Le modèle étant validé pour un tronçon de mur soumis à un chargement simple, il serait intéressant d'étendre les essais de validation à des cas plus pratiques et plus complexes. La validation de ces essais permettrait de généraliser le programme afin de calculer le chemin de fissuration dans des structures que nous pouvons rencontrer dans la vie réelle. Dans ce chapitre, le cas de l'effet de chaînage des murs, réalisé fréquemment en pratique sera tout d'abord exposé. Nous considérerons ensuite le cas d'une façade simple, soumise à des tassements différentiels.

6.1 Effet du chaînage des murs

Des tassements différentiels du sol peuvent apparaître sous les fondations d'un édifice, dont une des conséquences est la fissuration de la structure. Nous pouvons observer sur le premier schéma de la figure 6.1 la fissuration d'un mur porteur (et donc chargé) en maçonnerie due à un tassement du sol plus important aux extrémités.

Afin de réduire l'ouverture des fissures dans la partie supérieure du mur en y reprenant les efforts de traction, le chaînage du mur est souvent utilisé. Ce dispositif de ceinturage (représenté par la ligne bleue sur le deuxième schéma de la figure 6.1) est réalisé en métal ou en béton armé et a pour effet de répartir la fissuration dans le mur et limiter l'ouverture des défauts.

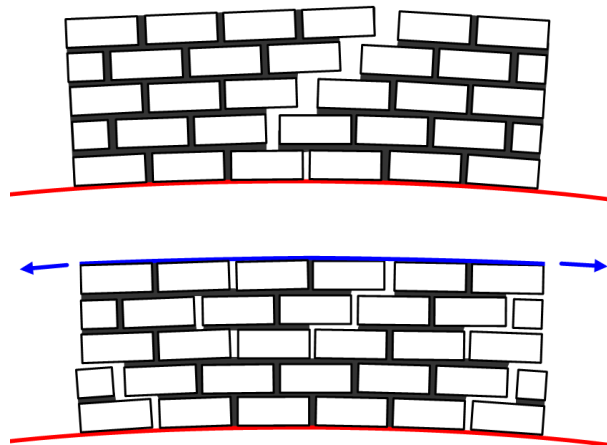


FIGURE 6.1 – Fissuration sans et avec chaînage horizontal

Nous allons tenter de modéliser cet effet de chaînage. Pour cela, reprenons la géométrie du mur utilisé pour le laboratoire. Nous imposons à ce mur des déplacements au sol, sous la forme d'une parabole centrée à la moitié de la largeur du mur. Ce mur étant porteur, il sera également soumis à une charge constante sur sa fibre supérieure.

Le chaînage est modélisé de la manière suivante : la fibre (ou frontière) supérieure du mur étant matérialisée dans le maillage par une succession de micropoutres horizontales, nous donnerons à ces micropoutres les caractéristiques de raideur et de résistance de l'acier. Cette fibre supérieure, qui se déformera très peu et résistera à la rupture malgré les importants efforts de traction, modélisera bien le chaînage horizontal.

Nous pouvons observer les résultats de simulation en figure 6.2. Le premier mur représente la situation sans chaînage alors que la situation avec chaînage est représentée par le second mur. Ces deux figures sont mises à la même échelle de déplacements, et la fissuration est arrêtée lorsque plus aucune poutre ne dépasse le critère de rupture qui est le même pour les deux essais.

Pour la situation sans chaînage, nous pouvons observer une fissure principale de traction, qui part logiquement de la partie centrale supérieure du mur et descend vers le bas. Les dimensions démesurées de la brique située au centre du mur à la rangée supérieure sont simplement dues au fait que cette brique est désolidarisée de l'ensemble et soumise à des déplacements non raisonnables, le calcul étant faussé par cette désolidarisation. L'ouverture de la fissure observée, ainsi que les déplacements engendrés

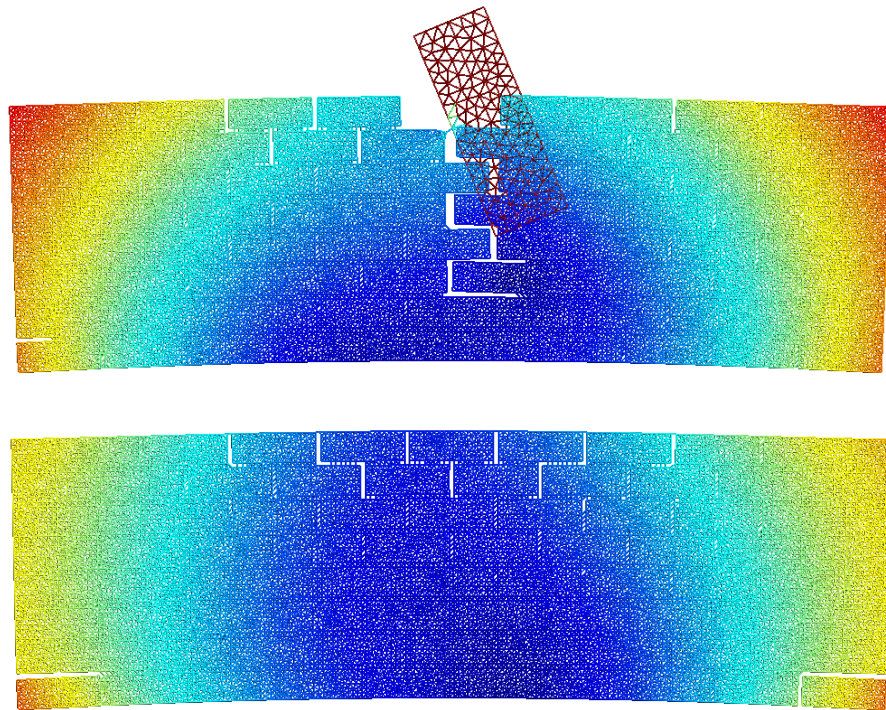


FIGURE 6.2 – Fissuration par simulation, sans et avec chaînage horizontal

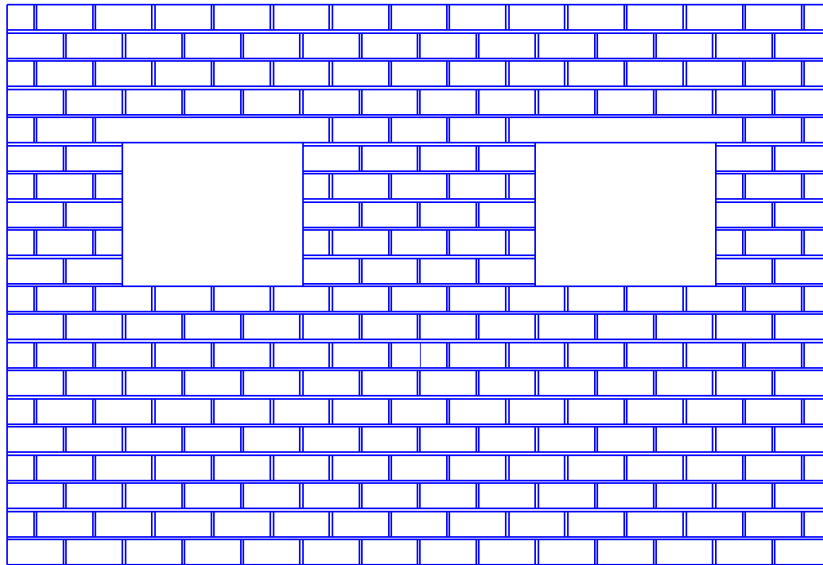


FIGURE 6.3 – Schéma de la façade simple

sont assez importants.

Lorsque nous introduisons le chaînage, les déplacements observés sont nettement moins importants (nous le voyons très bien aux angles supérieurs du mur). La fissuration est mieux répartie, et l'ouverture des fissures reste assez réduite. De plus, nous pouvons observer un décollement des briques situées aux extrémités inférieures du mur, comme cela est le cas à la figure 6.1. L'effet positif du chaînage des murs est bien modélisé par notre simulation.

6.2 Cas d'une façade simple

Étendons maintenant notre investigation au cas plus réel d'une façade en maçonnerie. Il s'agit simplement (figure 6.3) d'une façade comportant deux fenêtres surmontées par un linteau ayant les caractéristiques de la pierre bleue. Ces éléments vont amener des singularités dans le système, conduisant à une modification du comportement de celui-ci. Durant sa durée d'exploitation, le bâtiment peut être sollicité à sa base par des mouvements verticaux des fondations. Ces mouvements, tassements ou gonflements, peuvent être différentiels et ne s'appliquer qu'à une partie de la fondation. Cela entraînera

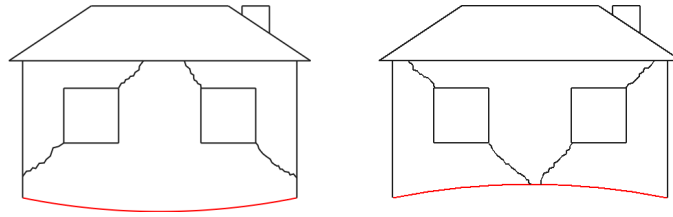


FIGURE 6.4 – Fissuration suivant les mouvements de fondations

nera certains dommages dans la façade en maçonnerie. Nous allons vérifier la simulation de ces dommages selon deux cas de tassement.

6.2.1 Tassement au centre de la façade

Plusieurs facteurs peuvent entraîner un tassement au centre d'une façade. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer l'assèchement du sol au centre de la fondation dans un sol plastique présentant un retrait. En s'asséchant, ce sol va diminuer son volume (retrait) et le centre de la fondation va donc descendre. La fissuration qui s'ensuit aura l'orientation visible sur le premier schéma de la figure 6.4. Ce cas de mouvement de sol a été simulé en figure 6.5. Étant donnée la symétrie du problème, seule la moitié de la façade a été considérée. Nous pouvons voir que la fissuration se fait bien, comme attendu, par une diagonale passant par les coins inférieur gauche et supérieur droit de la fenêtre. En figure 6.6 est représenté le critère de rupture autour de la fenêtre avant l'initiation de la fissuration. Ce critère est calculé comme le rapport entre les contraintes dans la poutre et les contraintes limites de résistance. Nous observons bien que ce rapport est maximum dans les deux coins où s'est manifestée la fissuration, alors que les poutres dans les autres coins sont en compression.

6.2.2 Gonflement au centre de la façade

D'autres cas de mouvements de sol possibles sont le gonflement au centre de la façade, ou le tassement aux extrémités de la façade. Nous pouvons voir sur le second schéma de la figure 6.4 l'orientation que prendra alors la fissuration. Si nous observons les résultats obtenus par simulation (figure 6.7), nous pouvons voir que la fissuration a bien l'orientation prévue. Le chemin de fissuration général paraît sensiblement influencé

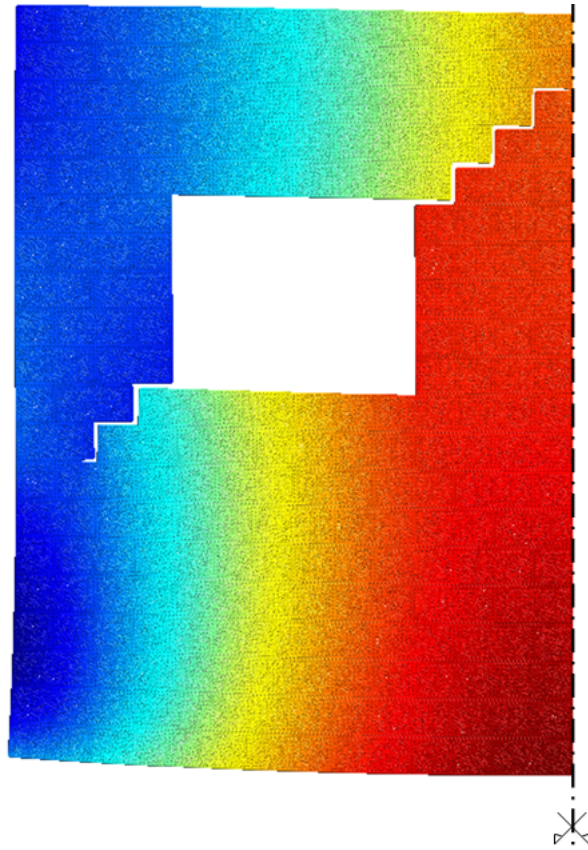


FIGURE 6.5 – Simulation de la fissuration avec tassement central

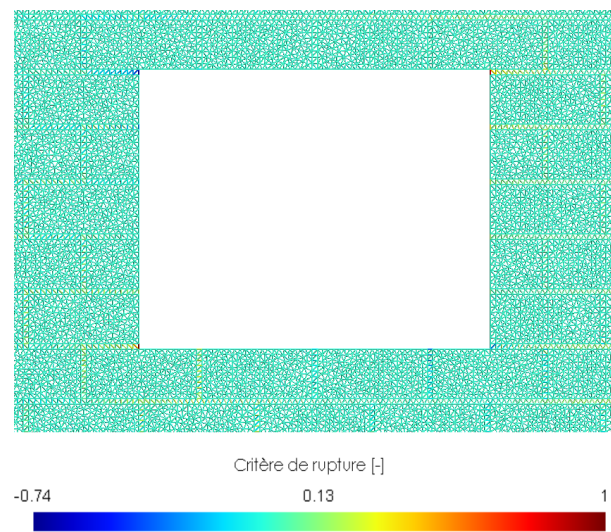


FIGURE 6.6 – Contraintes relatives avant fissuration

par la disposition des briques.

Les simulations semblent montrer que des cas de géométries et de chargements plus complexes tels que ceux qui viennent d'être exposés peuvent être assez bien modélisés par le programme réalisé dans le cadre de ce travail.

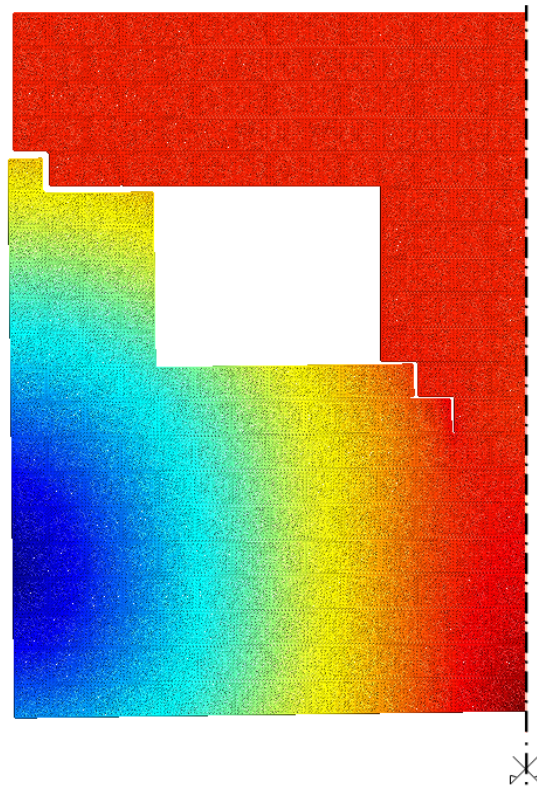


FIGURE 6.7 – Simulation de la fissuration avec gonflement central

Conclusion

L'objectif principal de ce travail était la simulation de la propagation de la fissuration dans les murs en maçonnerie. De manière générale, nous pouvons affirmer que ce but est atteint. Les essais effectués sur des tronçons de mur montrent en effet une concordance entre la réalité et les simulations. D'autres essais reflétant des cas plus complexes et tournés vers la pratique tels que le mur avec chaînage et la façade simple soumise à des tassements différentiels nous montrent que le programme peut être appliqué à des cas plus généraux et donner de bons résultats.

Nous pouvons toutefois noter des difficultés inévitables dans la modélisation de murs en maçonnerie que sont les disparités des caractéristiques physiques des matériaux et des interfaces entre ceux-ci; et la difficulté d'estimer ces paramètres. Les murs en maçonnerie sont en effet réalisés par la main humaine, tâche pas toujours évidente; et il est certain que les assemblages entre briques peuvent être caractérisés par des résistances très différentes. Malgré ces différences, les résultats obtenus par simulation restent toutefois proches de la réalité et la tendance générale du chemin de fissuration est toujours respectée, ce qui est assez encourageant.

À la base de cette modélisation figure l'étude des mécanismes de fissuration dans les matériaux à tendance fragile afin de réaliser des modélisations capables de simuler la propagation de fissures dans ce type de matériau. Les deux modélisations effectuées ont été testées pour un certain nombre de cas de géométries et chargements simples pour lesquels les résultats étaient connus préalablement par la théorie ou l'expérimentation. Durant ces essais, les simulations n'ont jamais été prises sérieusement en défaut, moyennant certaines restrictions décrites dans cet ouvrage (disposition du maillage, ...). La propagation de la fissuration est, dans tous les cas envisagés, similaire aux prédictions et la phase de validation est convaincante.

Les approches utilisées dans le cadre de ce travail reposent sur des principes très simples et facilement utilisables en éléments finis. Ceci les rend plus robustes et aisément généralisables à des systèmes complexes, la difficulté principale de cette généralisation étant la définition des géométries. Cette simplicité des principes utilisés pourrait également permettre d'aller plus loin dans la modélisation, par exemple en étendant les modèles à trois dimensions.

La première approche implémentée, visant à maximiser la valeur du taux de restitution d'énergie donne de très bons résultats, notamment par le fait que le calcul de l'énergie potentielle du système est assez précis par la méthode des éléments finis. Toutefois, le fait que cette méthode soit basée sur la comparaison de situations virtuelles afin de déterminer l'évolution de la propagation préférentielle restreint cette évolution aux cas envisagés. Il y a donc certaines limitations inhérentes au modèle sur le nombre de fissures simultanées, ainsi que les séparations de fissures ou interactions entre celles-ci. Sans compter que réduire ces limitations entraînerait irrémédiablement une hausse du temps d'exécution par le fait que le nombre de situations virtuelles à tester en serait augmenté.

La seconde approche, considérant le matériau comme un treillis de micropoutres se rompant lorsqu'elles atteignent une sollicitation limite, donne également de très bons résultats. Cette approximation par treillis de poutre entraîne toutefois des imprécisions, notamment au niveau des valeurs des déplacements, mais le chemin de fissuration est assez bien prédit. Son implémentation est assez simple et la géométrie ne limite aucunement le programme, car celle-ci n'inclut pas la fissure et est fixée définitivement au départ. Son application à des systèmes plus complexes et donc encore plus aisée. De plus, l'implémentation ne nécessite pas la création d'une loi de contact des lèvres de la fissure ; et elle inclut directement le critère de rupture, ce qui permet de travailler facilement avec des systèmes multimatériaux de caractéristiques de résistance différentes. Cette modélisation permet en outre de simuler un nombre infini de fissures ; et prend en charge les interactions entre les fissures et la séparation de fissures en plusieurs chemins. Le gros problème de cette méthode reste toutefois sa dépendance à l'orientation du maillage qui impose une certaine vigilance quant à la réalisation de celui-ci.

De nombreuses perspectives futures restent ouvertes dans le cadre de ce travail. Parmi celles-ci, nous avons déjà mentionné l'extension à un modèle en trois dimensions. Pour la première approche énergétique, cela contraindrait à considérer des extensions de

fissures virtuelles s'étendant dans les trois directions, augmentant par là leur nombre à envisager. L'utilisation d'un treillis de poutres tridimensionnel pour la seconde approche ne devrait pas poser de problème majeur. Il conviendrait toutefois de valider ce modèle de treillis de poutres en trois dimensions afin de vérifier s'il est capable de bien représenter un solide. Une telle généralisation en trois dimensions permettrait de réaliser des structures plus complètes en maçonnerie, comme par exemple plusieurs façades d'un bâtiment. Mais l'intérêt principal résiderait dans la prise en compte des chargements et déformations hors du plan du mur qui sont très souvent la cause d'effondrements de structures en maçonnerie.

Nous avons vu que les caractéristiques des matériaux et interfaces pouvaient avoir des valeurs très variables dans un même mur, rendant ainsi la modélisation très complexe. Bien que le fait d'adopter des valeurs moyennes donne de bons résultats, il serait intéressant d'utiliser des distributions statistiques pour ces variations de caractéristiques. Nous pourrions ainsi obtenir différents cas de simulation pour des géométries et chargements identiques, associés chacun à un intervalle de confiance. Des études statistiques pourraient montrer la sensibilité du chemin de fissuration aux variations de chacun des paramètres déterminants.

Comme déjà énoncé en 4.8, il pourrait être intéressant d'implémenter une approche mixte, adoptant l'approche énergétique pour le matériau brique, alors que les joints seraient modélisés par l'approche utilisant un treillis de poutres. Le couplage des matrices de raideur ne serait pas évident, étant donnée que la première approche considère deux coordonnées par point alors que la seconde approche considère en plus la rotation en chaque point. De plus, le passage de la fissure du joint à la brique serait assez délicat du fait qu'il est nécessaire d'amorcer la fissure manuellement pour l'approche énergétique. Il conviendrait donc d'implémenter une fonction qui amorcerait la fissuration dans une brique pour chaque front de fissure débouchant du joint sur cette brique.

L'ajout de forces volumiques pourrait être facilement implémenté afin de simuler l'effet de la gravité, mais cette amélioration ne semble pas des plus importantes.

Concernant l'approche élastique, il serait utile, afin de diminuer grandement le temps d'exécution, de développer les améliorations citées en 4.7. La première considère une approche mixte, l'orientation de la contrainte principale de traction donnant une idée de la direction de propagation; celle-ci étant ensuite affinée par des propagations virtuelles aux alentours de cette direction. La seconde préconise une fonction

d'approximation du taux de restitution d'énergie en fonction de la direction de propagation, et ainsi diminuer le nombre de directions à tester en conservant la même précision dans les résultats. Ces améliorations seraient assez simples à effectuer et très bénéfiques pour le temps d'exécution.

Toujours pour cette modélisation, il serait utile d'implémenter un critère de rupture, permettant de déterminer si la fissuration va avoir lieu, ou si elle va s'arrêter. Ce critère nécessite toutefois le calcul d'un taux de restitution d'énergie critique G_c fonction de la ténacité du matériau, qui peut être délicat à calculer dans un cas général. Le calcul de G_c permettrait également, par la maximisation de G/G_c , de modéliser des matériaux de caractéristiques de résistance différentes. Cette amélioration s'avère indispensable afin de simuler un mur en maçonnerie.

Pour cette approche énergétique, l'ajout d'une loi de contact interdisant le chevauchement des surfaces du mur ainsi que les fissures se formant en compression serait également intéressant pour des cas plus complexes. Pour les simulations réalisées dans le cadre de ce travail, les chargements et géométries étaient réalisés de manière à favoriser des fissures s'ouvrant naturellement et cette loi de contact ne fut pas indispensable.

Concernant l'approche par treillis de poutres, il serait intéressant d'établir une correspondance entre les paramètres de résistance macroscopiques (du matériau réel) et microscopiques (des micropoutres). Cette correspondance peut être établie par une série de confrontations entre essais expérimentaux et simulations afin de déterminer les paramètres les mieux adaptés.

Bibliographie

- [Bon05] Bonnet M. *Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [Cap02] Cap JF. *Calcul organique du béton armé*. Université Catholique de Louvain, 2002.
- [Cap03] Cap JF. *Matériaux structuraux : technologie du béton*. Université Catholique de Louvain, 2003.
- [Cha01] Chang CS, Wang TK, Sluys LJ, Bittencourt TN, van Mier JGM. Fracture modeling of concrete using two different microstructural mechanics approaches. *Mechanics and Materials Summer Conference*, 2001.
- [Cha02a] Chang CS, Wang TK, Sluys LJ, van Mier JGM. Fracture modeling using a micro-structural mechanics approach - I. Theory and formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 2002.
- [Cha02b] Chang CS, Wang TK, Sluys LJ, van Mier JGM. Fracture modeling using a micro-structural mechanics approach - II. Finite element analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 2002.
- [Dog00] Doghri I. *Mechanics of Deformable Solids*. Springer-Verlag, 2000.
- [Duf04] Duffot M. *Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture*. Université de Liège, 2004.
- [Ing02] Ingraffea AR. *Engineering Fracture Mechanics*. Cornell University, 2002.
- [Ing03] Ingraffea AR, Wawrzynek PA. *Finite Element Methods for Linear Elastic Fracture Mechanics*. Elsevier Science Ltd., 2003.
- [Leg03] Legat V. *Introduction aux éléments finis*. Université Catholique de Louvain, 2003.

- [Lil03] Lilliu G, van Mier JGM. 3d lattice type fracture model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2003.
- [Mas03] Massart TJ. *Multi-scale modeling of damage in masonry structures*. Technische Universiteit Eindhoven, 2003.
- [Mia95] Miannay D. *Mécanique de la rupture*. Les éditions de physique, 1995.
- [Par04] Pardoën T. *Déformation et rupture des matériaux*. Université Catholique de Louvain, 2004.
- [Pra03] Prado EP, van Mier JGM. Effect of particle structure on mode I fracture process in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2003.
- [Rem02] Remacle JF. *Mécanique des structures*. Université Catholique de Louvain, 2002.
- [Rék80] Rékatch V. *Problèmes de la Théorie de l'Elasticité*. Editions Mir de Moscou, 1980.
- [Sch96] Schlangen E. and Garboczi EJ. New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice. *Int. J. Engng Sci.*, 34(10), 1996.
- [Sch97] Schlangen E. and Garboczi EJ. Fracture simulation of concrete using lattice models : computational aspects. *Int. J. Engng Sci.*, 57(2/3), 1997.
- [Sch00] Schmit E. *Conception et réalisation des structures*. Université Catholique de Louvain, 2000.
- [van02] van Mier JGM, van Vliet MRA, Wang TK. Fracture mechanisms in particle composites : statistical aspects in lattice type analysis. *Mechanics of Materials*, 34, 2002.
- [Wik] Wikipedia, The Free Encyclopaedia. <http://www.wikipedia.org>.
- [Zeg03] Zegloul A. *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*. Université de Metz, 2003.