Activités de Recherche

Thomas Toulorge

Février 2014

Mon domaine de recherche est celui du **calcul scientifique**. Mes activités sont centrées sur le développement et l'analyse de méthodes numériques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Je m'intéresse notamment aux problèmes qui nécessitent d'être résolus avec une grande précision, tout en faisant intervenir des **géométries complexes**. L'objectif final est de concevoir des méthodes qui non seulement permettent aux scientifiques et ingénieurs de résoudre plus efficacement les problèmes qu'ils traitent aujourd'hui, mais aussi d'ouvrir la porte à de nouvelles applications auparavant hors de portée du calcul scientifique.

Dans ce cadre, je suis particulièrement intéressé par les **méthodes numériques d'ordre élevé**. J'ai travaillé principalement sur les discrétisations spatiales de type **Galerkin discontinu**, associées à des schémas **Runge-Kutta** pour l'intégration temporelle. Je m'intéresse également à la génération de **maillages curvilinéaires**, sans lesquels il est difficile de tirer parti de l'efficacité des méthodes d'ordre élevé avec des géométries courbes. Parallèlement, je participe au développement de méthodes qui visent à éviter l'étape fastidieuse et technique de création de maillages conformes à la géométrie, en utilisant l'**adaptation anisotrope du maillage à des courbes de niveau** pour représenter les frontières.

J'applique ces méthodes principalement à des problèmes d'**aéroacoustique numérique** et de **mécanique des fluides numérique**. Les simulations que j'effectue concernent aussi bien des cas de test académiques que des applications plus réalistes, essentiellement dans le domaine aéronautique.

1 Méthodes de type Runge-Kutta Galerkin discontinu

Durant mon doctorat, je me suis intéressé aux méthodes consistant à combiner une discrétisation spatiale de type **Galerkin discontinu** (*Discontinuous Galerkin*, DG), à des schémas **Runge-Kutta** (RK) pour l'intégration temporelle. Ces méthodes convergent avec un ordre de précision arbitraire, peuvent utiliser des maillages non-structurés, et s'adaptent naturellement au calcul massivement parallèle. Elles conviennent donc particulièrement bien aux problèmes industriels nécessitant une grande résolution, comme ceux rencontrés en aéroacoustique.

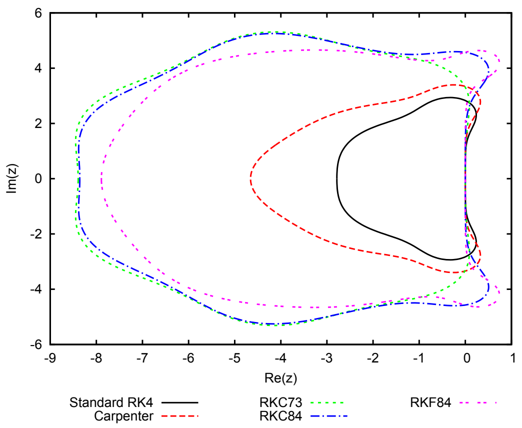

FIGURE 1 – Régions de stabilité des trois nouveaux schémas RK, comparés à des schémas RK couramment utilisés.

Néanmoins, l'utilisation de schémas explicites pour l'intégration temporelle reste problématique : la grande rigidité de l'opérateur spatial limite fortement le pas de temps autorisé par les conditions de stabilité, surtout à ordre élevé. Il est donc nécessaire de caractériser précisément la limite de stabilité, de manière à pouvoir choisir le pas de temps le plus grand possible pendant les simulations. Ma première contribution dans ce domaine a consisté en l'**étude de la condition CFL** sur des maillages non-structurés. Dans ce travail, l'influence de la forme des éléments triangulaires sur la limite de stabilité a été mise en évidence. Deux différentes mesures de la taille d'élément ont été identifiées comme étant les plus appropriées pour la condition CFL. Il a été montré que l'influence de la taille de l'élément n'est pas fortement affectée par le choix du schéma RK. La limite de stabilité a été précisément évaluée pour diverses variantes de la méthode RKDG, en comparant les performances de plusieurs schémas RK couramment utilisés pour des problèmes de propagation d'onde.

Toutefois, il m'est apparu que ces parmi schémas RK, la plupart avait été conçus pour être utilisés avec des discrétisations spatiales de type différences finies. Ceci a motivé une deuxième étude, dans laquelle des **schémas RK adaptés aux discrétisations spatiales DG** ont été obtenus par des techniques d'optimisation. Deux scénarios ont été considérés. Dans le premier, l'utilisateur est supposé libre de choisir la densité du maillage : un schéma d'ordre quatre à huit étapes présentant le meilleur compromis entre précision et stabilité a alors été obtenu. Dans le deuxième, la taille d'élément est supposée contrainte : deux schémas qui maximisent la stabilité (un d'ordre trois à sept étapes, et un d'ordre quatre à huit étapes) ont été trouvés. L'analyse et l'application des trois nouveaux schémas à des cas concrets ont montré qu'ils permettent de gagner entre 16% et 27% en temps de calcul par rapport aux schémas pré-existants (voir Figure 1).

Publications représentatives :

- **T. Toulorge** and W. Desmet. CFL conditions for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods on triangular grids. *J. Comput. Phys.*, 230(12) :4657–4678, 2011
- **T. Toulorge** and W. Desmet. Optimal Runge-Kutta schemes for discontinuous Galerkin space discretizations applied to wave propagation problems. *J. Comput. Phys.*, 231(4) :2067–2091, 2012

2 Méthodes RKDG d'ordre élevé en aéroacoustique

Les problèmes d'aéroacoustique sont caractérisés par une grande disparité en taille et en amplitude entre les fluctuations acoustiques et les structures hydrodynamiques qui interagissent. De plus, les ondes acoustiques concernées ont souvent un contenu spectral large, et leur propagation est suivie sur une longue distance. Ces caractéristiques exigent une grande précision de la méthode numérique choisie pour simuler de tels phénomènes, ce qui rend attrayant l'usage des méthodes RKDG d'ordre élevé. Durant mon doctorat, j'ai appliqué les méthodes RKDG aux équations linéaires qui gouvernent la **propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement non-uniforme** (voir Figure 2).

Dans ce cadre, ma première contribution a consisté à mettre en évidence l'intérêt des **traitements d'ordre élevé des parois courbes**. Divers cas de test ont montré que la précision globale de la solution peut être limitée par le traitement linéaire classique des parois courbes, quand le calcul est effectué avec des méthodes RKDG d'ordre élevé. Il est apparu qu'un traitement impliquant des éléments courbes près de la paroi est nécessaire pour éviter de devoir raffiner le maillage localement, et donc pour bénéficier pleinement de l'efficacité des méthodes d'ordre élevé.

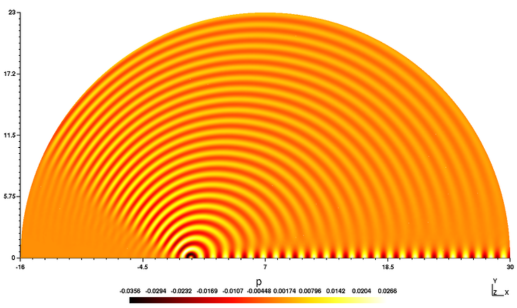

FIGURE 2 – Pression acoustique générée par une source monopolaire placée dans une couche limite.

J'ai ensuite appliqué les méthodes numériques décrites ci-dessus à un problème d'aéroacoustique linéaire, en étudiant le **comportement acoustique d'orifices dans une plaque plane soumis à un écoulement rasant**. À ma connaissance, ce problème d'intérêt industriel avait fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques auparavant, mais n'avait jamais été approché numériquement. La méthode RKDG a été utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement moyen obtenu par un calcul RANS incompressible en volumes finis. Cette méthodologie a pu reproduire l'interaction entre la couche de cisaillement et les ondes acoustiques au niveau de l'orifice. Il a donc été possible de prédire qualitativement les plages de fréquence d'amplification ou d'atténuation du son, ce dont les modèles purement théoriques sont incapables. De plus, cette étude a illustré les capacités des méthodes RKDG d'ordre élevé à traiter un problème multi-échelles exigeant, où les courtes fluctuations de vorticité dans la couche de cisaillement doivent être résolues, en plus des longues ondes acoustiques.

Publications représentatives :

- **T. Toulorge** and W. Desmet. Curved boundary treatments for the discontinuous Galerkin method applied to aeroacoustic propagation. *AIAA J.*, 48 :479–489, 2010
- **T. Toulorge**. *Efficient Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods Applied to Aeroacoustics.* PhD thesis, KU Leuven, Belgium, 2012. ISBN : 978-94-6018-479-6

3 Maillages d'ordre élevé et adaptation

Durant mon doctorat, il m'est apparu nécessaire de disposer d'une approximation curvilinéaire des géométries courbes pour pouvoir tirer tous les bénéfices des schémas numériques d'ordre élevé. Si les schémas d'ordre élevé sont l'objet d'un intérêt croissant de la part des chercheurs et ingénieurs numériciens, le développement des **méthodes de maillage** correspondantes reste relativement limité en comparaison.

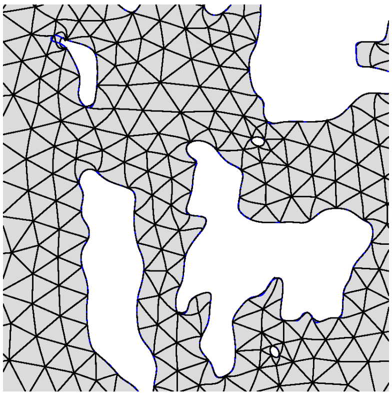

Figure 3 – Détail d'un maillage d'ordre 4 de la grande barrière de corail.

Dans le cadre de mon post-doctorat, j'ai l'opportunité de travailler sur des techniques **génération de maillages curvilinéaires** (voir Figure 3), qui sont directement mises à disposition de la communauté à travers le logiciel libre Gmsh (`http://geuz.org/gmsh`). Le problème consiste à transformer un maillage linéaire en un maillage d'ordre supérieur valide : chaque élément du maillage doit pouvoir être lié à un unique élément de référence par une transformation inversible, c'est-à-dire une transformation dont le jacobien ne s'annule pas. Pour ce faire, la méthode développée utilise une procédure d'optimisation qui déplace les nœuds de manière à ce que le minimum du jacobien dépasse un certain seuil sur chaque élément du maillage. Cette procédure s'appuie sur une technique originale d'évaluation des bornes du jacobien, et est appliquée localement à des parties du maillage sélectionnées avec soin. Elle se révèle à la fois robuste et rapide, qualités que les méthodes pré-existantes, basées sur des analogies mécaniques, réunissent difficilement.

Parallèlement au sujet des maillages d'ordre élevé, mon post-doctorat me permet de participer au développement de méthodes numériques qui utilisent l'**adaptation anisotrope du maillage à des courbes de niveau** (*level-set*) pour représenter les frontières du domaine. Le travail effectué a montré qu'il est possible de d'obtenir le même ordre de convergence qu'avec un maillage conforme à la géométrie en imposant les conditions aux limites à des nœuds d'un maillage raffiné localement au voisinage de la frontière. En raffinant uniquement dans la direction normale à la frontière, l'accroissement du nombre de degrés de liberté reste limité, et le surcoût de calcul est acceptable. Cette technique, qui est rendue possible par les progrès des technologies de maillage anisotrope, pourrait permettre d'effectuer des simulations sur des géométries complexes sans passer par l'étape fastidieuse de création d'un maillage conforme à la géométrie.

Les sujets abordés durant mon doctorat et mon post-doctorat soulèvent la question de l'impact de l'erreur d'approximation de la géométrie sur la solution du problème, que je compte continuer à examiner dans la suite de mes recherches.

Publications représentatives :

— **T. Toulorge**, C. Geuzaine, J.-F. Remacle, and J. Lambrechts. Robust untangling of curvilinear meshes. *J. Comput. Phys.*, 254 :8–26, 2013

— D.-L. Quan, **T. Toulorge**, E. Marchandise, J.-F. Remacle, and G. Bricteux. Anisotropic mesh adaptation with optimal convergence for finite elements using embedded geometries. *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, 268 :65–81, 2014