Fiche 7. Soustraction dans $\mathbb{Z}$

Nombres et opérations – S1 (12-13 ans)

1. La situation

On peut proposer cette question[1] « défi » après l'introduction des nombres entiers et de l'addition sur ceux-ci. L'énoncé supplémentaire *Multiplication dans* $\mathbb{Z}$ [S10] est du même type.

Soustraction dans $\mathbb{Z}$

Que vaut $5-(-2)$?

En voici une variante.

Soustraction dans $\mathbb{Z}$ (variante)

Que valent

$$5+(-2),$$
$$5-(-2),$$
$$(-5)-(-2)?$$

Dans cette variante, le premier calcul proposé pourrait aider les élèves à ne pas tomber dans le piège consistant à négliger un des deux signes « moins » du deuxième calcul. En effet, lors de l'expérimentation sur l'énoncé de départ, beaucoup d'élèves ont proposé 3 comme solution de $5-(-2)$, alors qu'ils savaient, peu de temps auparavant, que 3 était égal à $5+(-2)$.

Le troisième calcul permet de réfléchir en termes de dettes ou de mauvais points[2]. Comme nous le verrons dans les *Échos des classes*, le deuxième calcul est difficile à interpréter en termes de retrait (comment retirer (-2) alors que l'on part d'un nombre positif ?).

Mais faut-il donner ces calculs supplémentaires directement ou les garder comme pistes si le débat ne mène pas à la solution ? L'enseignant décidera en fonction du contexte.

Cette fiche a été rédigée par Thérèse Gilbert.

1. Élaborée par Marie Gantois, étudiante de la Haute École Ephec, à Bruxelles, lors d'un stage. Voir les *Échos des classes*.
2. Certains jeux de société, où l'on distribue des points et des pénalités, fournissent un contexte aux bons et mauvais points.

2. Solutions et analyse

La question sert d'accroche à la soustraction dans $\mathbb{Z}$. Les élèves ne sont pas censés être capables d'y répondre, mais ils peuvent déjà se faire quelques idées sur la question. Celle-ci, surprenante dans l'état de leurs connaissances, peut aussi faire émerger certaines représentations des nombres négatifs et de la soustraction.

La première idée des élèves pourrait bien être $5 - (-2) = 3$. Imaginer qu'en ôtant un nombre (une quantité ?) d'un autre nombre, on puisse dépasser ce dernier parait absurde, tant le modèle des nombres positifs les a habitués au fait que la soustraction a pour effet de diminuer. Mais s'ils pensent aux calculs $5 + (-2)$ et $5 - 2$, qui donnent déjà 3, on peut espérer qu'ils doutent de cette première idée.

Alors quoi ? Si appliquer $+(-2)$ revient à enlever 2, appliquer $-(-2)$ reviendrait à ajouter 2 ? C'est peut-être un peu fort de café...

Peut-on comprendre ce calcul ? Les contextes pour donner une motivation à la règle « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé » ne manquent pas. On peut lire quelques interprétations et justifications (ou plutôt motivations) dans Berlanger *et al.* [2] et dans la section 4.1 de cette fiche.

Faut-il envisager d'autres réponses que 7 (la bonne) et 3 ? Lors de l'expérimentation, les idées des élèves ont été bien plus variées que ce que nous pouvions imaginer (voir les *Échos des classes*).

3. Échos des classes

Dans cette classe de S1, les élèves se sont déjà familiarisés avec les nombres entiers à travers plusieurs contextes (températures, étages, bons et mauvais points, etc.), ils ont vu diverses notions liées aux nombres relatifs (valeur absolue, nombres opposés) et maitrisent assez bien l'addition, introduite sur base de deux interprétations : déplacements sur une droite et cumul de bons et de mauvais points. Ils n'ont pas encore abordé la soustraction dans $\mathbb{Z}$.

Le débat, réflexion individuelle, votes et petite intervention de l'enseignante compris, a duré environ 40 minutes en tout. Il a été assez animé.

Les réponses proposées au départ sont -7 (6 votes), 3 (5 votes), 1 (1 vote) et -3 (3 votes). Personne ne propose la (bonne... pour nous) réponse 7. Dans la suite, cette réponse sera à peine évoquée par une élève, qui ne la proposera plus lors du dernier vote.

Voici quelques réflexions qui ont constitué le débat.

> ZOHRA — J'ai proposé 1 parce qu'il y a deux moins, donc on doit faire $5 - 2 - 2$.

Les autres ne sont pas d'accord, ce n'est pas $5-2-2$, c'est $5-(-2)$. Zohra se range finalement à cet avis.

Mamadou — Ça fait 3.

Aïcha — Moi, je crois pas que c'est 3. Sur une droite graduée, je suis à -2 et je recule de 5.

Les autres — On n'a pas écrit $-5-(-2)$. Il n'y a pas de -5 !

Zohra — Voici pourquoi je ne suis pas d'accord [avec Aïcha] : le 5 est devant !

Aïcha — Tu peux pas trouver -2 dans 5, donc c'est pas possible.

Obi *(il va au tableau)* — Je dessine 5 bons points, et 2 mauvais points en rouge (figure 1). J'avais 5 bons, j'ai enlevé 2 mauvais, il reste 3.

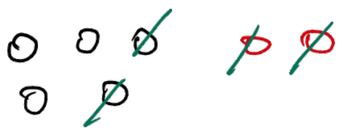


Figure 1. – De bons et de mauvais points

Ibtissem — Ici, c'est *moins* : $5-(-2)$. Il faut faire comme ça. [Ibtissem va au tableau. Voir figure 2.] Ça fait 3.

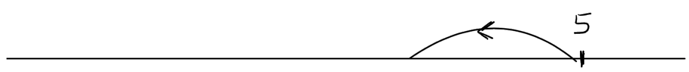


Figure 2. – Se déplacer sur la droite

Adil — Ici, il y a deux moins. On n'a pas appris... Ah ! J'ai compris. Ça [il parle du schéma d'Ibtissem, figure 2], c'est -2 pas $-(-2)$ donc c'est 3. [Le calcul] $-2+5$, ça fait 3. Et $5-2$, ça fait 3.

Zohra *(parlant du même schéma)* — Pourquoi t'avances ? Ah ! c'est vrai.

Aïcha — Il est écrit $5-(-2)$, il faut lire $-2-5$. Donc c'est -7.

Rose — C'est une soustraction.

Aïcha — Mais c'est pas possible de faire $5-(-2)$. Tout le monde sait ça !

BOUSHRA — Mais il faut commencer par le terme 5.

AÏCHA — Mais c'est pas possible de faire $5 - (-2)$.

La discussion est très animée. Chacun veut s'exprimer. Au bout d'un moment, l'enseignante propose à chacun d'y réfléchir individuellement deux minutes. La discussion reprend ensuite, mais sans nouvel argument. L'enseignante interrompt le débat et reprend le schéma d'Obi (figure 1) pour amener les élèves à voir que ce qui est représenté est la somme de 5 et -2 et non la différence.

Ibtissem propose alors la réponse 7 pour $5 - (-2)$, en précisant que $5 + (-2) = 3$ et $5 - (-2) = 7$.

BILAL — Ça fait 5. Car pour $5 + (-2)$, on reçoit 2 mauvais points. Dans $5 - (-2)$, le $-(-2)$, c'est comme 0. On ne perd pas de mauvais points. Pour $5 + (-2)$, deux mauvais points mangent deux bons points. Ici, c'est l'inverse.

Finalement, le débat se termine par un dernier vote. La plupart votent pour les réponses 3 ou 5. L'enseignante clôture le débat et annonce « nous allons découvrir la réponse ». Des élèves tapent sur leur banc [pour ne pas arrêter le débat ? pour obtenir la réponse directement ? parce qu'ils sont trop excités pour reprendre le cours normal ?]. On entend « Ah, merde, on va travailler ».

On le voit, les élèves ont eu beaucoup de mal à imaginer que soustraire un nombre d'un autre pouvait augmenter celui-ci. À plusieurs reprises, certains ne sont pas passés loin de la réponse ou d'un raisonnement attendu.

Par contre, ce fut une chaude introduction aux activités qui ont suivi. Tous les élèves semblaient concernés. Le débat a aussi montré certaines lacunes dans les compétences travaillées juste avant et la difficulté à utiliser certains contextes dans le domaine des nombres relatifs.

Enfin, on ne se rend pas toujours compte des préconceptions des élèves. Même quand on essaie de les prévoir, les élèves peuvent nous étonner. Ici, le débat a permis aux élèves d'exprimer leurs idées sur la soustraction et sur les entiers. Et même si les discussions sont parties dans tous les sens, cela a permis à l'enseignante d'entendre des raisonnements et des schémas de pensée qui n'auraient sans doute pas émergé dans un contexte d'apprentissage plus habituel.

4. Institutionnalisation

Ce débat s'inscrit parfaitement dans le cours sur les opérations sur les entiers. La solution, les contenus seront naturellement institutionnalisés dans le cours.

Néanmoins, après un cours ou deux sur la soustraction, il peut être utile de revenir sur les différentes démarches évoquées durant le débat. Dans le cas du débat relaté, on relèverait celles utilisant les contextes de la droite ou des bons et mauvais points et on verrait comment on peut rectifier les images trompeuses. C'est ce que nous proposons ici.

4.1. Éléments de solution

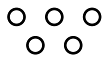
1. Dans le contexte des bons et des mauvais points : il s'agit d'une situation où l'on distribue de bons et de mauvais points (comme dans certains jeux de société) ; à la fin de la période, on fait le bilan en ne gardant que des points d'une sorte, un bon point en annulant un mauvais. . .

L'addition et la soustraction dans le contexte des bons et des mauvais points

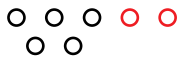
Ajouter -2

$5 + (-2) =$

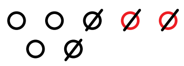
On part de 5 bons points



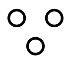
et on ajoute 2 mauvais points.



Deux bons et deux mauvais points s'annulent.



Restent 3 bons points.



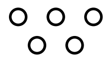
$5 + (-2) = 5 - 2 = 3$

Ajouter deux mauvais points revient à en enlever deux bons.

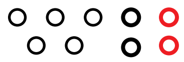
Soustraire -2

$5 - (-2) =$

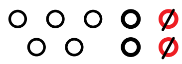
On part de 5 bons points



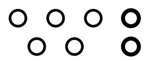
et on veut enlever 2 mauvais points (absents).
On ajoute deux bons et deux mauvais points.
Situation équivalente à celle de départ :



On peut maintenant enlever deux mauvais points.



Restent 7 bons points.



$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

Enlever deux mauvais points revient à en ajouter deux bons.

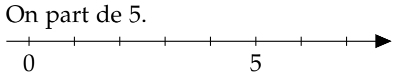
2. Sur la droite graduée

L'addition et la soustraction sur la droite graduée

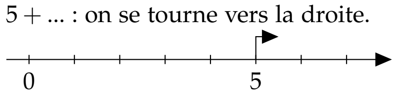
Ajouter -2

$$5+(-2)=$$

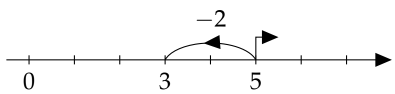
On part de 5.



$5+\ldots$: on se tourne vers la droite.



$5+(-2)$: on recule de 2.

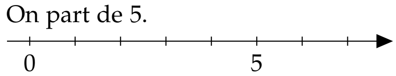


$$5+(-2)=5-2=3$$

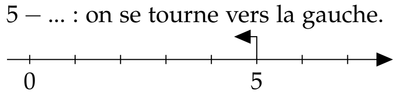
Soustraire -2

$$5-(-2)=$$

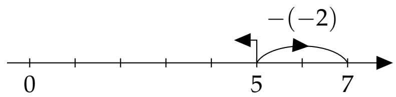
On part de 5.



$5-\ldots$: on se tourne vers la gauche.



$5-(-2)$: on recule de 2.



$$5-(-2)=5+2=7$$

3. Par l'opérateur réciproque

La soustraction par l'opérateur réciproque

La question

$$10-7=?$$

peut signifier

$$7+?=10 \quad \text{ou} \quad ?+7=10,$$

et peut se lire

« combien faut-il ajouter à 7 pour obtenir 10 ? »

ou

« de combien faut-il partir pour qu'en ajoutant 7 on obtienne 10 ? ».

De même la question

$$5-(-2)=$$

peut signifier

$$(-2)+?=5 \quad \text{ou} \quad ?+(-2)=5.$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$? - 2 = 5.$$

La question $5 - (-2) = ?$ peut donc se lire

— « combien faut-il ajouter à -2 pour obtenir 5 ? »
— ou « de combien faut-il partir pour qu'en ajoutant -2 on obtienne 5 ? »
— ou « de combien faut-il partir pour qu'en enlevant 2 on obtienne 5 ? ».

4.2. Contenus

Les règles de soustraction seront amenées à l'aide d'autres activités et institutionnalisées lors de celles-ci.

Après cela, il serait intéressant de revenir sur les arguments erronés. Dans le cas du débat relaté, on peut reprendre les deux schémas (figures 1 et 2) pour comprendre où est l'erreur et écrire les calculs corrects qui leur correspondent.

4.3. Réinvestissement et évaluation

Au lieu de donner de simples calculs, on peut demander de représenter des calculs afin de tester la compréhension des règles appliquées.

Représenter une différence

Représentez les calculs suivants et exploitez vos représentations pour en donner les réponses :

a) $-2 - 5$,
b) $-2 - (-5)$.

5. Le sel du problème

Le problème permet d'introduire la soustraction dans $\mathbb{Z}$ et de voir comment les élèves se débrouillent avec les connaissances nouvellement acquises.

L'énoncé est très court. Tous les élèves savent ce que la soustraction signifie (dans les nombres positifs) et ont découvert les nombres entiers. Ils peuvent commencer à chercher, ont vite une idée, mais ce n'est pas simple, un peu contre-intuitif, donc ils ne sont pas tous d'accord.

Il n'est pas nécessaire d'y consacrer beaucoup de temps ; un débat court devrait déjà être fructueux.

Bibliographie

[1] Berlanger, I., Cuisinier, G., Gilbert, Th., & Ninove, L. (2012). Quelques difficultés liées à la soustraction (Partie 1). *Losanges, 19*, 3-9.

[2] Berlanger, I., Cuisinier, G., Gilbert, Th., & Ninove, L. (2013). Quelques difficultés liées à la soustraction (Partie 2). *Losanges, 20*, 3-15.