

1. Les bases du débat mathématique

Dans cette section, nous commençons par expliquer de façon plus précise ce que nous entendons par « débat mathématique » (en particulier, ce qui le distingue d'autres formes d'échanges au cours de mathématiques) et donnons un aperçu de ses aspects essentiels.

1.1. Qu'est-ce qu'un débat mathématique ?

Un **débat mathématique** est un échange entre plusieurs personnes autour d'une question d'ordre mathématique, la *question* ou l'*énoncé* du débat. On peut le distinguer d'autres formes d'échanges par les caractéristiques suivantes :

- la question du débat engendre un *désaccord* parmi les participants, qui permet au débat de se lancer ;
- le débat progresse afin de tenter de régler ce désaccord, grâce aux *arguments* des participants, et non, par exemple, sur base de leurs opinions subjectives ;
- les échanges ne consistent pas seulement en une juxtaposition d'arguments : les débattants rebondissent sur les arguments qui sont développés, et cherchent en particulier à *réfuter* ou invalider tout argument qui leur semble incorrect ; c'est cela qui permet au débat de progresser.

3. Un premier exemple de débat

Voici un extrait d'échanges (voir la fiche [F7] pour le débat complet) dans une classe de 1^{re} secondaire lors du début d'un débat autour de la question *Que vaut $5 - (-2)$?*

Préalablement au débat, les élèves se sont déjà familiarisés avec les nombres entiers mais n'ont pas encore abordé la soustraction dans $\mathbb{Z}$. Ils maîtrisent cependant assez bien l'addition, introduite sur base de deux interprétations : déplacements sur une droite et cumul de bons et de mauvais points.

Les réponses proposées au départ par les élèves sont -7 (6 votes), 3 (5 votes), 1 (1 vote) et -3 (3 votes). Personne ne propose la réponse 7 .

ZOHRA — J'ai proposé 1 parce qu'il y a deux moins, donc on doit faire $5 - 2 - 2$.

Les autres ne sont pas d'accord, ce n'est pas $5 - 2 - 2$, c'est $5 - (-2)$. Zohra se range finalement à cet avis.

MAMADOU — Ça fait 3.

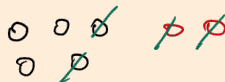
AÏCHA — Moi, je crois pas que c'est 3. Sur une droite graduée, je suis à -2 et je recule de 5.

LES AUTRES — On n'a pas écrit $-5 - (-2)$. Il n'y a pas de -5 !

ZOHRA — Voici pourquoi je ne suis pas d'accord [avec Aïcha] : le 5 est devant !

AÏCHA — Tu peux pas trouver -2 dans 5, donc c'est pas possible.

OBI — [Il va au tableau ; voir ci-dessous.] Je dessine 5 bons points, et 2 mauvais points en rouge. J'avais 5 bons, j'ai enlevé 2 mauvais, il reste 3.



IBTISSEM — Ici, c'est *moins* : $5 - (-2)$. Il faut faire comme ça. [Ibtissem va au tableau ; voir ci-dessous.] Ça fait 3.



(...)

4. Exemples de non-débats

Voici quelques exemples de discussions entre élèves que nous ne qualifions pas de « débats mathématiques » — ce qui ne préjuge bien sûr aucunement de leur intérêt.

1. *L'enseignant demande aux élèves de chercher à démontrer ensemble le théorème de Pythagore.* L'activité telle quelle n'engendre pas de désaccord initial ou ne force pas une prise de position des élèves (mais bien sûr il se peut qu'à un moment l'activité débouche sur des désaccords entre élèves concernant certaines de leurs affirmations, ce qui peut alors provoquer un débat).
2. *L'enseignant demande aux élèves de débattre de la question « pensez-vous que les mathématiques soient utiles dans la vie de tous les jours ? ».* Il s'agit ici d'un débat faisant plutôt intervenir des opinions subjectives et des arguments relevant d'autres domaines que les mathématiques.

3. *L'enseignant pose la question « comment appelle-t-on un quadrilatère ayant deux côtés parallèles ? ». Il est possible que les réponses des élèves soient multiples (parce qu'ils ne se souviennent pas du terme exact) et que la question provoque un désaccord, mais celui-ci ne peut pas être levé sur base d'arguments. C'est l'enseignant qui devra simplement trancher et donner le terme exact. Tout désaccord ne provoque donc pas un débat.*
4. *L'enseignant propose aux élèves une question de débat et leur demande d'y réfléchir pour la prochaine fois. Au cours suivant, il demande à chaque élève à son tour de relater au reste de la classe ses idées, avant d'en faire la synthèse et les corrections nécessaires. Les élèves n'ont pas l'occasion ici de rebondir sur les arguments des autres ou de défendre les leurs, de sorte que la responsabilité de la validation de leurs idées et affirmations reste entièrement dans les mains de l'enseignant.*

Puisque nous parlons de débats en classe, les débattants sont faciles à identifier : il s'agit bien sûr des élèves (dont l'enseignant ne fait à priori pas partie !). Pendant le débat, l'enseignant joue alors à l'équilibriste entre deux objectifs qui le tiraillent dans des directions opposées : d'une part, celui d'accompagner le débat pour favoriser sa progression et, d'autre part, celui de ne surtout pas reprendre cette part de responsabilité scientifique que les élèves se sont finalement appropriée en débattant les uns avec les autres, sans l'intermédiaire du prof. Nous parlons plus en détail de cette responsabilité et des rôles de l'enseignant, pendant et après le débat, dans les sections 1.2 et 1.3.

Quant à la question du débat, notons juste pour le moment qu'elle peut tout aussi bien provenir d'un énoncé préparé à l'avance par l'enseignant que d'un questionnement spontané des élèves eux-mêmes, que l'enseignant organise en débat. Nous partageons quelques réflexions sur les choix de questions de débat dans la section 3.

5. Exemples de débats spontanés

Voici quelques exemples de questions spontanées ayant mené à un débat en classe, questions posées directement par un élève, ou questions formulées par l'enseignant suite aux interrogations d'un élève.

1. *Une droite possède-t-elle un ou des axe(s) de symétrie ? Si oui, combien ?*
2. *Quelles sont les valeurs possibles pour la tangente d'un angle ? [F19]*
3. *Y a-t-il plus de nombres naturels que de multiples de 6 ? [F13]*

En invitant ainsi les élèves à échanger leurs points de vue sur une question

mathématique, nous mettons en lumière une pratique somme toute courante dans l'histoire des mathématiques. Les confrontations d'idées entre pairs ont toujours été un moteur de progrès en sciences, et il est réjouissant d'inscrire les élèves dans ce mouvement, à leur propre échelle bien sûr.

6. Exemple de débat dans l'histoire des mathématiques

Le 22 août 1669, Louis Huygens envoie à son frère, le mathématicien Christian Huygens, une copie de la table de mortalité de Graunt, publiée en 1662, et lui demande « jusqu'à quel âge doit vivre un enfant aussitôt qu'il est conçu ? ».

S'en suit alors une correspondance entre les deux frères. Ils ne sont pas d'accord. Alors que Louis, pour répondre à cette question, calcule ce que nous appelons actuellement l'espérance de vie, concept non encore apparu à cette époque, Christian, familier du domaine des jeux, recherche le temps au bout duquel la moitié des individus aura disparu. En d'autres mots, l'âge auquel un individu a une chance sur deux d'arriver. Du moins est-ce ce qu'il fait dans un premier temps, car la discussion entre les deux frères inspire Christian qui applique la méthode de Louis dans le problème de la rente viagère.

Le 29 novembre 1669, Christian écrit à son frère « je trouve que nous avons tous deux raison en prenant la chose en différents sens. (...) Votre méthode est fort belle et subtilement trouvée. (...) Ce sont donc deux choses très différentes que l'espérance ou la valeur de l'âge future d'une personne, et l'âge auquel il y a égale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. »

Source : B. Parzysz (1997), *L'espérance de vie des frères Huygens*, Bulletin de l'APMEP, n° 416.

1.2. Un nouveau rôle pour les élèves

Au cours de mathématiques, qui dit où sont les erreurs ? Qui tranche face à deux réponses différentes ? Qui est garant de l'exactitude des propositions ? Qui a la charge de les valider ? Dans la toute grande majorité des cas, la réponse à ces questions est : le professeur. Ce fonctionnement classique contribue à installer chez certains élèves un rapport « docile » aux mathématiques, vues comme un ensemble de règles et de procédures à retenir par cœur et à appliquer sans en chercher le sens.

Tout au contraire, nous aimerions que les élèves se posent des questions, qu'ils doutent, qu'ils n'hésitent pas à remettre en question les règles qu'on leur soumet, qu'ils cherchent des *raisons* de procéder comme ceci plutôt

que comme cela, qu'ils soient capables d'argumenter, n'aient pas peur de commettre des erreurs et puissent s'en servir comme appui pour avancer. La pratique du débat mathématique se propose de les faire progresser dans cette voie.

Mais peut-on réellement douter des règles mathématiques ? Peut-on remettre en question que « moins par moins fait plus » ou que la somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle vaut 180° ? Et comment les élèves, avec leurs connaissances limitées, pourraient-ils prendre en charge eux-mêmes le traitement des questions qu'ils se posent ? Cela peut paraître impossible et c'est pourtant l'expérience que nous souhaitons partager dans cet ouvrage.

Lorsqu'un enseignant place ses élèves en situation de débat mathématique, il leur délègue, pour un temps, la responsabilité de la validation des énoncés. Il s'agit ici, en fait, d'une double responsabilité : celle de se mettre d'accord sur la vérité ou la fausseté d'énoncés mathématiques mais aussi, et c'est là l'essentiel, celle de le faire de manière argumentée. En termes didactiques, on dit que l'enseignant *dévoque la responsabilité scientifique* aux élèves. Les élèves doivent ainsi prendre en charge, à travers leurs échanges, les raisons qui leur permettent de se convaincre et de convaincre les autres.

7. Exemple d'accompagnement du débat, avec et sans reprise de la responsabilité scientifique

Imaginons que, lors d'un débat, la situation suivante se produise : Alex, un élève, affirme une chose erronée ou utilise une logique douteuse. Certains élèves ont l'air d'être d'accord avec lui, d'autres n'ont visiblement pas compris ce qu'il voulait dire, et d'autres encore ont d'autres idées en tête qu'ils voudraient exprimer au plus vite, mais personne ne réagit verbalement aux propos d'Alex.

L'enseignant pense qu'il est néanmoins intéressant de s'arrêter un moment sur l'intervention d'Alex. Voici trois façons dont l'enseignant pourrait intervenir dans ce genre de situation.

1. L'enseignant mentionne et explique pourquoi le raisonnement d'Alex est incorrect, avant de redonner la parole aux élèves.
2. L'enseignant s'assure que tout le monde a bien entendu l'intervention d'Alex et au besoin la résume au tableau, et demande si tout le monde l'a bien comprise (sinon, Alex pourra clarifier) et est d'accord (sinon, pourquoi ?).
3. L'enseignant procède comme au deuxième point, mais ne le fait pas uniquement pour des interventions erronées d'élèves.

Dans le premier cas de figure, la responsabilité scientifique est reprise en main par l'enseignant : les élèves risquent alors de ne plus se sen-

tir responsables, puisqu'ils constatent que, s'il y a une « erreur », le professeur interviendra pour la corriger.

Le deuxième cas de figure laisse au contraire la responsabilité scientifique aux mains des élèves. Mais bien sûr, si l'enseignant n'intervient de cette façon que lorsqu'une erreur est commise, les élèves arriveront vite à la même constatation que dans le premier cas de figure.

Le troisième cas de figure semble alors le mieux adapté. Mais si l'enseignant intervient de façon trop systématique à chaque fois que l'idée d'un élève est passée sous silence, il risque de perturber la fluidité du débat et de rendre sa présence dans celui-ci trop marquée : tout est donc une question d'équilibre.

Notons que, lors des échanges, tous les coups ne sont pas permis. Des arguments tels que

- « si Aïcha le dit, ça doit être vrai, vu qu'elle est la plus forte en maths »,
- « Madame nous a dit de faire comme ça »,
- « tout le monde sait ça ! »

sont bannis. Ce sont des *arguments d'autorité*. Les élèves doivent apprendre à repérer et utiliser les arguments acceptables en mathématiques, et à éviter ceux qui ne le sont pas (ce point est détaillé dans la section 8). L'enseignant a un rôle important à jouer dans cet apprentissage ; nous y revenons par la suite.

En faisant passer, dès que l'occasion se présente, la responsabilité scientifique du côté des élèves, l'enseignant leur donne l'opportunité de changer leur perception de ce que veut dire « faire des mathématiques » et leur posture en tant qu'élève.

Témoignage

8. Débattre à partir d'arguments et pas seulement d'opinions

« Dans d'autres cours, quand on fait un débat, parfois on dit tous quelque chose de différent, puis le prof dit qu'on a tous juste, c'est plus des opinions. En maths, on donne des arguments, on justifie. »
(Une élève de 2^e secondaire.)

1.3. L'enseignant comme accompagnateur du débat

Au cours d'un débat mathématique, il va de soi que les élèves ne prendront une responsabilité dans la validation des énoncés que si l'enseignant leur laisse la place pour le faire. Autrement dit, le changement de posture attendu