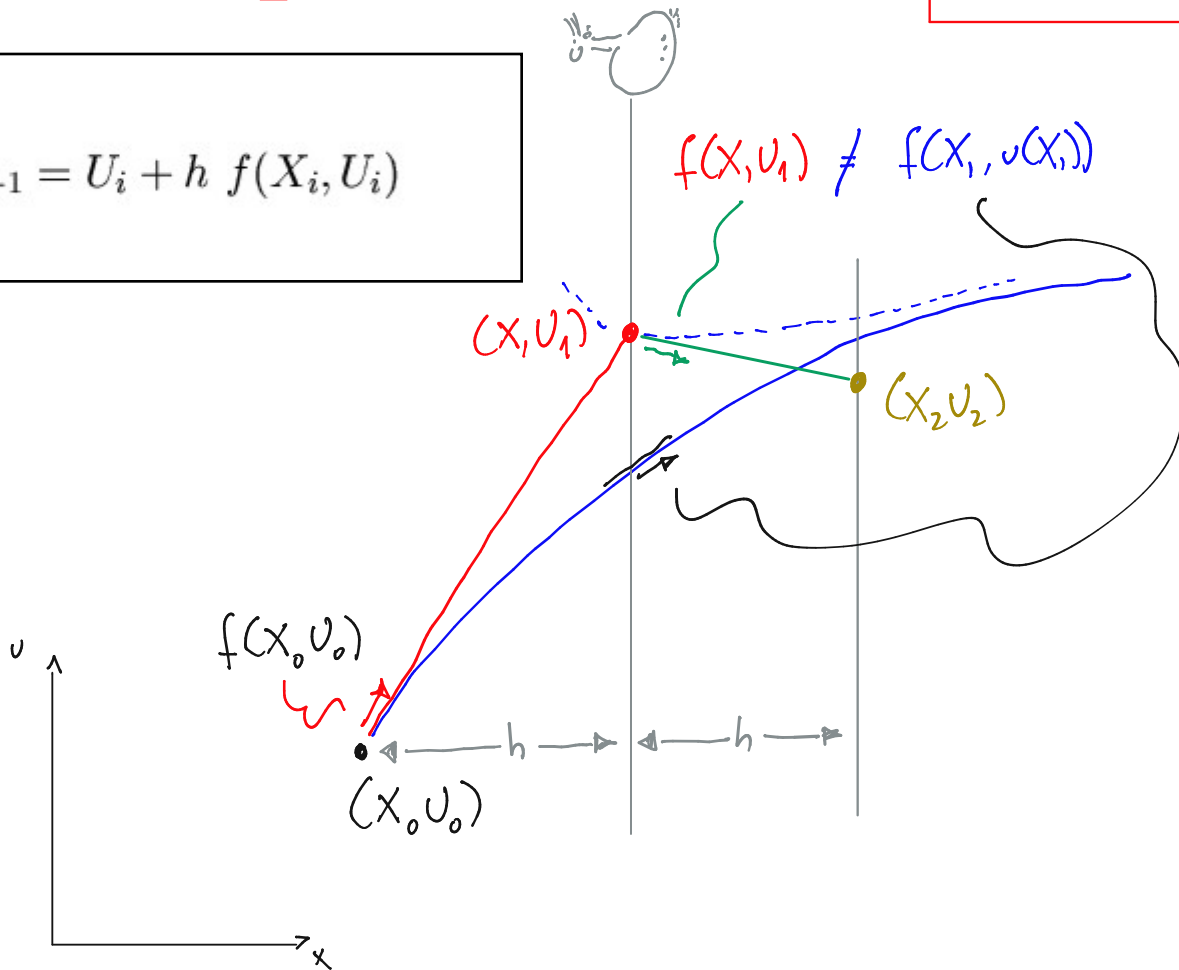


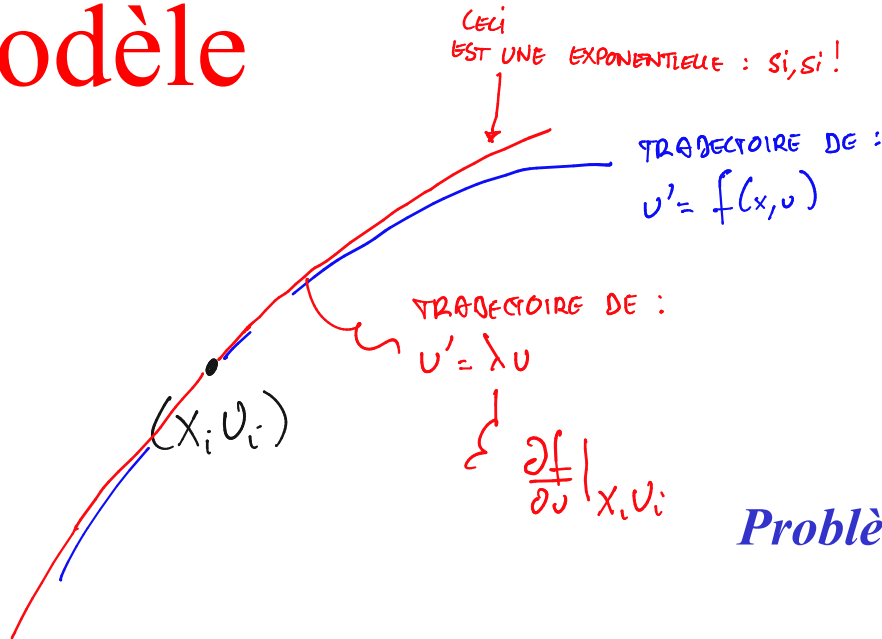
Euler explicite

$$(u(x))' = f(x, u(x))$$

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$



Un problème modèle



Nombre complexe

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u \\ \varepsilon' &= \lambda \varepsilon \end{aligned}$$

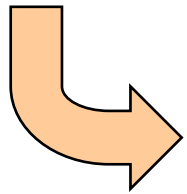
$$(u + \varepsilon)' = \lambda(u + \varepsilon)$$

FACTEUR
D'AMPLIFICATION
DE L'ERREUR

$$= |1 + h\lambda|$$

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$

Euler es-tu stable ?



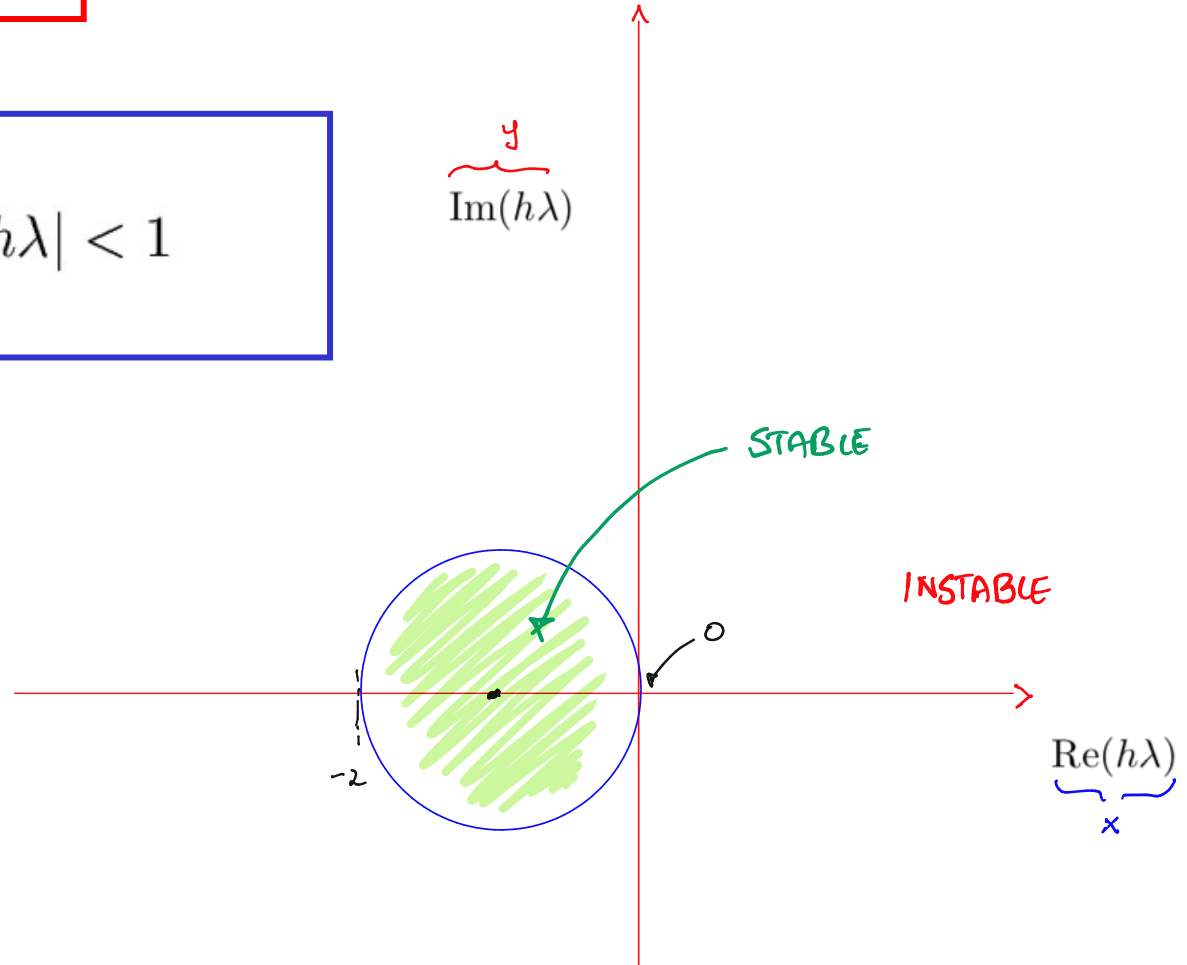
$$|1 + h\lambda| < 1$$

$$\underbrace{y}_{\text{Im}(h\lambda)}$$

$$h\lambda = x + iy$$
$$1 + h\lambda = (1 + x) + iy$$

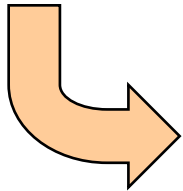
$$(1+x)^2 + y^2 = 1$$

CERCLE
DE RAYON 1
CENTRE EN (-1, 0)



Région de stabilité Euler explicite

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$

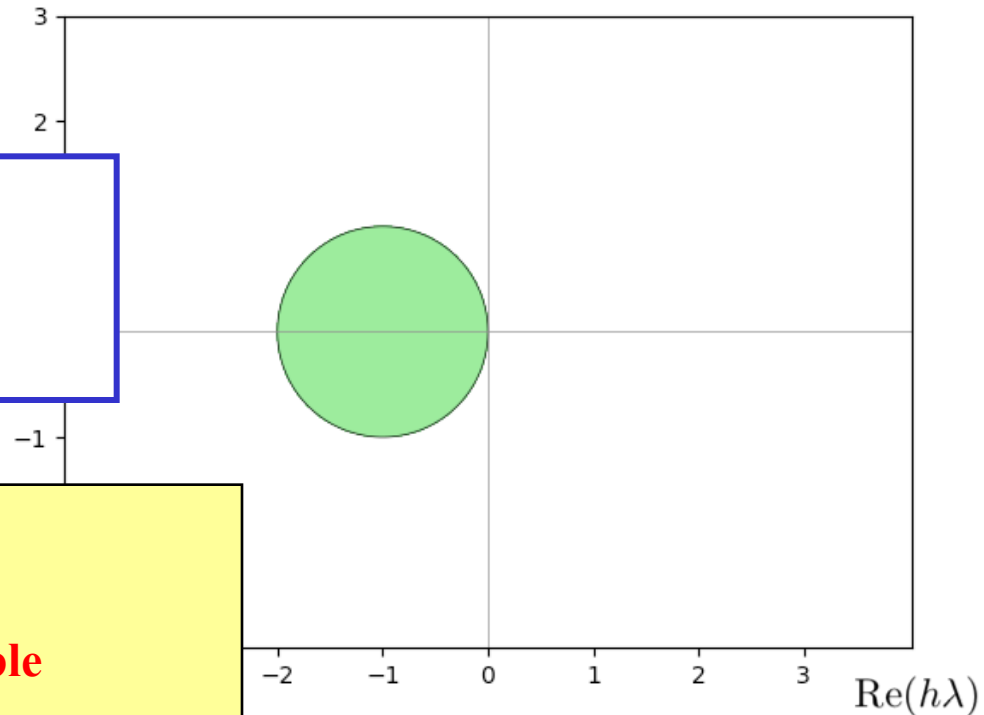


$$|1 + h\lambda| < 1$$

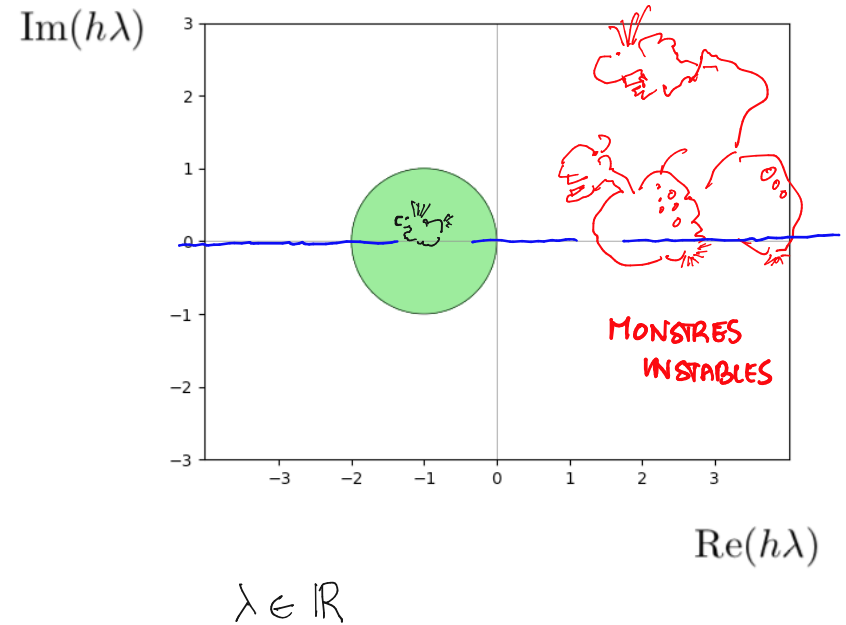
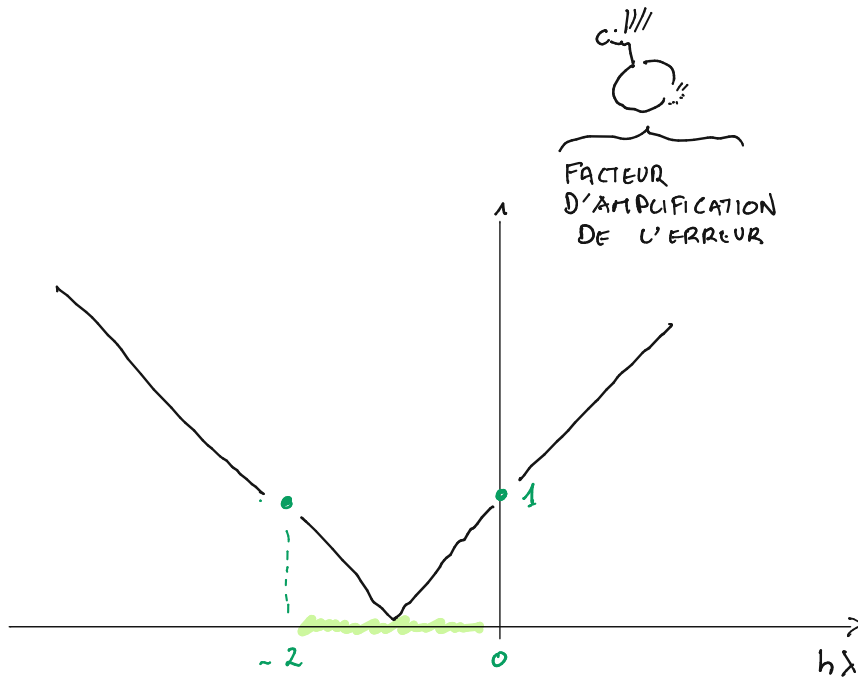
Euler explicite

Ordre de précision linéaire


Méthode conditionnellement stable



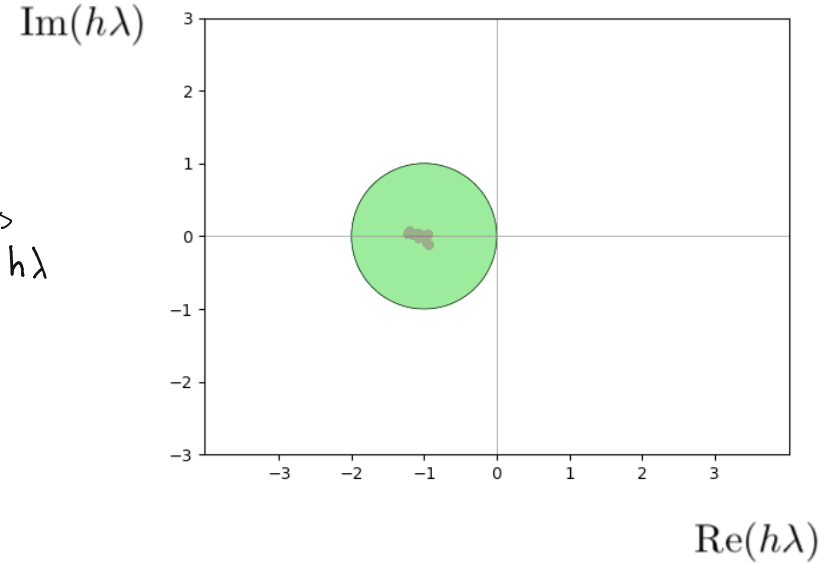
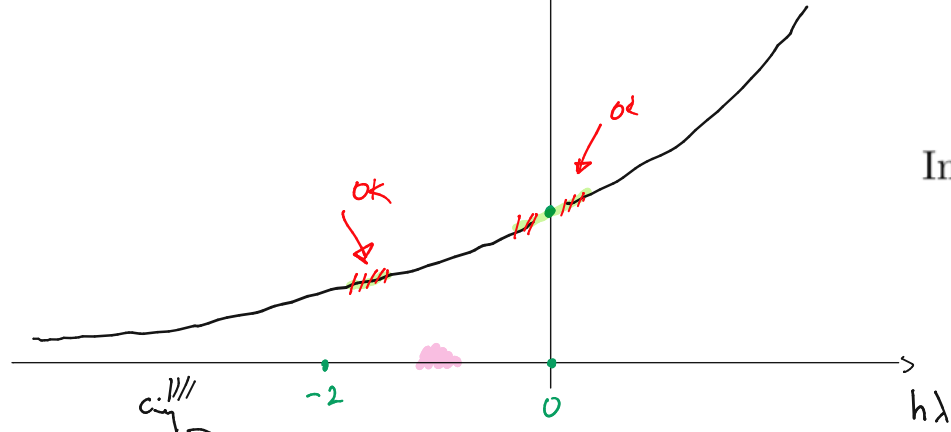
Se confiner au centre de la zone stable




$$U_{i+1} = \underbrace{(1 + h\lambda)}_{\text{FACTEUR D'AMPLIFICATION DE L'ERREUR}} U_i$$


 FACTEUR
 D'AMPLIFICATION
 DE L'ERREUR

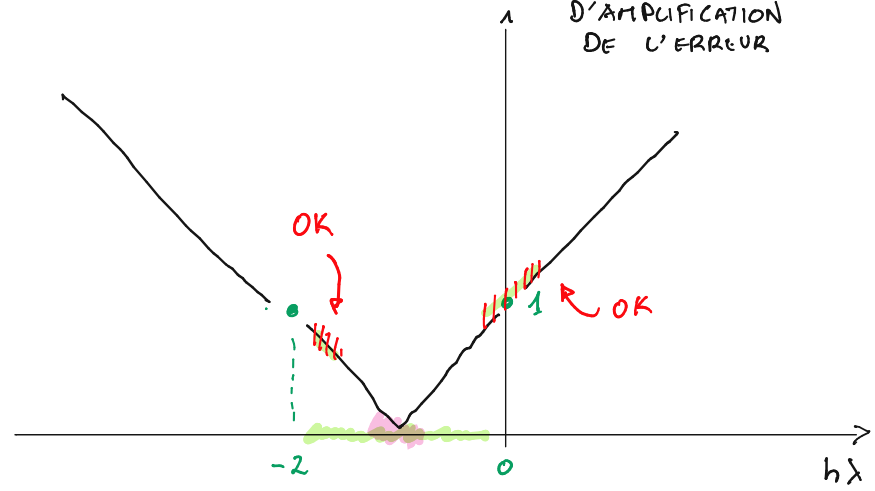
Etre le plus loin possible des zombies...






$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$


 FACTEUR
 D'AMPLIFICATION
 DE L'ERREUR



$$U_{i+1} = U_i \exp(h\lambda)$$


Région de stabilité Taylor

$$U_{i+1} = U_i + h F_i + \frac{h^2}{2} F_i' + \frac{h^3}{6} F_i'' + \frac{h^4}{24} F_i'''$$

$$v' = \lambda v$$

$$\hat{f}(x, v(x)) : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{R}$$

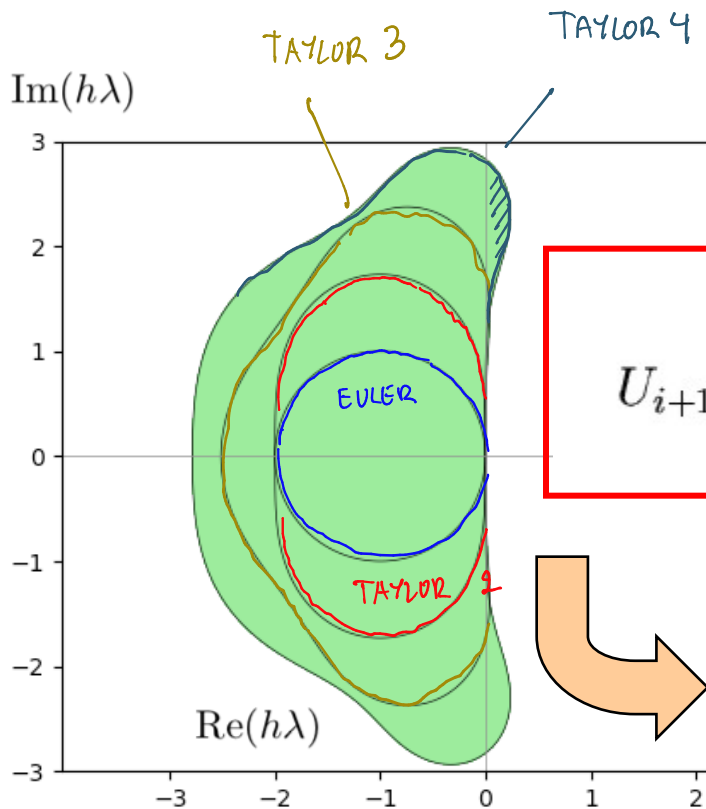
$\lambda v(x)$

$$\begin{aligned}\hat{f}' &= \lambda v' = \lambda \lambda v = \lambda^2 v \\ \hat{f}'' &= \lambda^2 v' = \lambda^2 \lambda v = \lambda^3 v \\ \hat{f}''' &= \lambda^3 v' = \lambda^3 \lambda v = \lambda^4 v\end{aligned}$$

$$U_{i+1} = U_i \left(1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2} + \frac{h^3 \lambda^3}{6} + \dots \right)$$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n \lambda^n}{n!} \right| < 1$$

Région de stabilité Méthodes de Taylor



$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n\lambda^n}{n!} \right) U_i$$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n\lambda^n}{n!} \right| < 1$$

Taylor n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Mise en œuvre fastidieuse si n élevé

Conditionnellement stables

Comment obtenir un tel graphe ?

Les couleurs ont du sens !

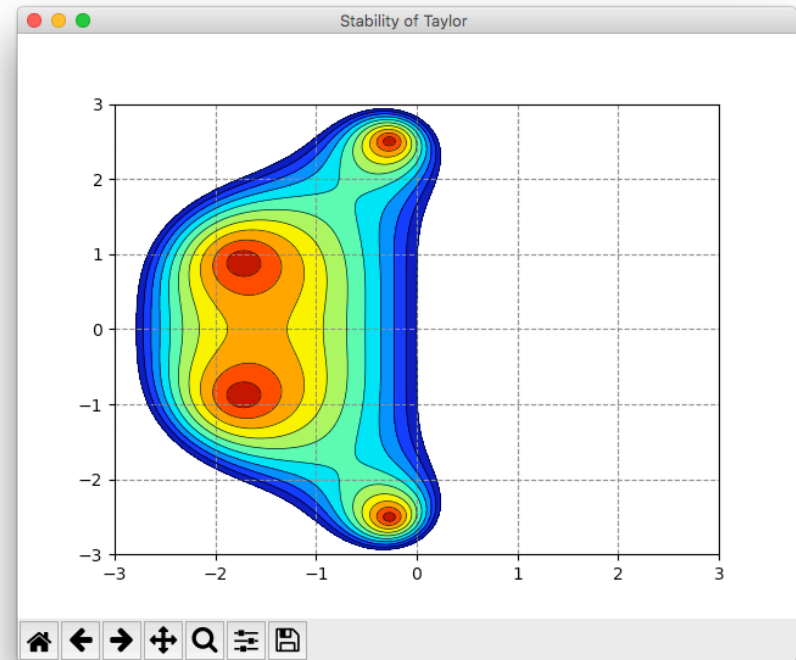
Bleu : pas d'amplification !

Rouge : **amortissement** !

Cela concernera l'erreur mais aussi la solution exacte.

Une méthode numérique TROP stable n'a aucun intérêt, puisqu'elle gomme les erreurs mais aussi la solution !

C'est à la frontière que le comportement est optimal.



```
x,y = meshgrid(linspace(-3,3,1000),linspace(-3,3,1000))
z = x + 1j*y

gain = abs(1 + z + z*z/2 + z**3/6 + z**4/24)
plt.contourf(x,y,gain,arange(0,1.1,0.1),cmap=plt.cm.jet_r)
```

Euler explicite revisitée

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx = \int_{X_i}^{X_{i+1}} u'(x) dx$$

$[u]_{X_i}^{X_{i+1}} = U_{i+1} - U_i$

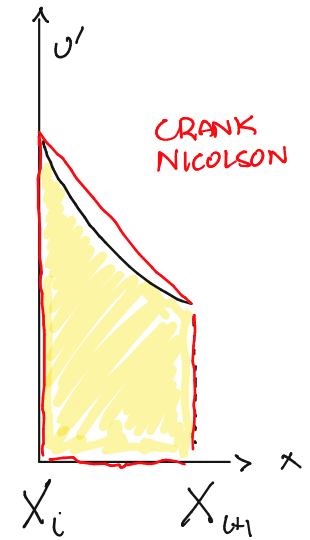
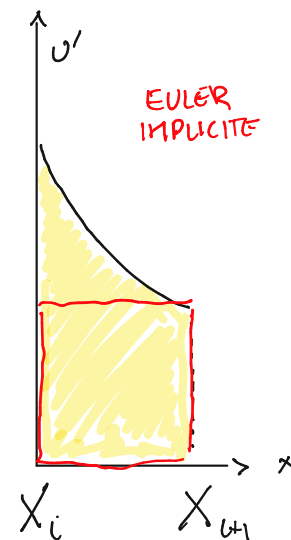
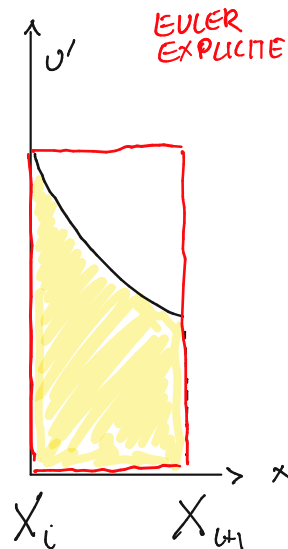
IS	IS	IS
$h F_i$	$h F_{i+1}$	$h \left(\frac{F_i + F_{i+1}}{2} \right)$

ERREUR GLOBALE $\mathcal{O}(h)$

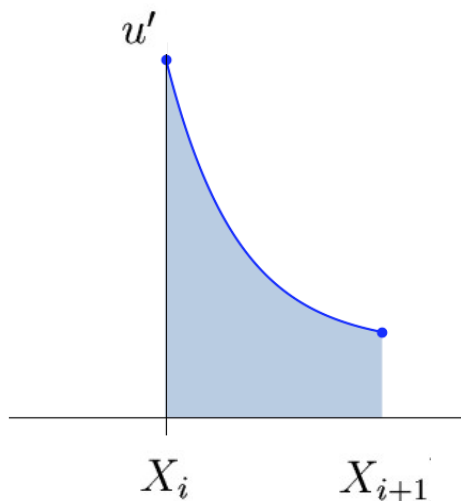
ERREUR LOCALE $\mathcal{O}(h^2)$

$\mathcal{O}(h)$ $\mathcal{O}(h^2)$

$\mathcal{O}(h^2)$ $\mathcal{O}(h^3)$



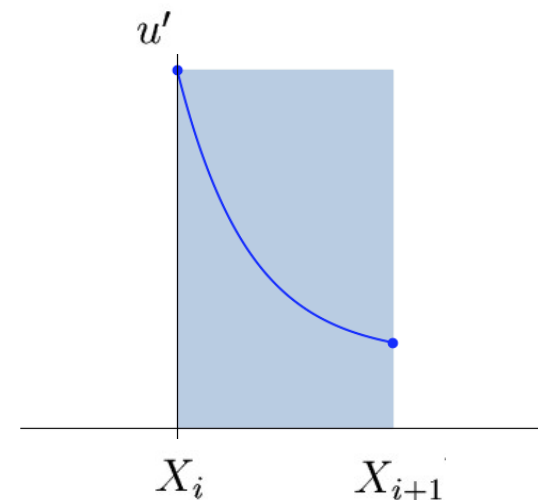
Euler explicite revisitée...



$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx = u(X_{i+1}) - u(X_i)$$

En approximant l'intégrale par un rectangle,

$$h f(X_i, U_i) \approx U_{i+1} - U_i$$

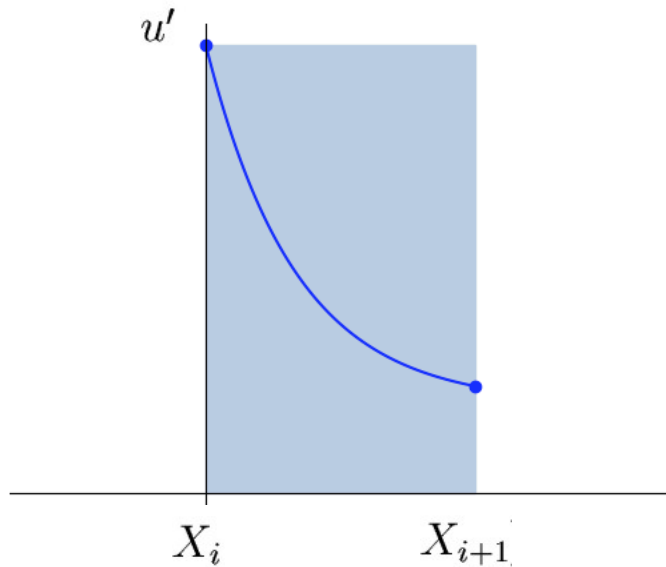


Idée

Il existe d'autres manières
d'estimer cette intégrale !

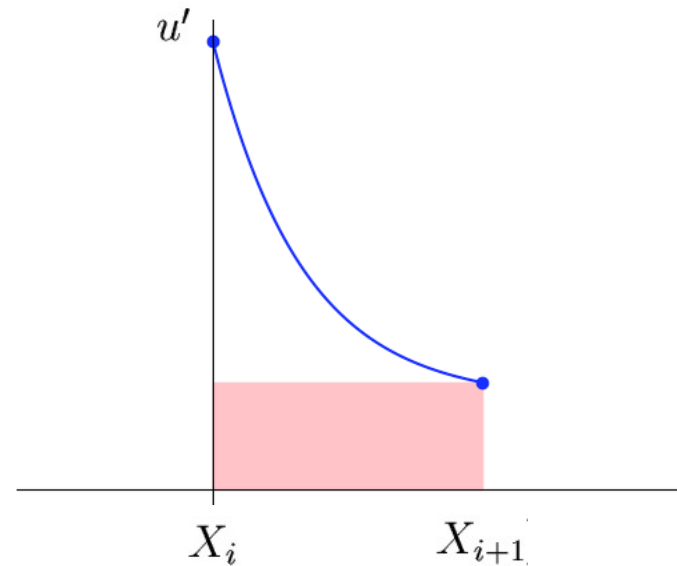
Euler implicite

$$U_{i+1} - U_i = h\lambda U_{i+1}$$



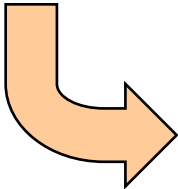
$$U_{i+1} - U_i = h\lambda U_i$$

Euler explicite



$$U_{i+1} (1 - h\lambda) = U_i$$

Région de stabilité Euler implicite

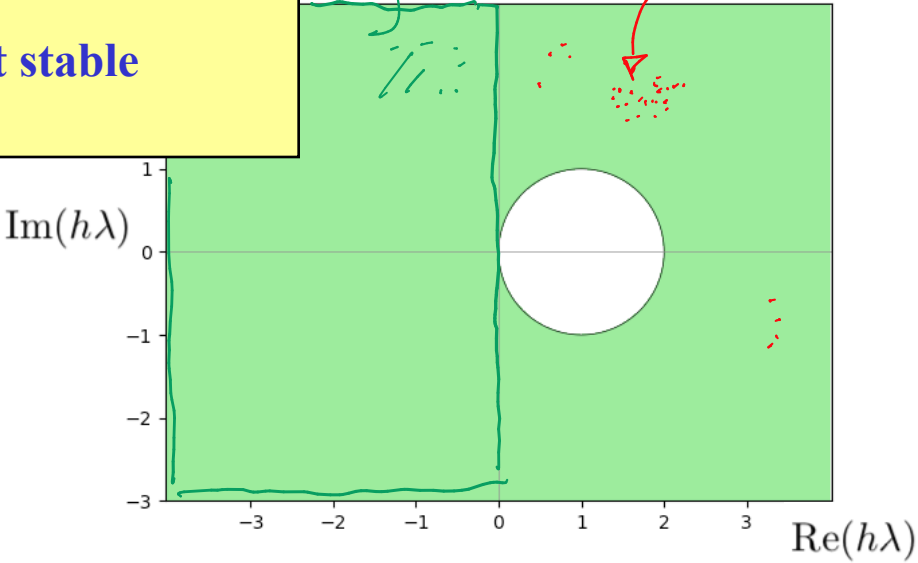


$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1$$

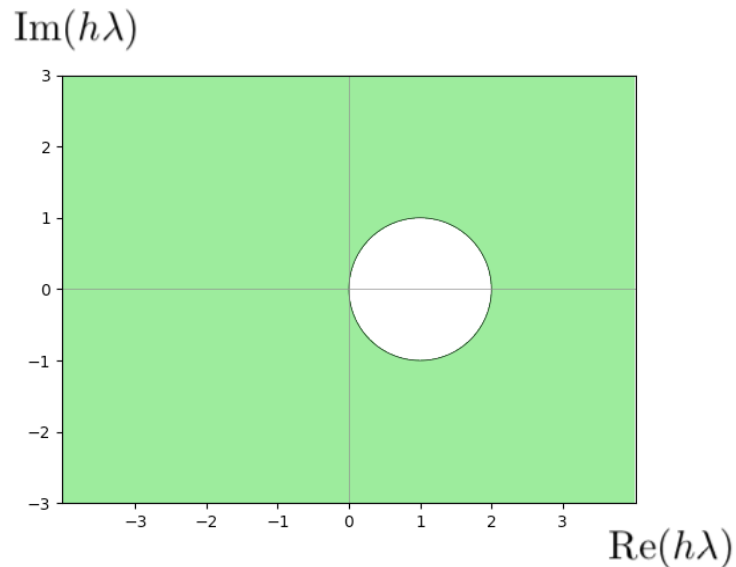
Euler implicite
Ordre de précision linéaire
Méthode inconditionnellement stable

LA METHODE EST TOUJOURS STABLE POUR DES EQU. STABLES

NO!!
C'EST TRAVAILER CA :-)



La douce illusion de l'inconditionnellement stable...



Exemple :

$$u'(x) = \sin(u(x))$$

$$U_{i+1} = U_i + h \sin U_{i+1}$$

Difficile, difficile, très difficile !

Euler implicite

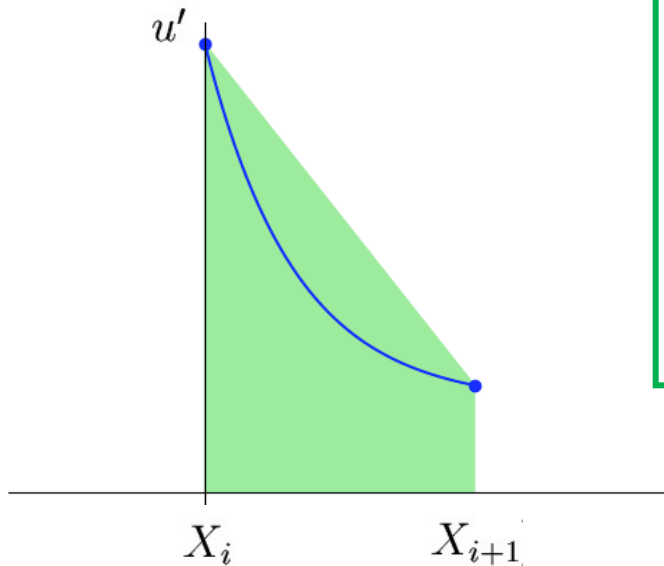
Ordre de précision linéaire

Equation à résoudre à chaque pas de temps

(équation non linéaire, si f non linéaire !)

Inconditionnellement stable

Méthode de Crank-Nicolson



$$U_{i+1} - U_i = h\lambda \left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)$$

Crank-Nicolson (trapèzes)

Ordre de précision quadratique

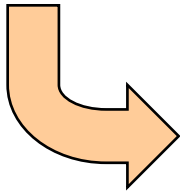
Equation à résoudre à chaque pas de temps

(équation non linéaire, si f non linéaire !)

Inconditionnellement stable

Stabilité et précision

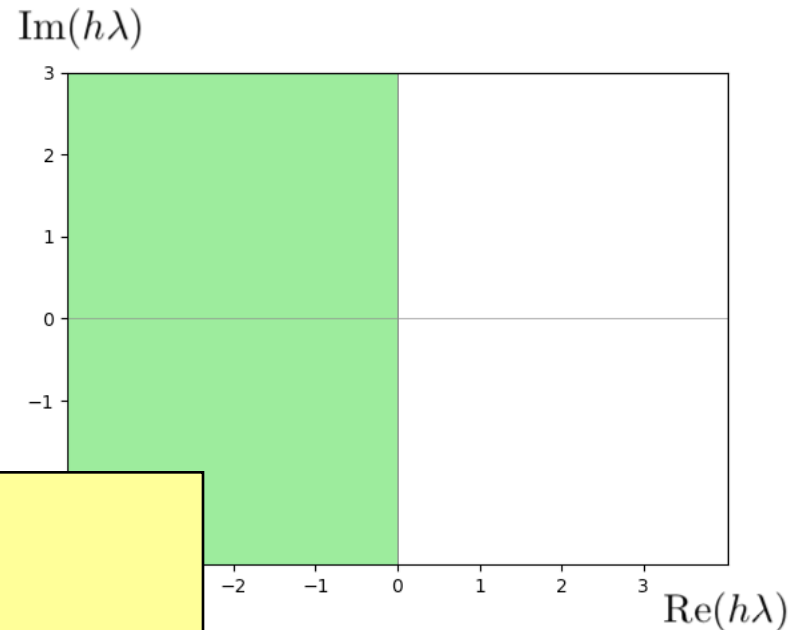
$$U_{i+1} \left(1 - h\lambda/2 \right) = U_i \left(1 + h\lambda/2 \right)$$



$$\left| \frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2} \right| < 1$$



$$\Re(h\lambda) < 0$$



Crank-Nicolson (trapèzes)

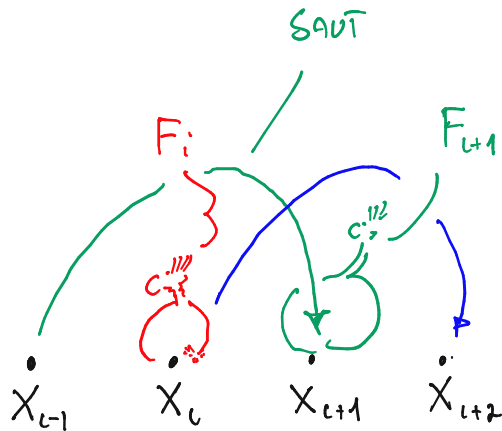
Ordre de précision quadratique

Equation à résoudre à chaque pas de temps

(**équation non linéaire**, si f non linéaire !)

Inconditionnellement stable

Leapfrog Method



$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i)$$

Méthode du Saute-Mouton

Méthode à pas liés

Comment démarrer ?

Ordre de précision ?

Stabilité ?

$$u'(X_i) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

Il s'agit d'une méthode à pas liés car pour calculer U_{i+1} , il est nécessaire de connaître U_i et U_{i-1} .

Comment démarrer ?

*Cette méthode peut être utilisée seulement lorsqu'on possède U_0 et U_1 .
Il n'est donc pas possible de commencer directement le calcul.*

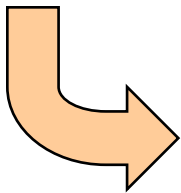
1 pas d'une méthode à pas simple

Euler explicite ou implicite

Crank-Nicolson

Méthodes de Taylor d'ordre élevé

Méthodes de Gear : on va y arriver !



Et puis autant de pas de la méthode à pas double

Leapfrog

Méthodes de Adams-Bashfort-Moulton : on va y arriver !

Précision ?

$$F_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

$U_i' = U_i - h U_i' + \frac{h^2}{2} U_i'' - \frac{h^3}{6} U_i'''$

$U_i' = U_i + h U_i' + \frac{h^2}{2} U_i'' + \frac{h^3}{6} U_i'''$

ERREUR LOCALE $\mathcal{O}(h^3)$

ERREUR GLOBALE $\mathcal{O}(h^2)$

$$U_i' + \frac{h^2}{6} U_i'''$$

$\mathcal{O}(h^2)$

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2h (F_i + \mathcal{O}(h^2))$$
$$= U_{i-1} + 2h F_i + \mathcal{O}(h^3)$$

Précision ?

$$u'(X_i) = f(X_i, U_i)$$



En approximant $u'(X_i)$ par la différence centrée d'ordre deux

$$\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = f(X_i, U_i)$$

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

Méthode d'ordre deux


On gagne un ordre de précision en utilisant une différence centrée pour estimer la dérivée, contrairement aux méthodes d'Euler.

Les trapèzes sont une intégration centrée !

Leapfrog est une dérivation centrée !

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2h\lambda U_i$$

SUPPOSONS

$$U_{i+1} = a U_i$$


$$U_i = a^i U_0$$

$$a^{i+1} U_0 = a^{i-1} U_0 + 2h\lambda a^i U_0$$

$$a^2 = 1 + 2h\lambda a$$

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

POLYNOME
DU
SECOND
DEGRE :-)

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 - 1}$$

Stabilité ?

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

$$U_{i+1} = \underbrace{[\text{diagram}]}_{\text{FACTEUR D'AMPLIFICATION}} U_i$$

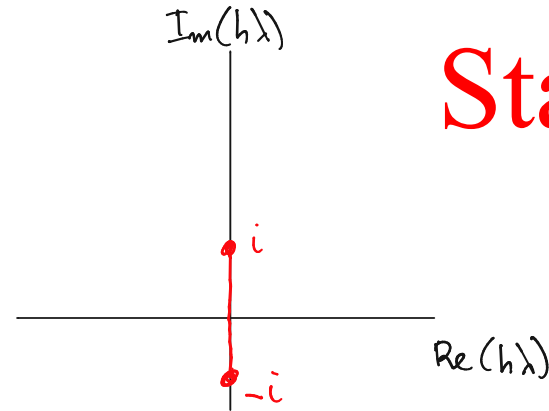
FACTEUR
D'AMPLIFICATION

$$a^2 = 1 + 2h\lambda a$$

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

POLYNOME
DU
SECOND
DEGRE :-)

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 - 1}$$



Stabilité ?

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

*Egalité obtenue pour le segment de $-i$ à i
Dans cette zone, pas d'accroissement ou
d'amortissement des perturbations...*

*a = facteur
d'amplification de
l'erreur initiale
à chaque itération*



$$U_i = a^i U_0$$

*Changement de variable pour
l'analyse des schémas à pas liés*

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1} U_0 - a^{i-1} U_0$$

Stabilité ?

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

*Problème modèle correspondant à la
linéarisation en un instant*

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1} U_0 - a^{i-1} U_0$$



En simplifiant par $a^{i-1} U_0$,

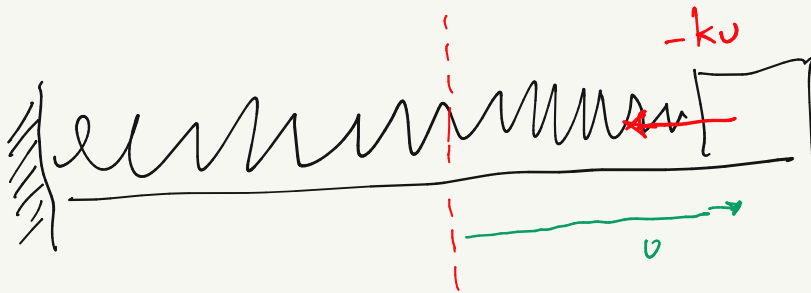
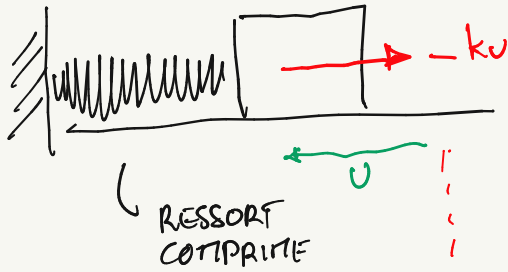
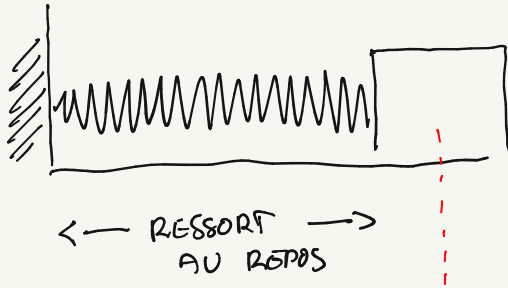
$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}$$

Région stable

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

*Egalité obtenue pour le segment de $-i$ à i
Dans cette zone, pas d'accroissement ou
d'amortissement des perturbations...*



$$m u''(t) = -k u(t)$$

$$u''(t) = -\frac{k}{m} u(t)$$

$$\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$u(t) = \exp(\pm i\omega t)$$

$$\cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t)$$

Systemes d'equations differentielles

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ \vdots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(a) = \bar{u}_1 \\ u_2(a) = \bar{u}_2 \\ \vdots \\ u_n(a) = \bar{u}_n \end{cases}$$

*Notation compacte :
les vecteurs sont en gras.*

Trouver $\mathbf{u}(x)$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)), & x \in [a, b] \\ \mathbf{u}(a) = \bar{\mathbf{u}} \end{cases}$$

C'est exactement la même histoire !

$$U_{ji} = u_j^h(X_i) \approx u_j(X_i)$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{u}^h(X_i) \approx \mathbf{u}(X_i)$$

*Notation compacte :
les vecteurs sont en gras.*

Méthode d'Euler explicite

$$U_{ji+1} = U_{ji} + hf_j(X_i, U_{1i}, \dots, U_{ni})$$

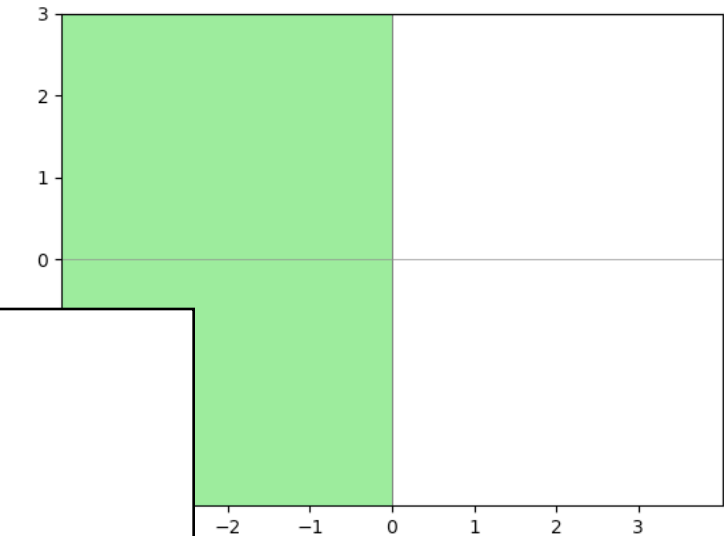
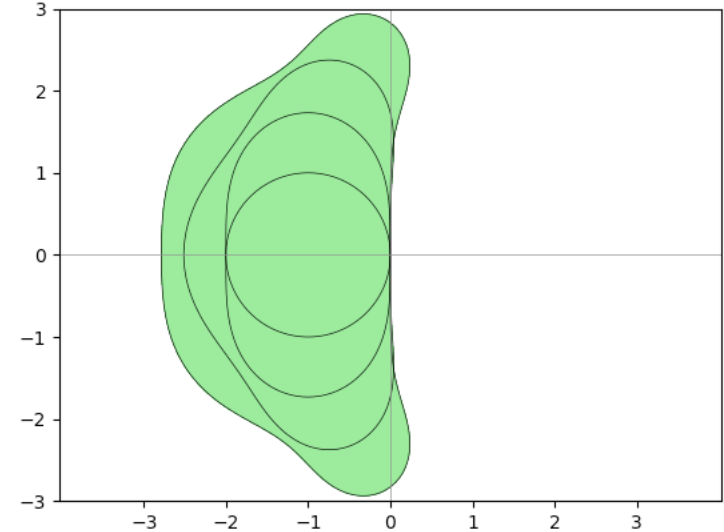
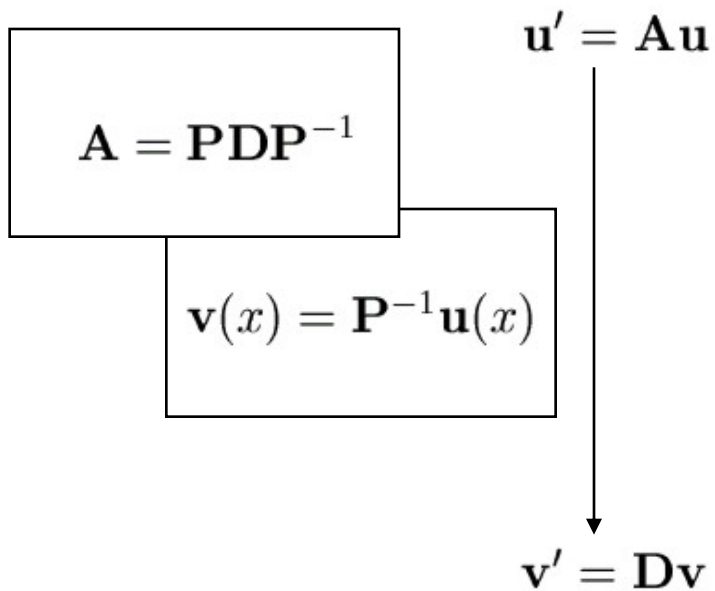
Tableau à deux indices

*On calcule la j-ème composante du vecteur
des inconnues à la i-ème abscisse temporelle*

Vecteur

*On calcule la j-ème
composante du vecteur des
inconnues.*

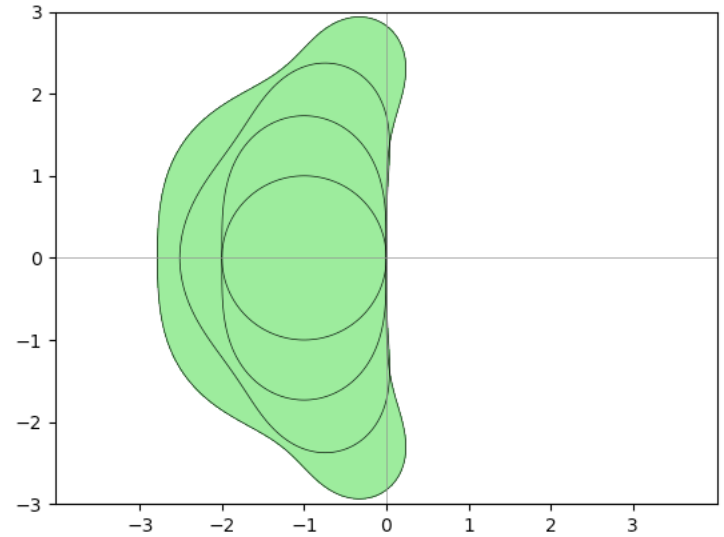
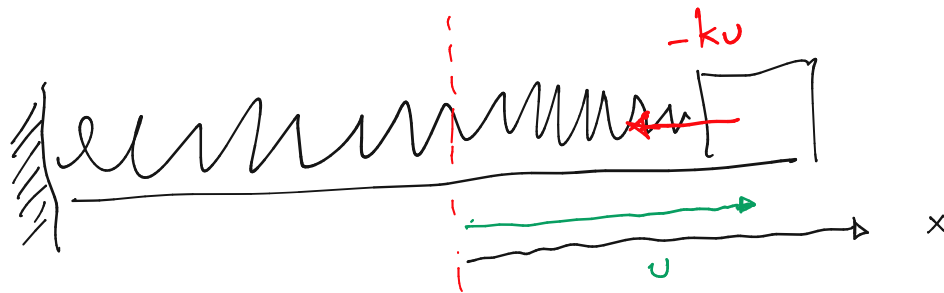
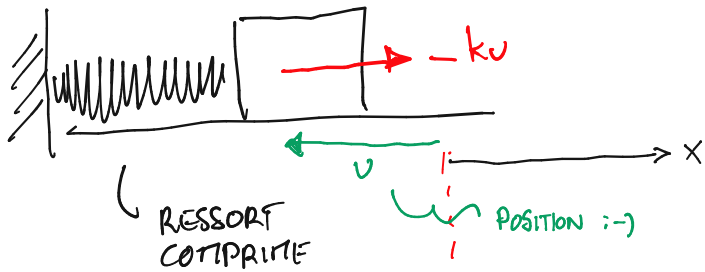
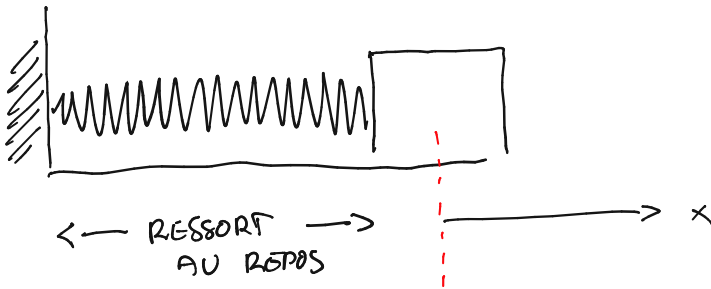
Stabilité des systèmes



Le problème différentiel initial est équivalent à n équations scalaires

$$v'_i(x) = \lambda_i v_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

Les complexes c'est utile !



$$m v''(t) = -k v(t)$$

$$v''(t) = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} v(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v(t) = A \exp(i\omega t + B)$$

$$\cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad !!!$$

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

Problème de
Cauchy...

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(X_i + h, U_i + hK_3)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

... et les méthodes
de Runge-Kutta (ode45)

Méthodes explicites de Runge-Kutta

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})\end{aligned}$$

Heun (Runge-Kutta n=2)

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1) \\K_3 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2) \\K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3)\end{aligned}$$

"le classique" (Runge-Kutta n=4)

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

Euler explicite
(Runge-Kutta n=1)

Runge-Kutta n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Facile à mettre en oeuvre

Conditionnellement stables (comme Taylor)

Méthode de Heun

Comment choisir les paramètres ?

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

Il faut la
précision
requisse...

Il faut la précision requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i) + h w_2 f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$



En effectuant un développement en série de Taylor de l'expression $f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$, autour de (X_i, U_i) ,

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i)$$



$$+ h w_2 \left(f(X_i, U_i) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta h \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^2) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 + w_2) f(X_i, U_i)$$

$$+ h^2 w_2 \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$



Identification des termes
3 relations à satisfaire
4 paramètres à choisir

Il existe plusieurs possibilités !

Les zones de stabilité de Runge-Kutta et de Taylor sont identiques...

On a construit les méthodes de Runge-Kutta en identifiant les développements en série de Taylor... En conséquence, les méthodes de Runge-Kutta et de Taylor sont **IDENTIQUES** pour un problème linéaire !

Mais, elles ne sont **PAS** identiques pour des problèmes non linéaires.

Finalement, comme l'analyse de stabilité se fait sur un problème linéaire, cette analyse fournira des résultats **IDENTIQUES**... **Vérifiez ce résultat par vous-même en reproduisant le calcul effectué pour la méthode Leapfrog :-)**

