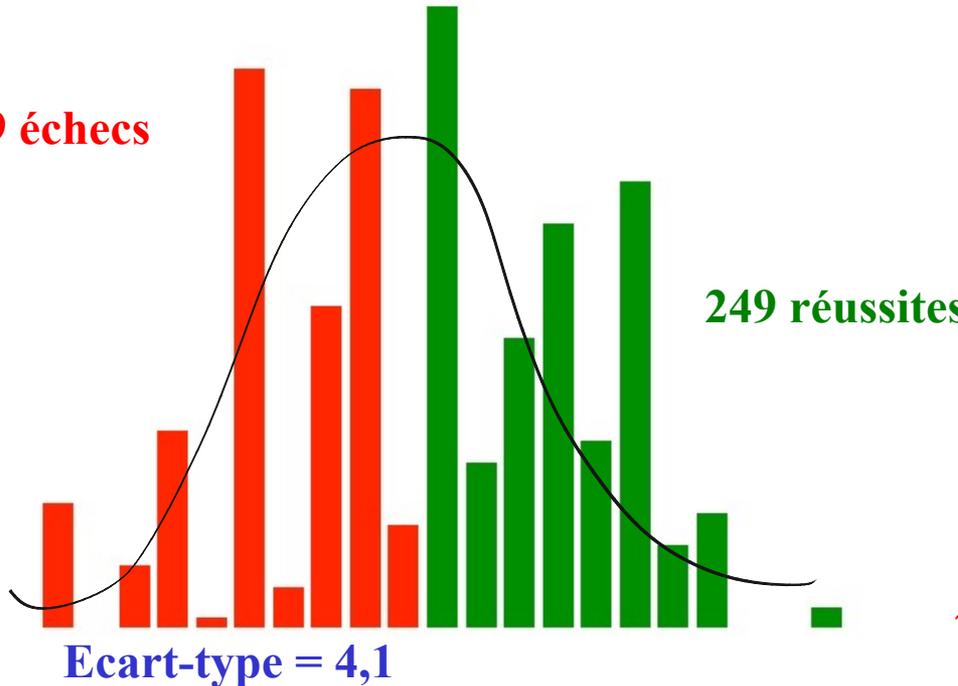


```
notes = [0,0,63,28,54,19,41,17,28,17,  
         17,7,6,16,5,10,5,11,1,1,3]
```

```
plt.bar(range(10), notes[0:10], color='r')  
plt.bar(range(10,21), notes[10:21], color='g')  
plt.xlim([-1,21]); plt.ylim([0,40]); plt.axis('off')  
mean = sum(arange(21)*notes)/sum(notes)  
std = sqrt(sum(pow(arange(21)-mean,2)*notes)/sum(notes))
```

189 échecs



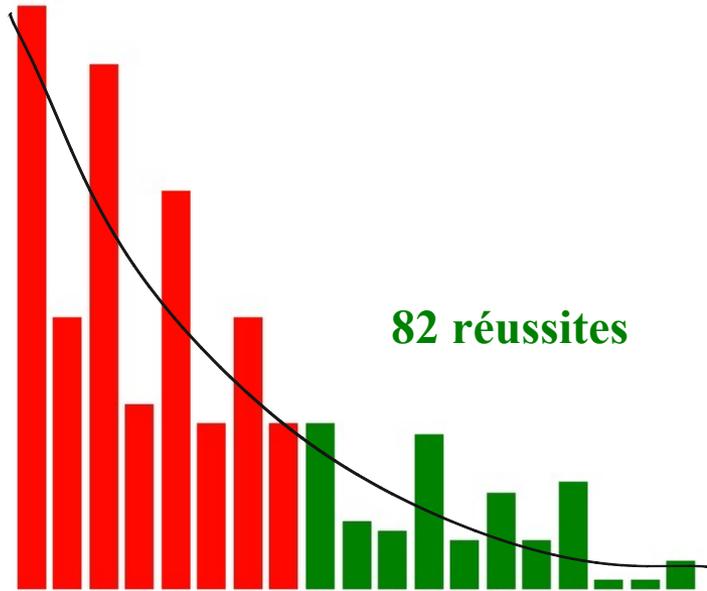
Moyenne interro 19-20 = 6,8/20  
Moyenne interro 18-19 = 10,1/20  
Moyenne interro 17-18 = 8,6/20  
Moyenne interro 16-17 = 7,6/20  
Moyenne interro 15-16 = 8,7/20  
Moyenne interro 14-15 = 6,4/20  
Moyenne interro 13-14 = 9,5/20  
Moyenne interro 12-13 = 7,6/20  
Moyenne interro 11-12 = 7,5/20  
Moyenne interro 10-11 = 8,0/20  
Moyenne interro 09-10 = 6,9/20  
Moyenne interro 08-09 = 9,4/20  
Moyenne interro 07-08 = 7,7/20  
Moyenne interro 06-07 = 7,0/20

Moyenne de l'interro = 9,6/20 :-)

```
notes = [0,0,63,28,54,19,41,17,28,17,  
         17,7,6,16,5,10,5,11,1,1,3]
```

```
plt.bar(range(10), notes[0:10], color='r')  
plt.bar(range(10,21), notes[10:21], color='g')  
plt.xlim([-1,21]); plt.ylim([0,40]); plt.axis('off')  
mean = sum(arange(21)*notes)/sum(notes)  
std = sqrt(sum(pow(arange(21)-mean,2)*notes)/sum(notes))
```

349 échecs



Ecart-type = 4,6

Moyenne interro 19-19 = 10,1/20  
Moyenne interro 17-18 = 8,6/20  
Moyenne interro 16-17 = 7,6/20  
Moyenne interro 15-16 = 8,7/20  
Moyenne interro 14-15 = 6,4/20  
Moyenne interro 13-14 = 9,5/20  
Moyenne interro 12-13 = 7,6/20  
Moyenne interro 11-12 = 7,5/20  
Moyenne interro 10-11 = 8,0/20  
Moyenne interro 09-10 = 6,9/20  
Moyenne interro 08-09 = 9,4/20  
Moyenne interro 07-08 = 7,7/20  
Moyenne interro 06-07 = 7,0/20

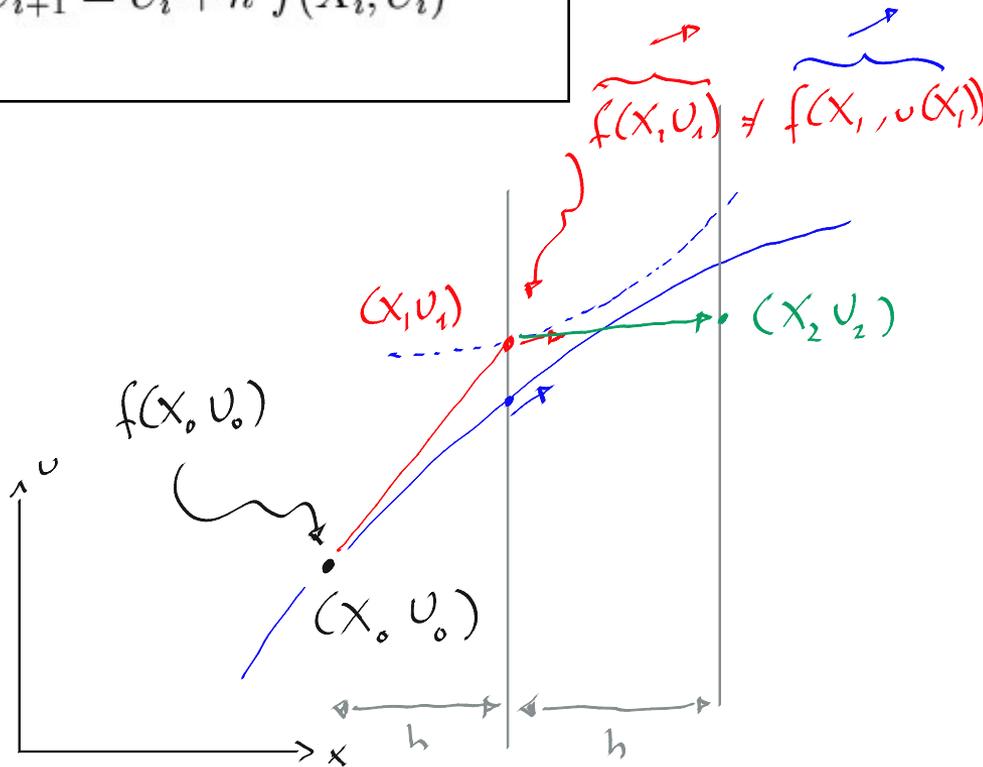
Moyenne de l'interro = 6,8/20 :-)

# Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

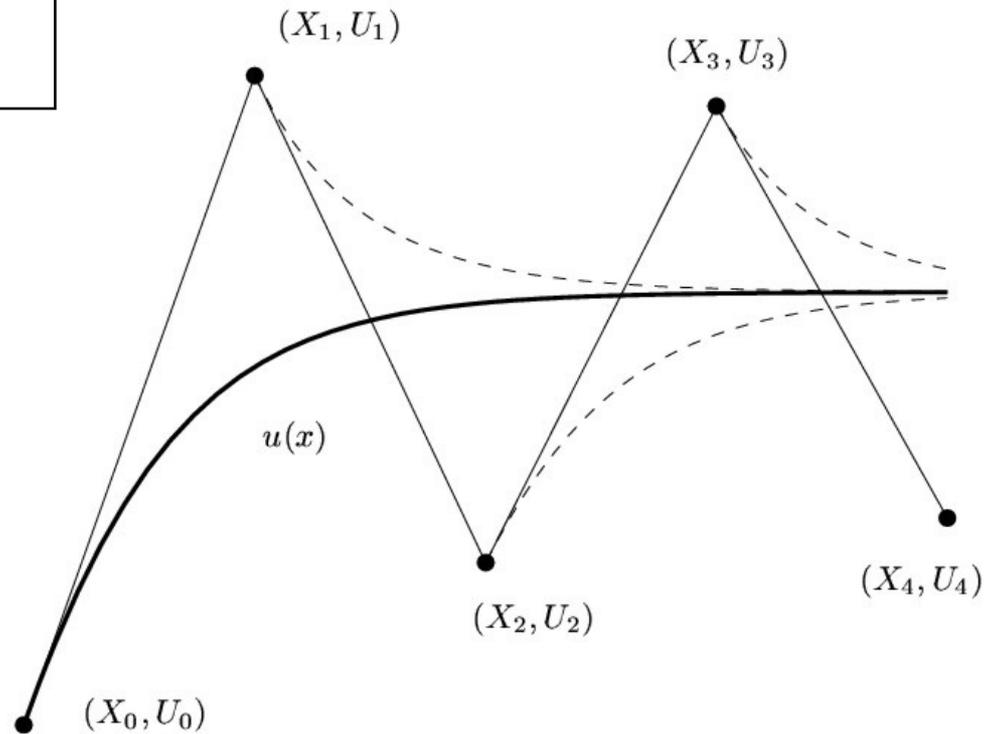
$$u'(x) = f(x, u(x))$$

↑  
CONNEX :-)



# Méthode d'Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$



# Cas général dans le plan complexe

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$

*Nombre complexe*

$\lambda \in \mathbb{C}$


$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

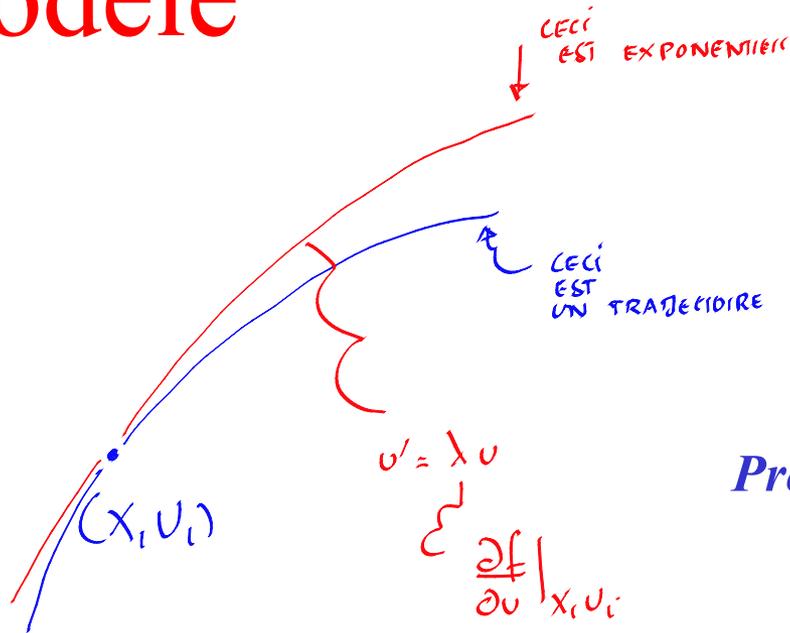
*Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant*

**Euler explicite**

**Ordre de précision linéaire**

**Méthode conditionnellement stable**

# Un problème modèle



Nombre complexe

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u \\ \varepsilon' &= \lambda \varepsilon \end{aligned}$$

$$(u + \varepsilon)' = \lambda (u + \varepsilon)$$

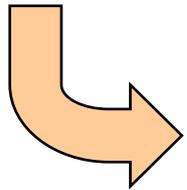
FACTEUR  
D'AMPLIFICATION

$$= (1 + h\lambda)$$

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda)U_i$$

Euler es-tu stable ?



$$|1 + h\lambda| < 1$$

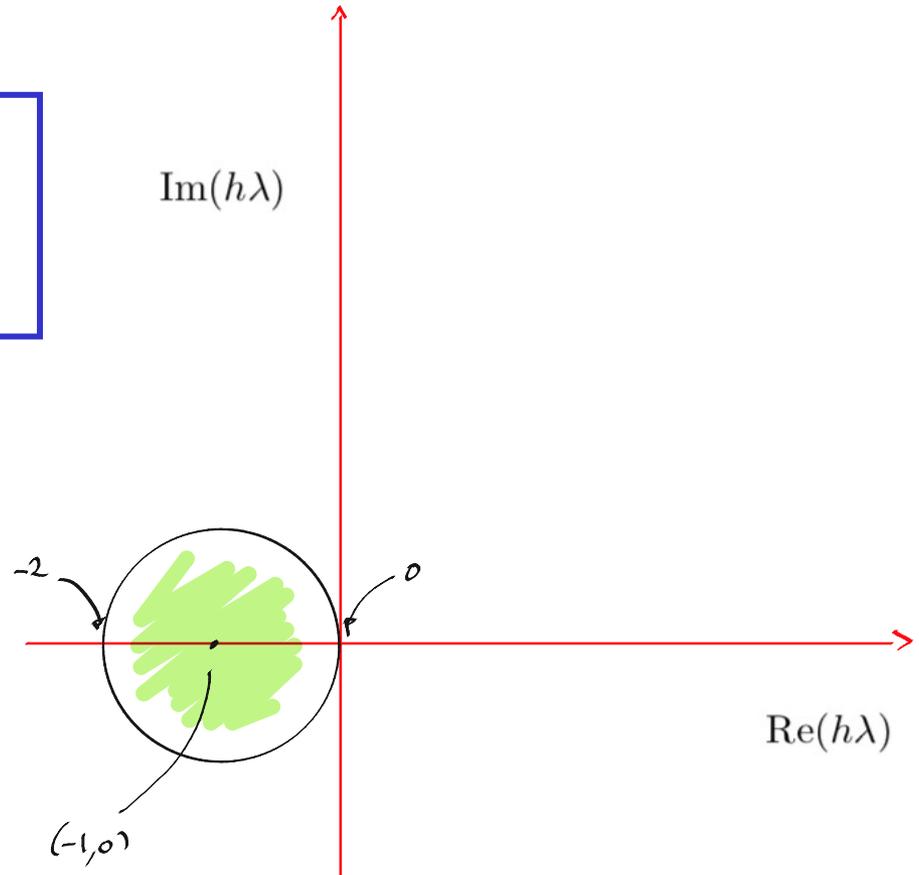
$\in \mathbb{R}$   
 $> 0$

$\in \mathbb{C}$

$$h\lambda = x + iy$$

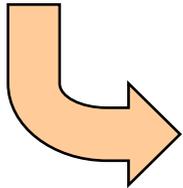
$$1 + h\lambda = (1+x) + iy$$

$$(1+x)^2 + y^2 = 1$$

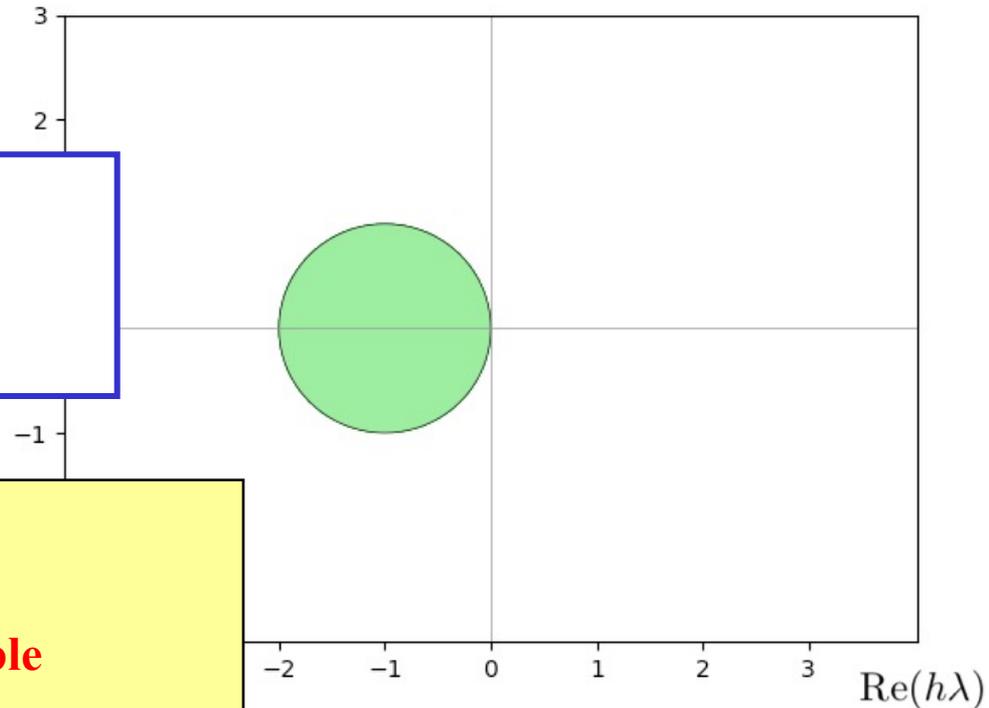


# Région de stabilité Euler explicite

$$U_{i+1} = (1 + h\lambda) U_i$$



$$|1 + h\lambda| < 1$$

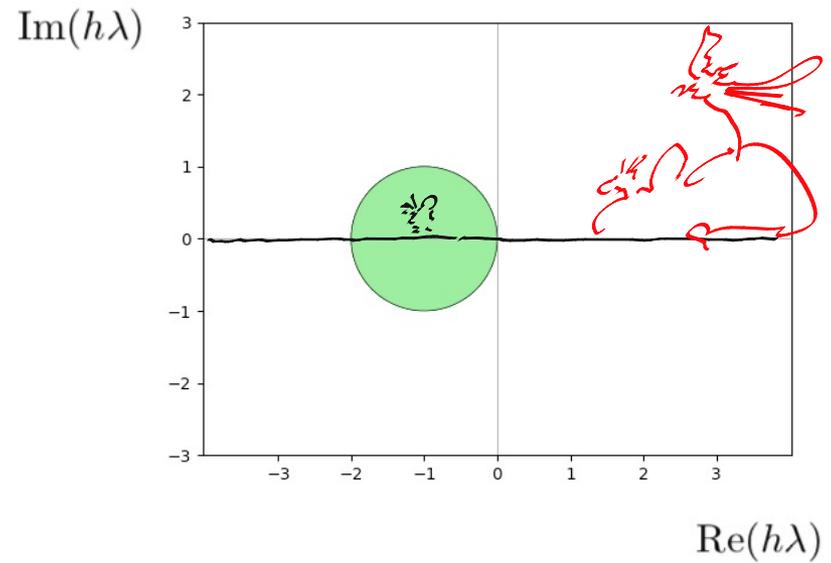
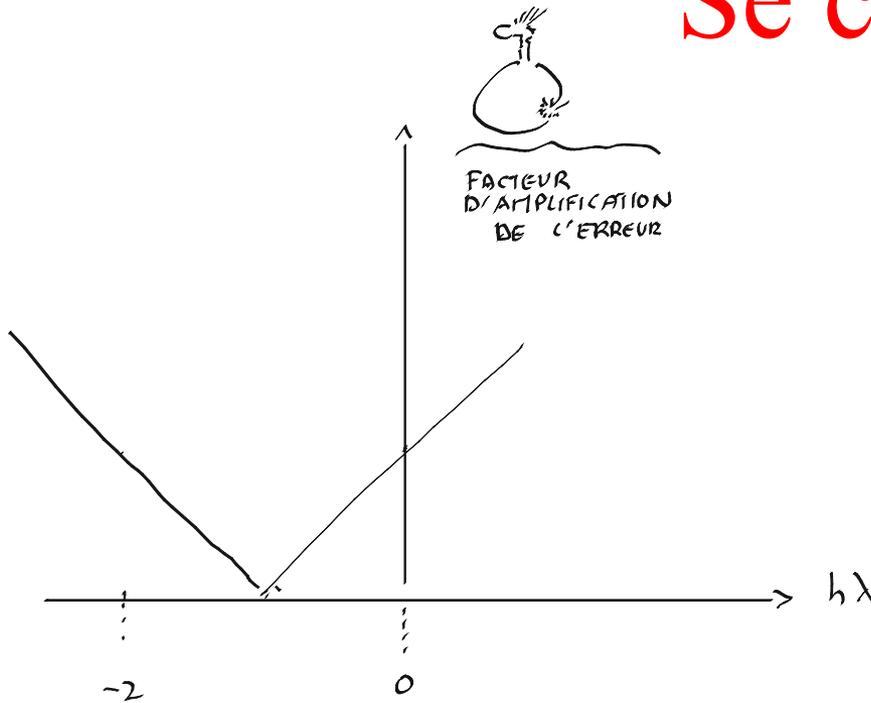


**Euler explicite**

**Ordre de précision linéaire**

**Méthode conditionnellement stable**

# Se confiner au centre de la zone stable

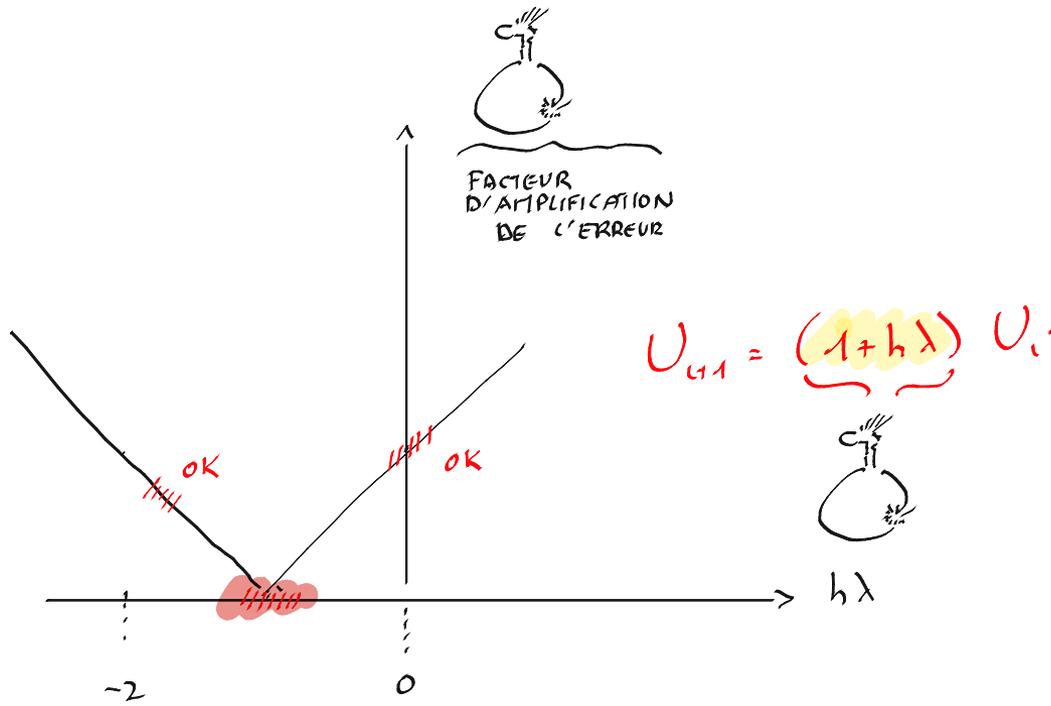
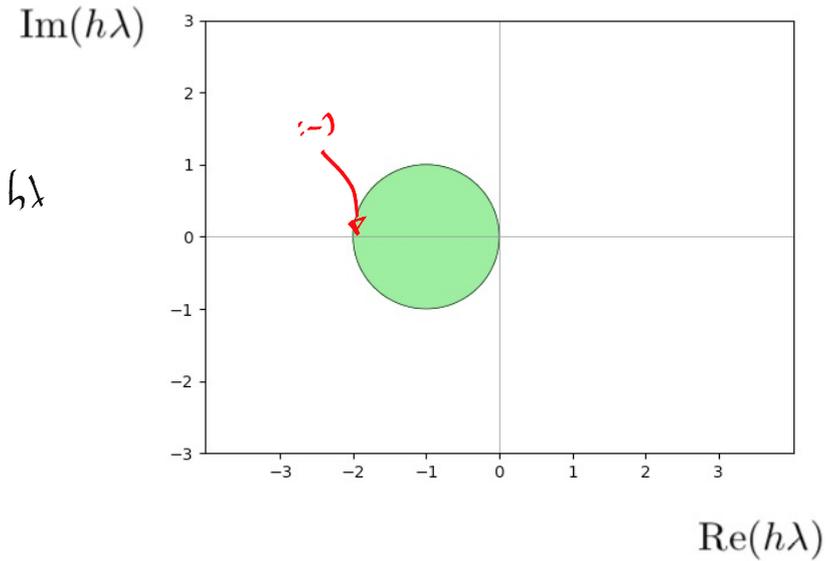
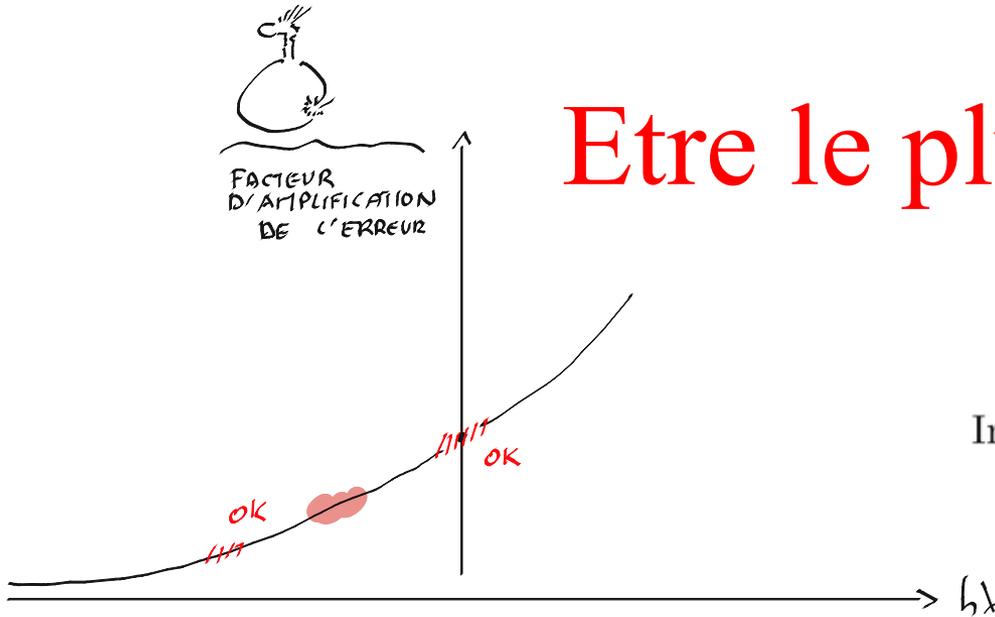


$$U_{i+1} = \underbrace{(1+h\lambda)} U_i$$



$$\begin{aligned} u' &= \lambda u \\ e' &= \lambda e \end{aligned}$$

# Etre le plus loin possible des zombies...



$U_{i+1} = \exp(h\lambda) U_i$

Detailed description: The equation  $U_{i+1} = \exp(h\lambda) U_i$  is written in red. Below the term  $\exp(h\lambda)$  is a small drawing of a zombie head.

# Région de stabilité Taylor

$$U_{i+1} = U_i + h F_i + \frac{h^2}{2} F_i' + \frac{h^3}{6} F_i'' + \frac{h^4}{24} F_i'''$$

$$v' = \lambda v$$

$$\underbrace{\hat{f}(x, v(x))}_{\lambda v(x)} : x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$\hat{f}' = \lambda v' = \lambda \lambda v = \lambda^2 v$$

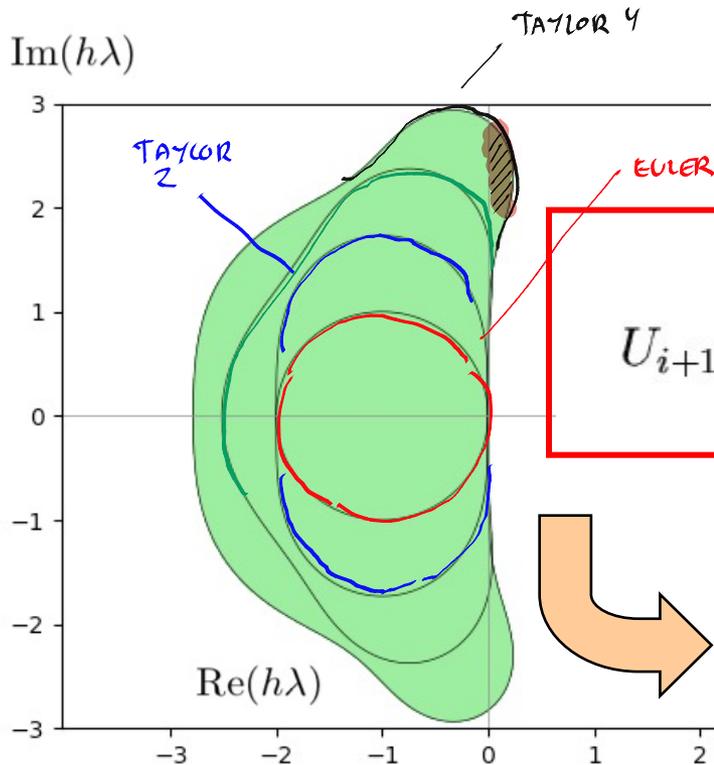
$$\hat{f}'' = \lambda^2 v' = \lambda^2 \lambda v = \lambda^3 v$$

$$\hat{f}''' = \lambda^3 v' = \lambda^3 \lambda v = \lambda^4 v$$

$$U_{i+1} = U_i \left( 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2} \lambda^2 + \frac{h^3}{6} \lambda^3 \dots \right)$$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n \lambda^n}{n!} \right| < 1$$

# Région de stabilité Méthodes de Taylor



$$U_{i+1} = \left( 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n\lambda^n}{n!} \right) U_i$$

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{h^n\lambda^n}{n!} \right| < 1$$

## Taylor n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Mise en œuvre fastidieuse si n élevé

**Conditionnellement stables**

# Comment obtenir un tel graphe ?

Les couleurs ont du sens !

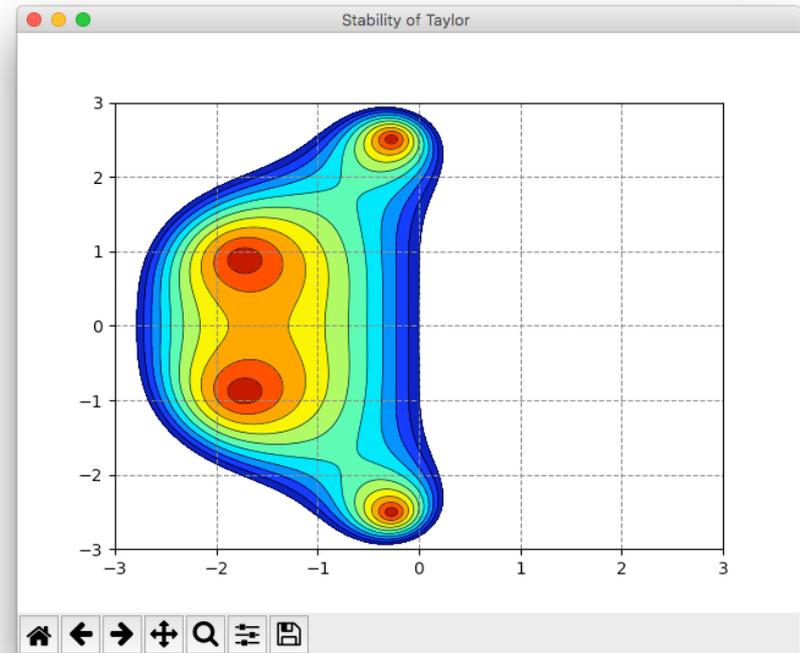
Bleu : pas d'amplification !

Rouge : **amortissement** !

Cela concernera l'erreur mais aussi la solution exacte.

Une méthode numérique TROP stable n'a aucun intérêt, puisqu'elle gomme les erreurs mais aussi la solution !

C'est à la frontière que le comportement est optimal.



```
x,y = meshgrid(linspace(-3,3,1000),linspace(-3,3,1000))
z = x + 1j*y

gain = abs(1 + z + z*z/2 + z**3/6 + z**4/24)
plt.contourf(x,y,gain,arange(0,1.1,0.1),cmap=plt.cm.jet_r)
```

# Euler explicite revisitée

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx = u(X_{i+1}) - u(X_i)$$



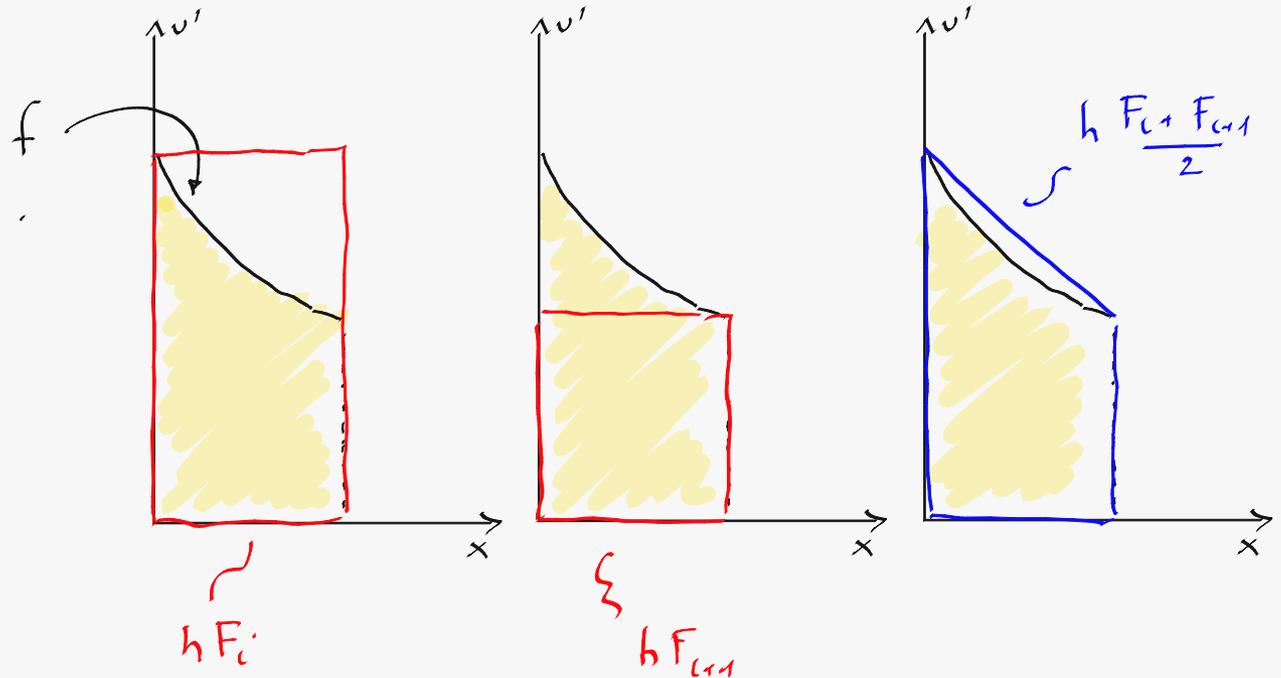
En approximant l'intégrale par un rectangle,

$$h f(X_i, U_i) \approx U_{i+1} - U_i$$

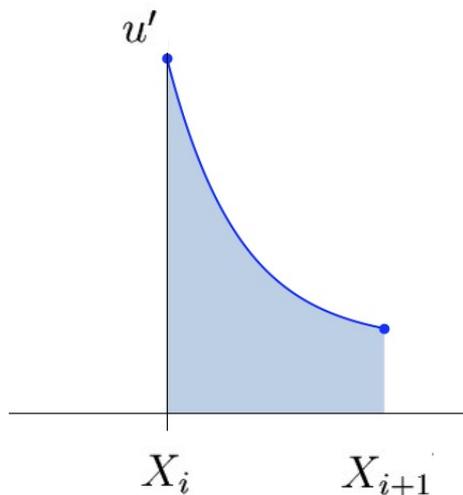
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{[u]_{x_i}^{x_{i+1}} = U_{i+1} - U_i}$

- $\approx h F_i$
- $\approx h F_{i+1}$
- $\approx h \left( \frac{F_i + F_{i+1}}{2} \right)$



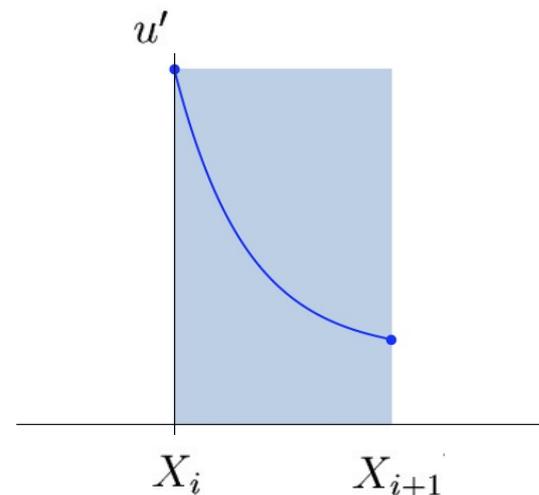
# Euler explicite revisitée...



$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx = u(X_{i+1}) - u(X_i)$$

En approximant l'intégrale par un rectangle,

$$h f(X_i, U_i) \approx U_{i+1} - U_i$$

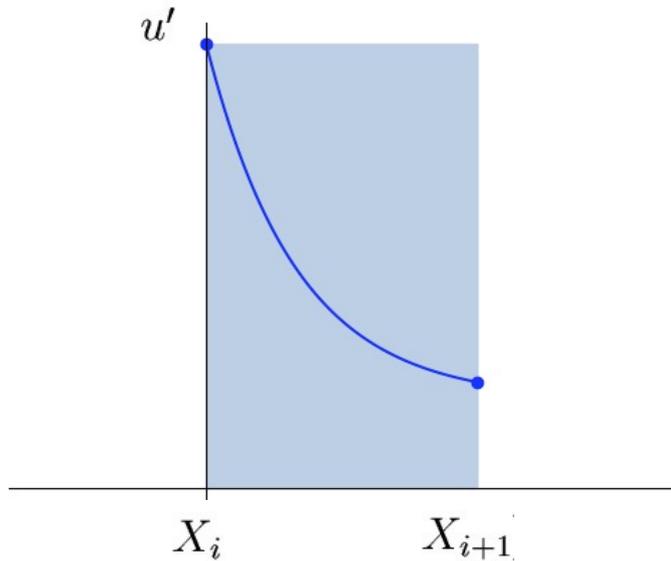


## Idée

Il existe d'autres manières  
d'estimer cette intégrale !

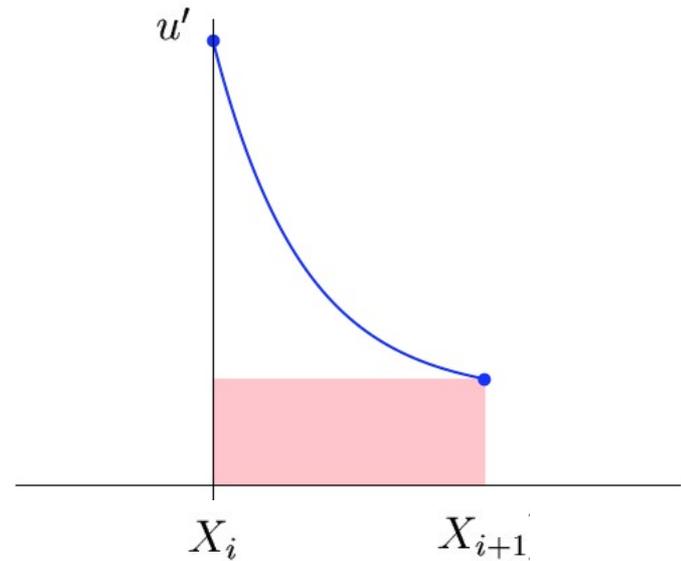
# Euler implicite

$$U_{i+1} - U_i = h\lambda U_{i+1}$$



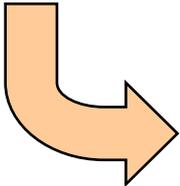
$$U_{i+1} - U_i = h\lambda U_i$$

# Euler explicite



$$U_{i+1} (1 - h\lambda) = U_i$$

# Région de stabilité Euler implicite



$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1$$

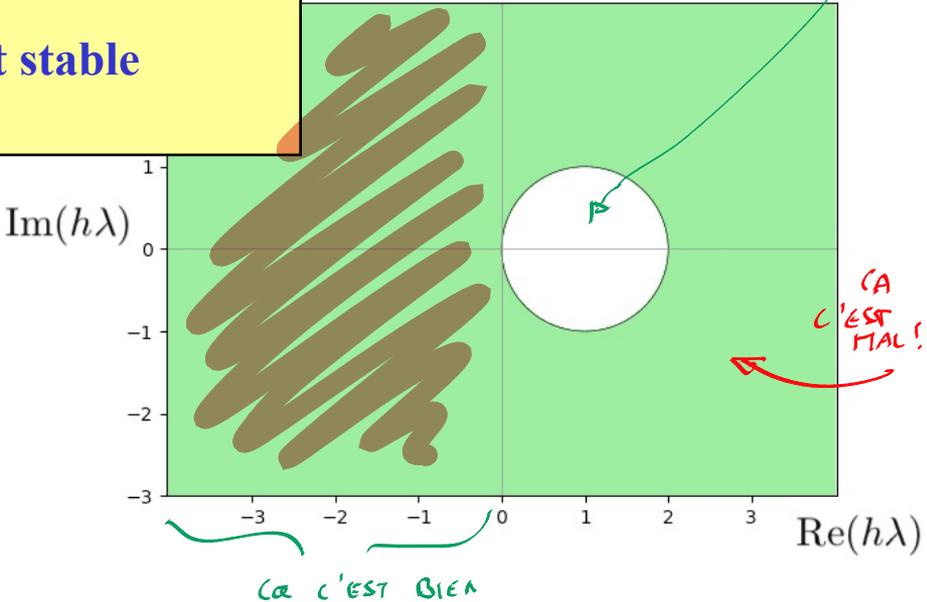
**Euler implicite**  
 Ordre de précision linéaire  
 Méthode inconditionnellement stable

$$U_{i+1} = U_i + h F_{i+1} + h U_{i+1} \lambda$$

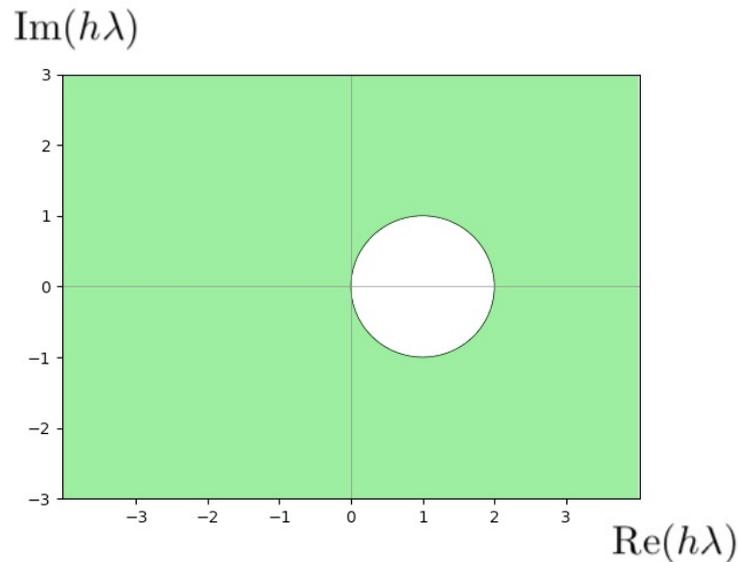
*ÇA C'EST BIEN*

$$U_{i+1} (1 - h\lambda) = U_i$$

$$U_{i+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} U_i$$



# La douce illusion de l'inconditionnellement stable...



**Exemple :**

$$u'(x) = \sin(u(x))$$

$$U_{i+1} = U_i + h \sin U_{i+1}$$

*Difficile, difficile, très difficile !*

## **Euler implicite**

**Ordre de précision linéaire**

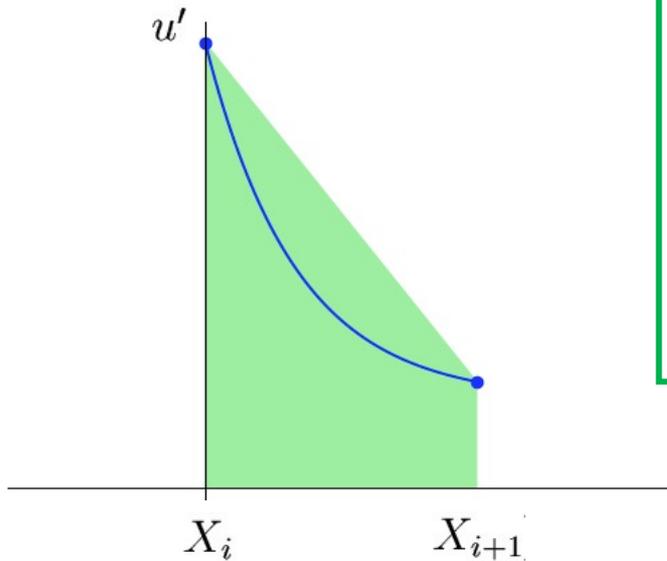
**Equation à résoudre à chaque pas de temps**

**(équation non linéaire, si f non linéaire !)**

**Inconditionnellement stable**

# Méthode de Crank-Nicolson

$$U_{i+1} - U_i = h\lambda \left( \frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)$$



## Crank-Nicolson (trapèzes)

Ordre de précision quadratique

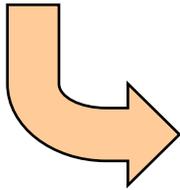
Equation à résoudre à chaque pas de temps

**(équation non linéaire, si f non linéaire !)**

Inconditionnellement stable

# Stabilité et précision

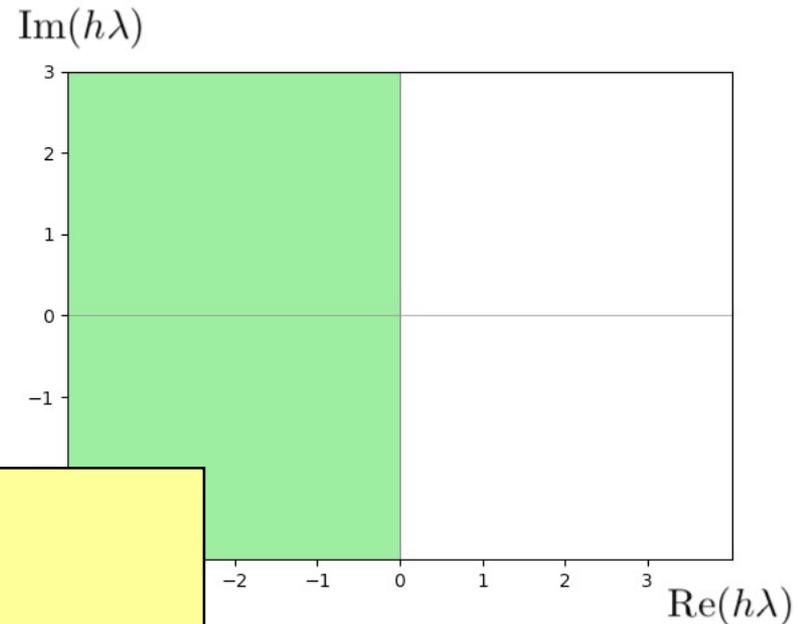
$$U_{i+1} \left( 1 - h\lambda/2 \right) = U_i \left( 1 + h\lambda/2 \right)$$



$$\left| \frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2} \right| < 1$$



$$\Re(h\lambda) < 0$$



## Crank-Nicolson (trapèzes)

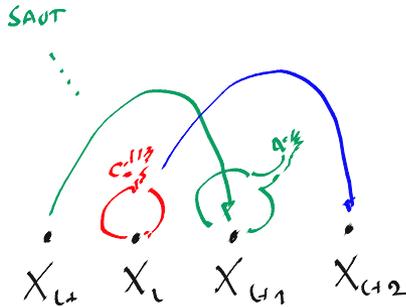
Ordre de précision quadratique

Equation à résoudre à chaque pas de temps

(**équation non linéaire**, si  $f$  non linéaire !)

Inconditionnellement stable

# Leapfrog Method



$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i)$$

## Méthode du Saute-Mouton

**Méthode à pas liés**

Comment démarrer ?

Ordre de précision ?

Stabilité ?

$$u'(X_i) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

$$U_{i+1} = \left[ \begin{array}{c} \text{SAUT} \\ \text{SAUT} \end{array} \right] U_i$$

*Il s'agit d'une méthode à pas liés car pour calculer  $U_{i+1}$ , il est nécessaire de connaître  $U_i$  et  $U_{i-1}$ .*

# Comment démarrer ?

*Cette méthode peut être utilisée seulement lorsqu'on possède  $U_0$  et  $U_1$ .  
Il n'est donc pas possible de commencer directement le calcul.*

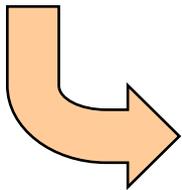
## 1 pas d'une méthode à pas simple

Euler explicite ou implicite

Crank-Nicolson

Méthodes de Taylor d'ordre élevé

**Méthodes de Gear : on va y arriver !**



## Et puis autant de pas de la méthode à pas double

Leapfrog

**Méthodes de Adams-Bashfort-Moulton : on va y arriver !**

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2h F_i$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x_i, U_i)}$

# Précision ?

$$F_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

$U_i$

$$\cancel{U_i} - h U_i' + \frac{h^2}{2} \cancel{U_i''} - \frac{h^3}{6} U_i'''$$

ERREUR LOCALE  $\mathcal{O}(h^3)$

ERREUR GLOBALE  $\mathcal{O}(h^2)$

$$\cancel{U_i} + h U_i' + \frac{h^2}{2} \cancel{U_i''} + \frac{h^3}{6} U_i'''$$

$$\underline{U_i} + \underbrace{\frac{h^2}{6} U_i''}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

$$\begin{aligned}
 U_{i+1} &= U_i + 2h (F_i + \mathcal{O}(h^2)) \\
 &= U_i + 2h F_i + \mathcal{O}(h^3)
 \end{aligned}$$

# Précision ?

$$u'(X_i) = f(X_i, U_i)$$



*En approximant  $u'(X_i)$  par la différence centrée d'ordre deux*

$$\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = f(X_i, U_i)$$

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

## Méthode d'ordre deux

**On gagne un ordre de précision en utilisant une différence centrée pour estimer la dérivée, contrairement aux méthodes d'Euler.**

**Les trapèzes sont une intégration centrée !**

**Leapfrog est une dérivation centrée !**

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2h\lambda U_i$$

SUPPOSONS

$$U_{i+1} = a U_i$$


$$U_i = a^i U_0$$

$$a^{i+1} U_0 = a^{i-1} U_0 + 2\lambda h a^i U_0$$

$$a^2 = 1 + 2\lambda h a$$

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

POLYNOME  
DE SECOND  
DEGRE (-)

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 - 1}$$

# Stabilité ?

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

*Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant*

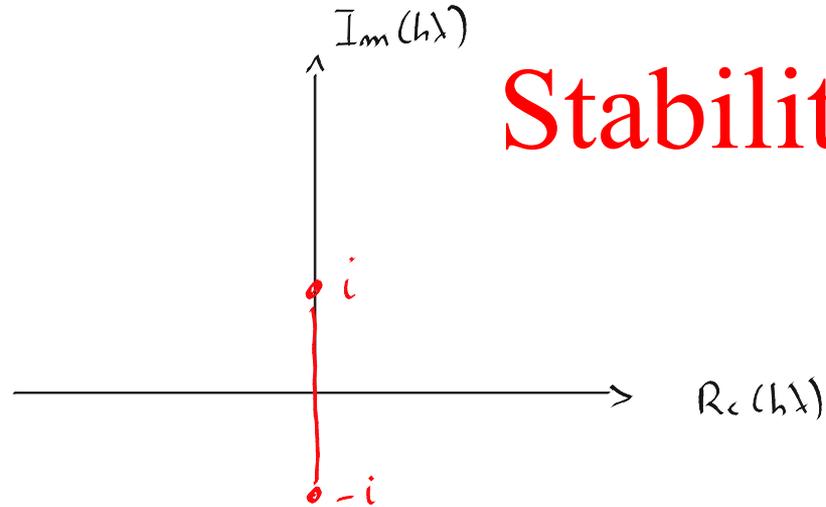
$$U_{i+1} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{matrix} \end{array} \right]}_{\text{FACTEUR D'APPLICATION}} U_i$$

$$a^2 = 1 + 2\lambda h a$$

$$\alpha^2 - 2h\lambda\alpha - 1 = 0$$

POLYNOME  
DE SECOND  
DEGRE (-)

$$\alpha = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 - 1}$$



# Stabilité ?

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

*Egalité obtenue pour le segment de  $-i$  à  $i$   
Dans cette zone, pas d'accroissement ou  
d'amortissement des perturbations...*

*a = facteur  
d'amplification de  
l'erreur initiale  
à chaque itération*



$$U_i = a^i U_0$$

*Changement de variable pour  
l'analyse des schémas à pas liés*

## Stabilité ?

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

*Problème modèle correspondant à la  
linéarisation en un instant*

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1} U_0 - a^{i-1} U_0$$

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1} U_0 - a^{i-1} U_0$$



*En simplifiant par  $a^{i-1} U_0$ ,*

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}$$

## Région stable

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

*Egalité obtenue pour le segment de  $-i$  à  $i$   
Dans cette zone, pas d'accroissement ou  
d'amortissement des perturbations...*

# Systemes d'equations differentielles

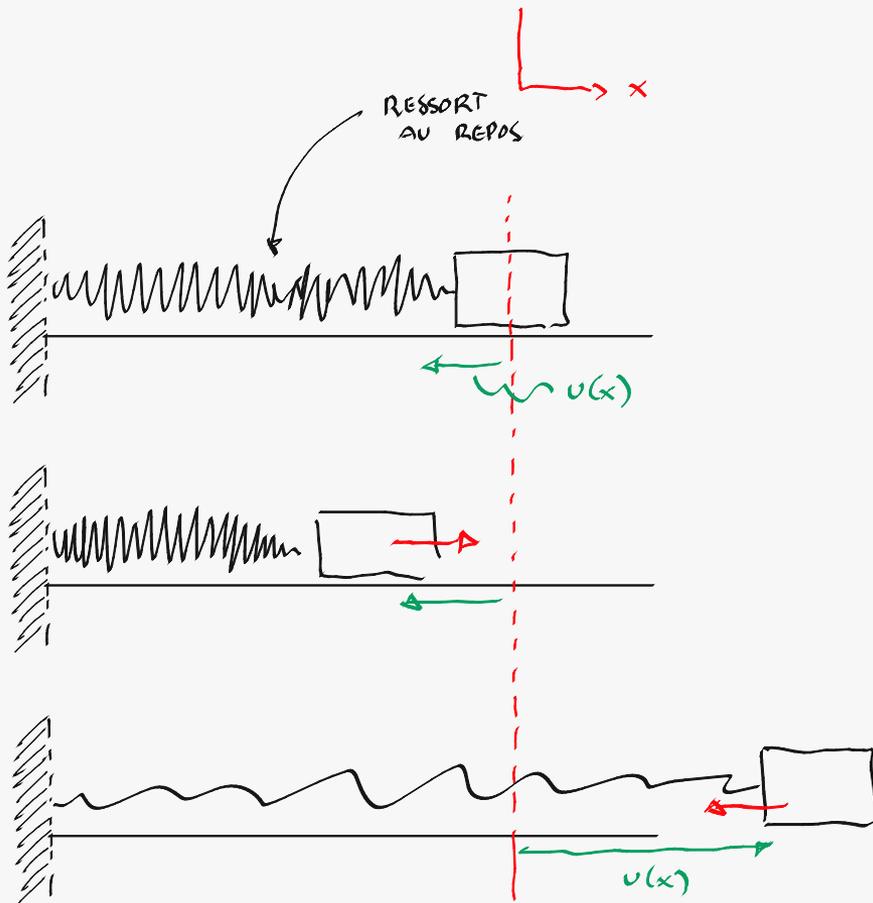
$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ \vdots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(a) = \bar{u}_1 \\ u_2(a) = \bar{u}_2 \\ \vdots \\ u_n(a) = \bar{u}_n \end{cases}$$

*Notation compacte :  
les vecteurs sont en gras.*

Trouver  $\mathbf{u}(x)$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)), & x \in [a, b] \\ \mathbf{u}(a) = \bar{\mathbf{u}} \end{cases}$$



$$m u''(t) = -k u(t)$$

$$u''(t) = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{-\omega^2} u(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$u(t) = \exp(\pm i\omega t)$$

$$\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} v(t) = u'(t) \\ -k u(t) = m v'(t) \end{cases}$$

# C'est exactement la même histoire !

$$U_{ji} = u_j^h(X_i) \approx u_j(X_i)$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{u}^h(X_i) \approx \mathbf{u}(X_i)$$

*Notation compacte :  
les vecteurs sont en gras.*

Méthode d'Euler explicite

$$U_{ji+1} = U_{ji} + hf_j(X_i, U_{1i}, \dots, U_{ni})$$

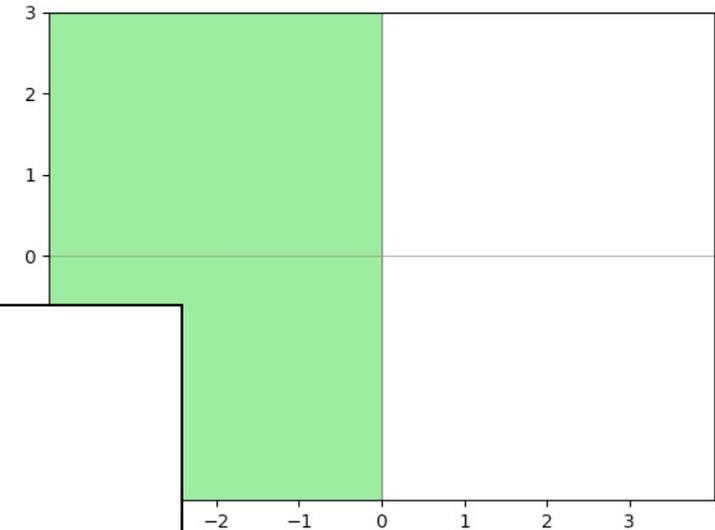
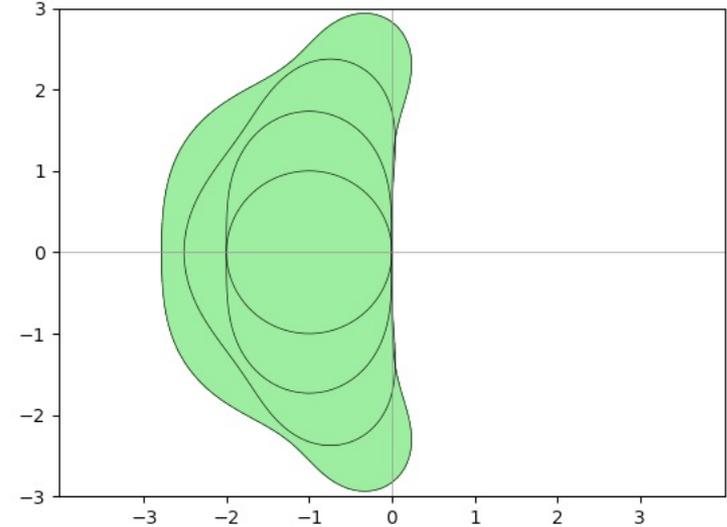
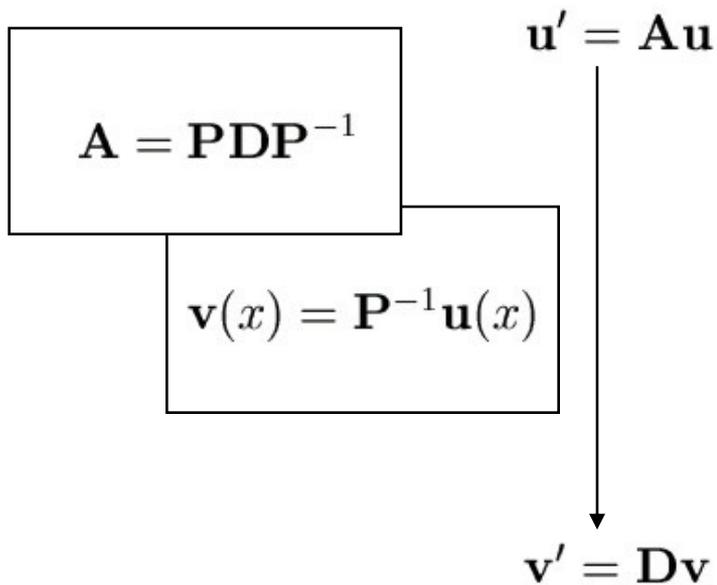
*Tableau à deux indices*

*On calcule la j-ème composante du vecteur  
des inconnues à la i-ème abscisse temporelle*

*Vecteur*

*On calcule la j-ème  
composante du vecteur des  
inconnues.*

# Stabilité des systèmes



*Le problème différentiel initial est équivalent à  $n$  équations scalaires*

$$v'_i(x) = \lambda_i v_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

# Les complexes c'est utile !

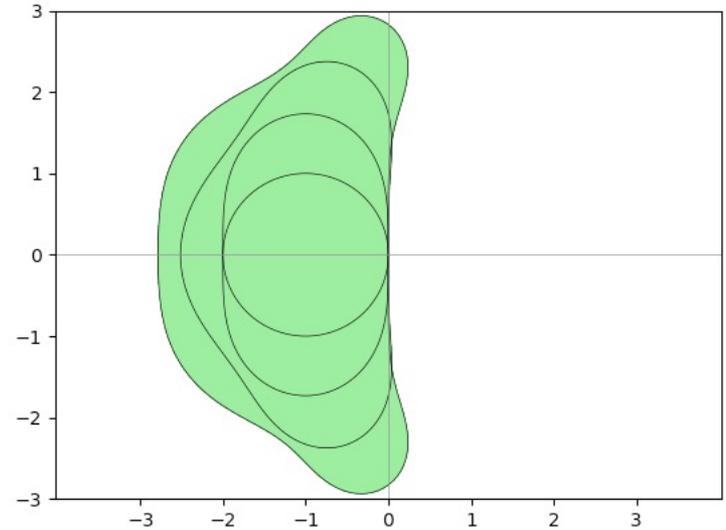
$$m u''(t) = -k u(t)$$

$$u''(t) = -\frac{k}{m} u(t)$$

$$-\omega^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$u(t) = \exp(\pm i\omega t)$$

$$\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$



Trouver  $u(x)$  tel que

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

Problème de  
Cauchy...

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(X_i + h, U_i + hK_3)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

... et les méthodes  
de Runge-Kutta (ode45)

# Méthodes explicites de Runge-Kutta

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})\end{aligned}$$

Heun (Runge-Kutta n=2)

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1) \\K_3 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2) \\K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3)\end{aligned}$$

"le classique" (Runge-Kutta n=4)

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

Euler explicite  
(Runge-Kutta n=1)

## Runge-Kutta n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Facile à mettre en oeuvre

**Conditionnellement stables** (comme Taylor)

# Méthode de Heun

Comment choisir les paramètres ?

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

Il faut la  
précision  
requisse...

$$U_2 = U_1 + h \left[ \underbrace{w_1 K_1}_{f(x_1, U_1)} + \underbrace{w_2 K_2}_{f(x_1 + \alpha h, U_1 + \beta h K_1)} \right]$$

$$U_2 = U_1 + h F_1 + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial U} F_1 \right] + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_2 = U_1 + h w_1 F_1 + h w_2 \underbrace{f(x_1 + \alpha h, U_1 + \beta h F_1)}_{F_1 + \alpha h \frac{\partial F_1}{\partial x} + \beta h F_1 \frac{\partial F_1}{\partial U} + \mathcal{O}(h^2)}$$

$$= U_1 + h (w_1 + w_2) F_1 + h^2 w_2 \left[ \alpha \frac{\partial F_1}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial U} F_1 \right] + \mathcal{O}(h^3)$$

3 EQUATIONS

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad w_2 \beta = \frac{1}{2}$$

4 INCONNUES

$$w_1 \quad w_2 \quad \alpha \quad \beta$$

# Il faut la précision requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i) + h w_2 f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$



En effectuant un développement en série de Taylor de l'expression  $f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$ , autour de  $(X_i, U_i)$ ,

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i)$$



$$+ h w_2 \left( f(X_i, U_i) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta h \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^2) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 + w_2) f(X_i, U_i)$$

$$+ h^2 w_2 \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$



**Identification des termes**  
**3 relations à satisfaire**  
**4 paramètres à choisir**

**Il existe plusieurs possibilités !**

# Les zones de stabilité de Runge-Kutta et de Taylor sont identiques...

On a construit les méthodes de Runge-Kutta en identifiant les développements en série de Taylor... En conséquence, les méthodes de Runge-Kutta et de Taylor sont **IDENTIQUES** pour un problème linéaire !

Mais, elles ne sont **PAS** identiques pour des problèmes non linéaires.

Finalement, comme l'analyse de stabilité se fait sur un problème linéaire, cette analyse fournira des résultats **IDENTIQUES**... **Vérifiez ce résultat par vous-même en reproduisant le calcul effectué pour la méthode Leapfrog :-)**

