Un truc étonnant !

```
==== Computing the Padé approximation :-)
  Interpolation Basic error :  2.9424786e-02
  Interpolation Horner error :  2.9424782e-02
  Error :  1.1045136e-03
```

```
def padeEval(a,x) :
  n = len(a) // 2
  A = array([x**i for i in range(1,n+1)]).T
  return (a[0] + A @ a[1:n+1])/(1 + A @ a[n+1:])
```

```
def padeSuperEval(a,x) :
  n = len(a) // 2
  return polyval(flip(a[:n+1]),x) / polyval(flip(r_[1,a[n+1:]]),x)
```

```
n = 10;
X = 1.0 + (2*pi/(2*n))*arange(0,2*n+1); Xe = 4
u = lambda x : 2.0 + 2.5*cos(x)*exp(-0.8*x) + sin(8*x)*exp(-x)
a = padeInterpolationCompute(X,u(X))
print("  Interpolation Basic error : %14.7e" % (u(Xe)- padeEval(a,Xe)))
print("  Interpolation Horner error : %14.7e" % (u(Xe)- padeSuperEval(a,Xe))))

x = 1.0 + (2*pi/(m))*arange(0,100001)
print("  Error : %14.7e" % norm(padeEval(a,x)- padeSuperEval(a,x)))
```

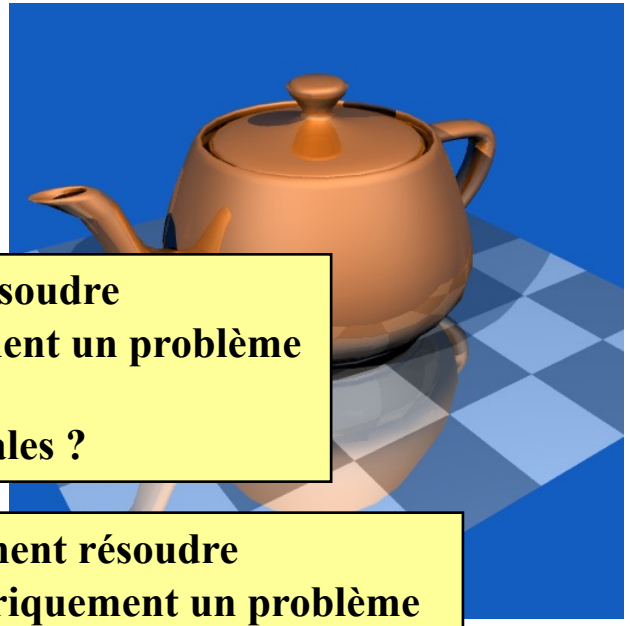
$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_0 + x(\underbrace{a_1 + x(a_2 + xa_3)}_{a_1+a_2x+a_3x^2})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{a_1x+a_2x^2+a_3x^3}$$

Algorithme de Horner

```
==== Computing the Padé approximation :-)
  Interpolation Basic error :  2.9424786e-02
  Interpolation Horner error :  2.9424782e-02
  Error :  1.1045136e-03
```

Plan des cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

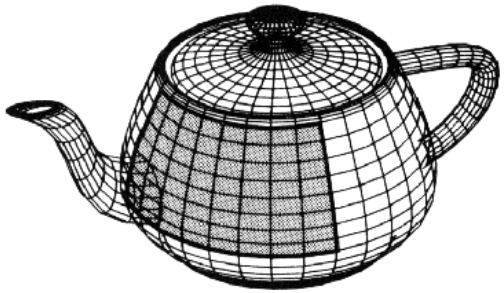
Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

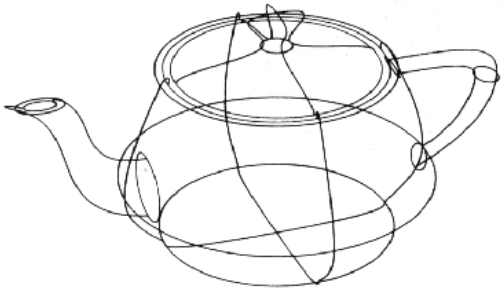
Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

The Utah Teapot

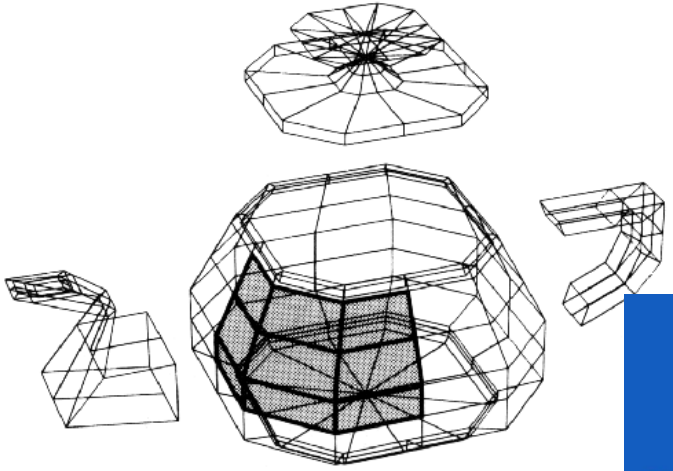
Martin Nevell (1975)



Single shaded patch



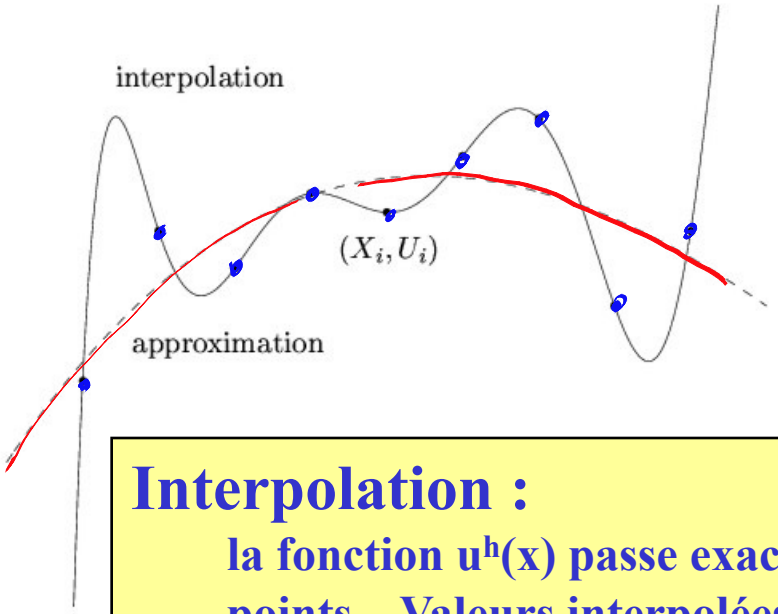
Patch edges



Control points

32 patches

Interpolation, approximation et extrapolation…



Fonctions de base spécifiées a priori

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \ \phi_j(x)$$

Paramètres inconnus

Interpolation :

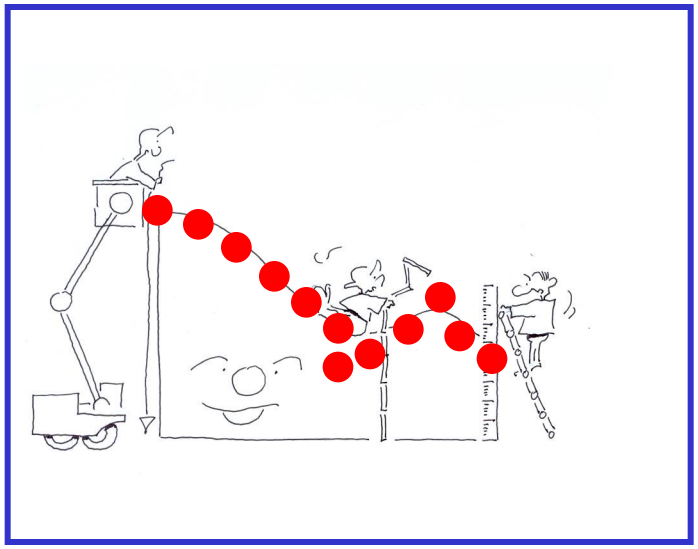
la fonction $u^h(x)$ passe exactement par les points. Valeurs interpolées entre les points et valeurs extrapolées hors de l'intervalle.

Approximation :

la fonction $u^h(x)$ ne passe pas par les points, mais s'en rapproche selon un critère à définir

Beaucoup de données…

m = 11

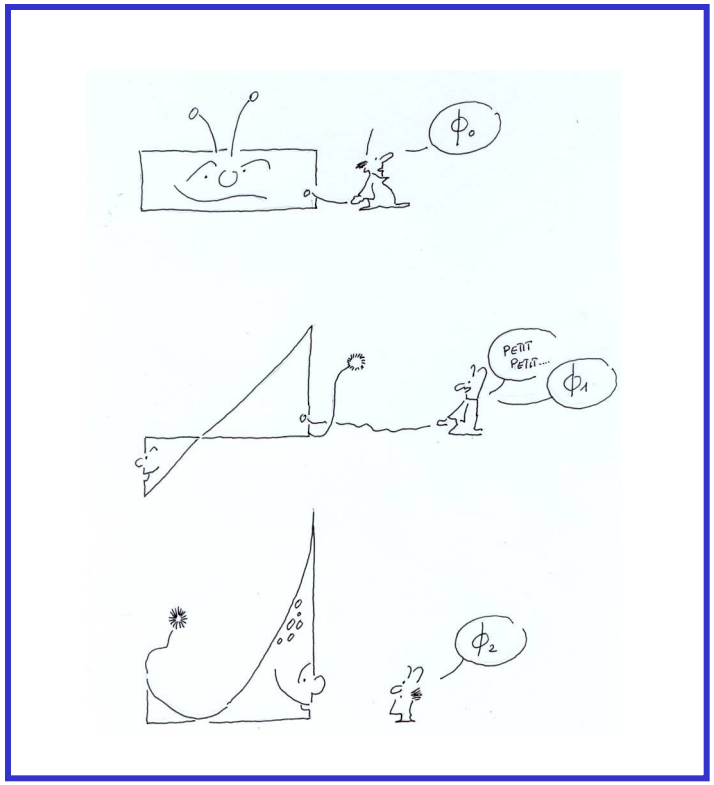


$$(X_i, U_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

$$n < m$$

n = 2

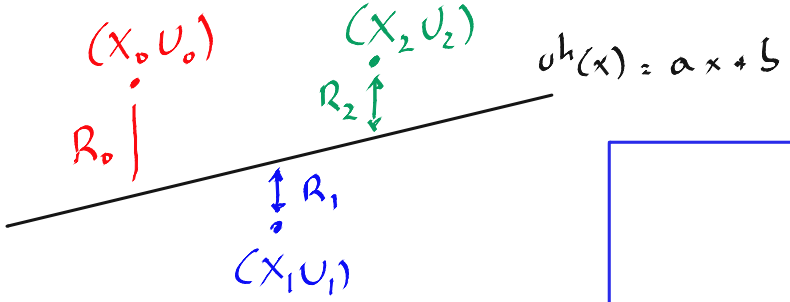
$$u^h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, \phi_j(x)$$



…peu de paramètres !

Approximation aux moindres carrés…

$$U_0 \simeq a X_0 + b$$
$$U_1 \simeq a X_1 + b$$
$$U_2 \simeq a X_2 + b$$



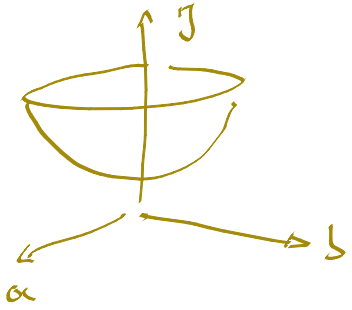
A MINIMISER

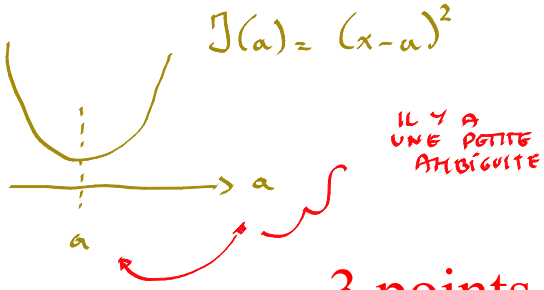
$$R_0^2 + R_1^2 + R_2^2$$

$$(U_0 - aX_0 - b)^2 + (U_1 - aX_1 - b)^2 + (U_2 - aX_2 - b)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a}\Big|_{(a,b)} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial b}\Big|_{(a,b)} = 0 \end{cases}$$

$$J(a,b) = (U_0 - aX_0 - b)^2 + (U_1 - aX_1 - b)^2 + (U_2 - aX_2 - b)^2$$





3 points

2 paramètres

Equations normales

$$J(a,b) = (v_0 - a x_0 - b)^2 + (v_1 - a x_1 - b)^2 + (v_2 - a x_2 - b)^2$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial J}{\partial a}\right|_{(a,b)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial J}{\partial b}\right|_{(a,b)} = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial a} = -2\left[(v_0 - a x_0 - b)\,x_0 + (v_1 - a x_1 - b)\,x_1 \;\ldots\; \right]$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial b} = -2\left[(\quad)\;+(\quad)\;\ldots\;\right]$$

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum v_i \cdot x_i \\ a \sum x_i + b \sum 1 = \sum v_i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i v_i \\ \sum v_i \end{bmatrix}$$

EQUATIONS NORMALES

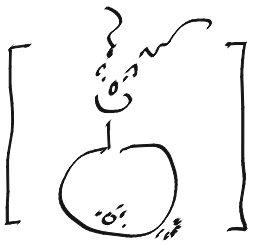
Généralisons un peu…

$$v^h(x) = a_0 \underbrace{\varphi_0(x)}_{1} + a_1 \underbrace{\varphi_1(x)}_{x}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \phi_0(x_i)\,\phi_0(x_i) & \sum_i \phi_0(x_i)\,\phi_1(x_i) \\ \sum_i \phi_1(x_i)\,\phi_0(x) & \sum_i \phi_1(x_i)\,\phi_1(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} v_i\,\phi_0(x_i) \\ \sum_{i=0}^{m} v_i\,\phi_1(x_i) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \phi_k(x_i)\,\phi_1(x_i)\,a_j = \sum_{i=0}^{m} v_i\,\phi_k(x_i)$$

$k = 0, \dots n$



$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x_i v_i \\ \Sigma v_i \end{bmatrix}$$

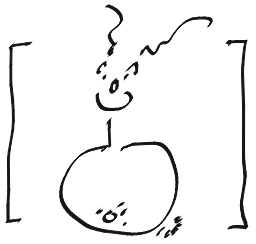
EQUATIONS NORMALES

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \phi_k(x_i)\, \phi_j(x_i)\, a_j = \sum_{i=0}^{m} v_i\, \phi_k(x_i)$$

$k = 0, \dots n$

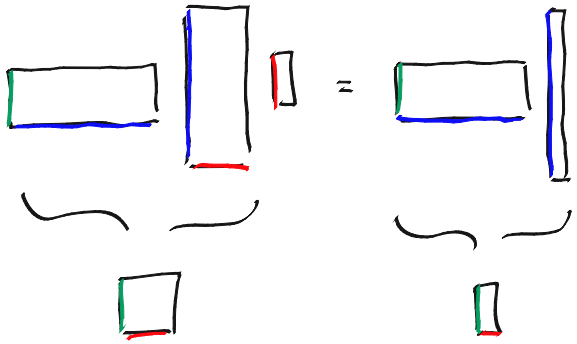
$\underline{\underline{A}}_{ik}$

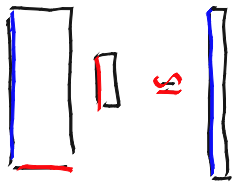
$\underline{\underline{A}}_{ij}$ — lignes $m+1=3$ — colonnes $n+1=2$



$$\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{v}$$

$$\underline{\underline{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) \end{bmatrix}$$





…pour conclure
par un petit dessin

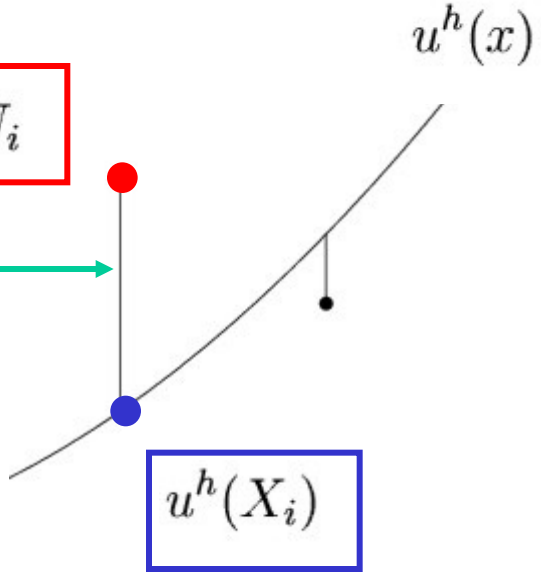
La fonction $u^h(x)$ ne passe pas par les points, mais s'en rapproche selon un critère à définir…

$$u^h(X_i) \approx u(X_i)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0(X_0) & \phi_1(X_0) & \dots & \phi_n(X_0) \\ \phi_0(X_1) & \phi_1(X_1) & \dots & \phi_n(X_1) \\ \phi_0(X_2) & \phi_1(X_2) & \dots & \phi_n(X_2) \\ \phi_0(X_3) & \phi_1(X_3) & \dots & \phi_n(X_3) \\ \phi_0(X_4) & \phi_1(X_4) & \dots & \phi_n(X_4) \\ \phi_0(X_5) & \phi_1(X_5) & \dots & \phi_n(X_5) \\ \phi_0(X_6) & \phi_1(X_6) & \dots & \phi_n(X_6) \\ \phi_0(X_7) & \phi_1(X_7) & \dots & \phi_n(X_7) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(X_m) & \phi_1(X_m) & \dots & \phi_n(X_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}$$

Minimisons les résidus

$$R_i = U_i - \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \phi_j(X_i)\ a_j}_{u^h(X_i)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$



Problème de l'approximation

Trouver $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m} \left(U_i - \sum_{j=0}^{n} \phi_j(X_i)\, a_j \right)^2}_{J(a_0, \ldots, a_n)} \quad \text{soit minimal.}$$

Il s'agit donc de minimiser J qui est une fonction à n+1 variables

$$\left. \frac{\partial J}{\partial a_k} \right|_{(a_0, \ldots, a_n)} = 0$$

Il faut que le vecteur gradient s'annule et aussi que les conditions du second ordre sur la matrice hessienne soient satisfaites

Calculons…

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{m}\left(U_i - \sum_{j=0}^{n}\phi_j(X_i)\ a_j\right)^2}_{J(a_0,\ldots,a_n)}$$

$$\left.\frac{\partial J}{\partial a_k}\right|_{(a_0,\ldots,a_n)} = 0 \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m} -2\phi_k(X_i)\left(U_i - \sum_{j=0}^{n}\phi_j(X_i)\ a_j\right) = 0 \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{m}\phi_k(X_i)\ \sum_{j=0}^{n}\phi_j(X_i)\ a_j = \sum_{i=0}^{m}\phi_k(X_i)U_i \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}\phi_k(X_i)\ \phi_j(X_i)\right)a_j = \sum_{i=0}^{m}\phi_k(X_i)U_i \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

Et pratiquement…

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\phi_0(X_i)\phi_0(X_i) & \sum_{i=0}^{m}\phi_0(X_i)\phi_1(X_i) & \dots & \sum_{i=0}^{m}\phi_0(X_i)\phi_n(X_i) \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_1(X_i)\phi_0(X_i) & \sum_{i=0}^{m}\phi_1(X_i)\phi_1(X_i) & \dots & \sum_{i=0}^{m}\phi_1(X_i)\phi_n(X_i) \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_2(X_i)\phi_0(X_i) & \sum_{i=0}^{m}\phi_2(X_i)\phi_1(X_i) & \dots & \sum_{i=0}^{m}\phi_2(X_i)\phi_n(X_i) \\ & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_n(X_i)\phi_0(X_i) & \sum_{i=0}^{m}\phi_n(X_i)\phi_1(X_i) & \dots & \sum_{i=0}^{m}\phi_n(X_i)\phi_n(X_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\phi_0(X_i)U_i \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_1(X_i)U_i \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_2(X_i)U_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\phi_n(X_i)U_i \end{bmatrix}$$

Equations normales

A_{ik}

A^T_{ki}

A_{ij}

Problème de l'approximation

Trouver $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i)\, \phi_j(X_i) \right) a_j = \sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i)\, U_i \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Equations normales sous forme matricielle $A^T A\, a = A^T\, u$

Problème de l'interpolation

A est une matrice carrée

$$\begin{bmatrix} \phi_0(X_0) & \phi_1(X_0) & \dots & \phi_n(X_0) \\ \phi_0(X_1) & \phi_1(X_1) & \dots & \phi_n(X_1) \\ \phi_0(X_2) & \phi_1(X_2) & \dots & \phi_n(X_2) \\ \phi_0(X_3) & \phi_1(X_3) & \dots & \phi_n(X_3) \\ \phi_0(X_4) & \phi_1(X_4) & \dots & \phi_n(X_4) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(X_n) & \phi_1(X_n) & \dots & \phi_n(X_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Equations de l'interpolation sous forme matricielle $A\,a = u$

On voit bien que dans le cas n=m, les équations normales fournissent la même solution que les équations de l'interpolation…

Cas particulier : Régression polynomiale

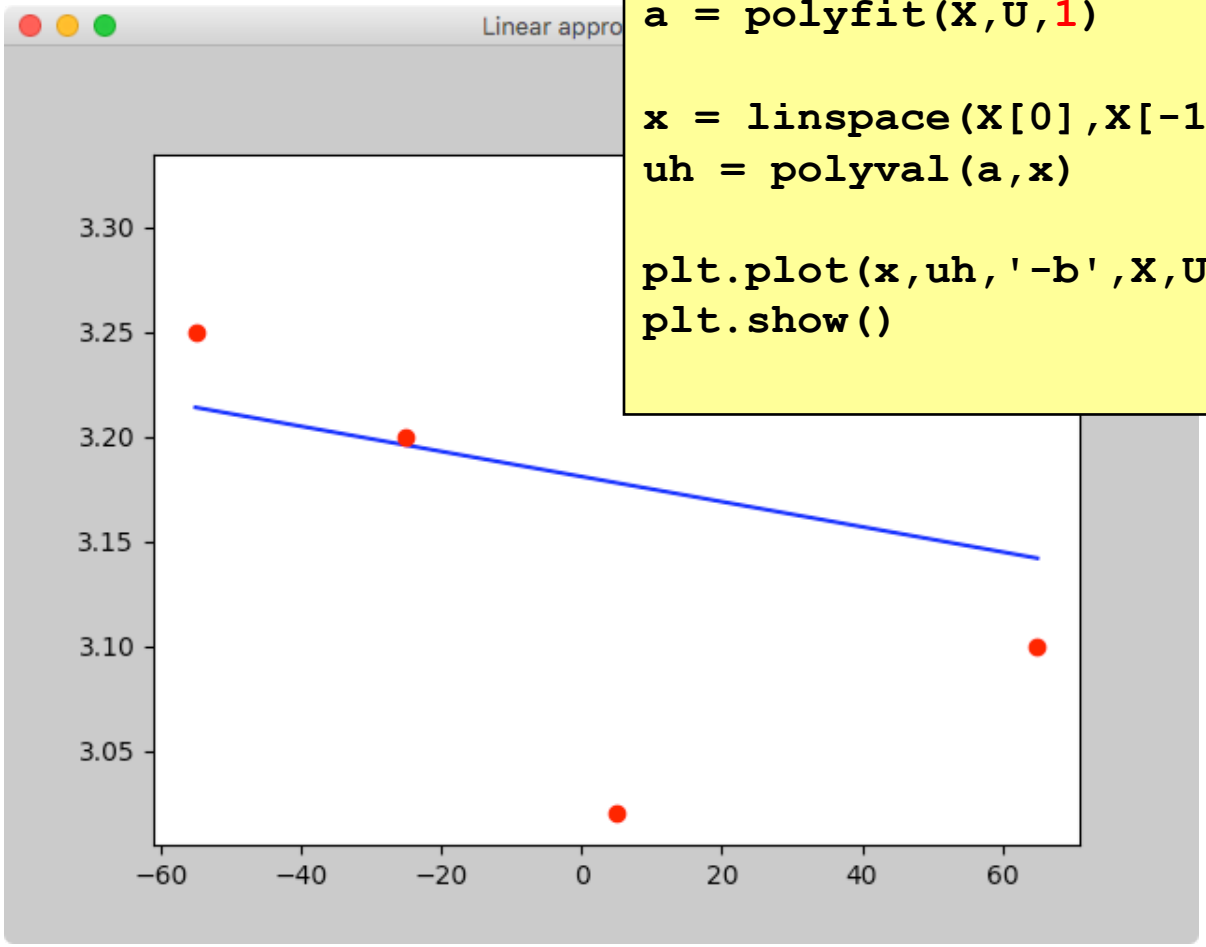
$$\phi_j(x) = x^j \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$u^h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

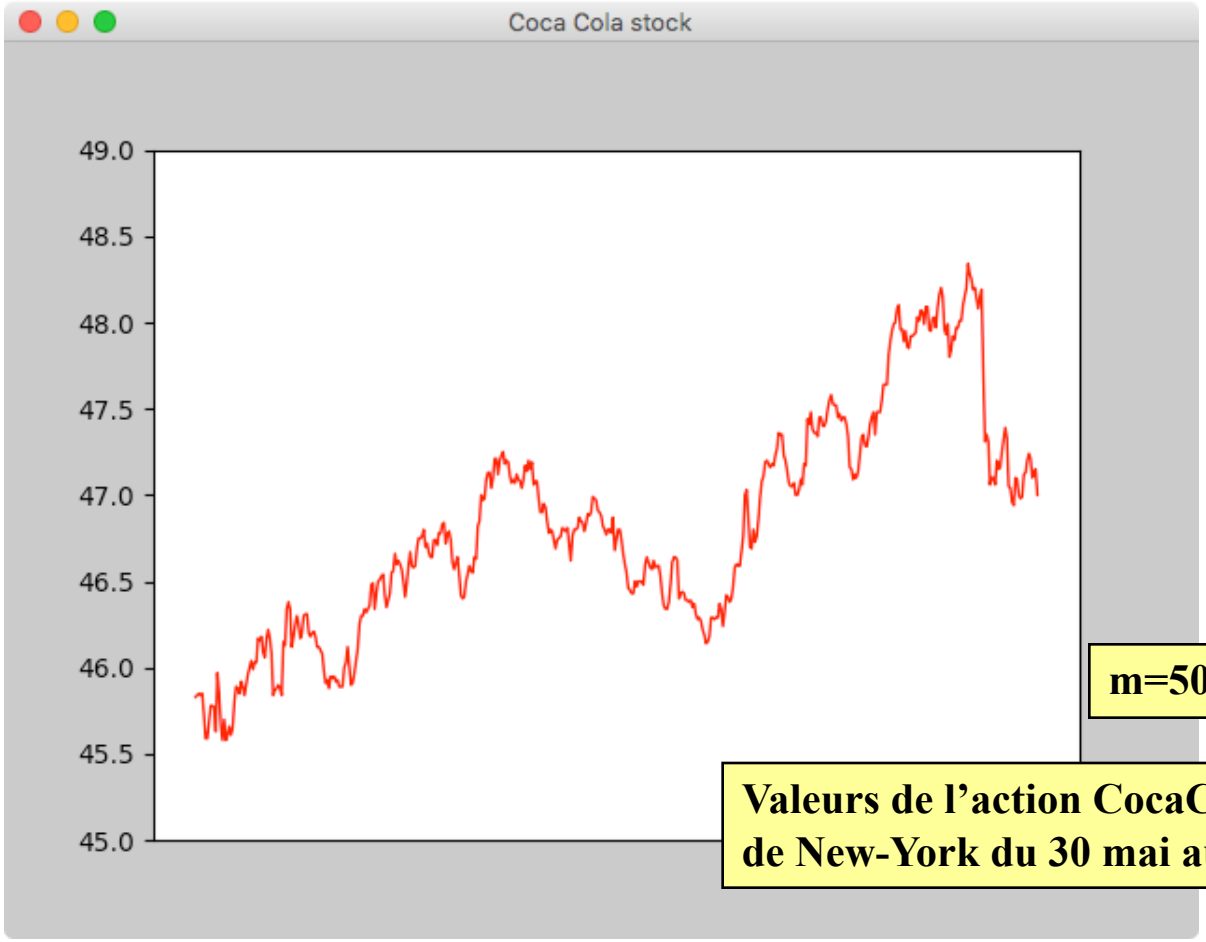
$$\begin{bmatrix} (m+1) & \sum_{i=0}^{m} X_i & \sum_{i=0}^{m} X_i^2 \\ \sum_{i=0}^{m} X_i & \sum_{i=0}^{m} X_i^2 & \sum_{i=0}^{m} X_i^3 \\ \sum_{i=0}^{m} X_i^2 & \sum_{i=0}^{m} X_i^3 & \sum_{i=0}^{m} X_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} U_i \\ \sum_{i=0}^{m} X_i U_i \\ \sum_{i=0}^{m} X_i^2 U_i \end{bmatrix}$$

Exemple

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

X = [ -55, -25,   5,  35,  65]
U = [3.25,3.20,3.02,3.32,3.10]
a = polyfit(X,U,1)

x = linspace(X[0],X[-1],100)
uh = polyval(a,x)

plt.plot(x,uh,'-b',X,U,'or')
plt.show()
```



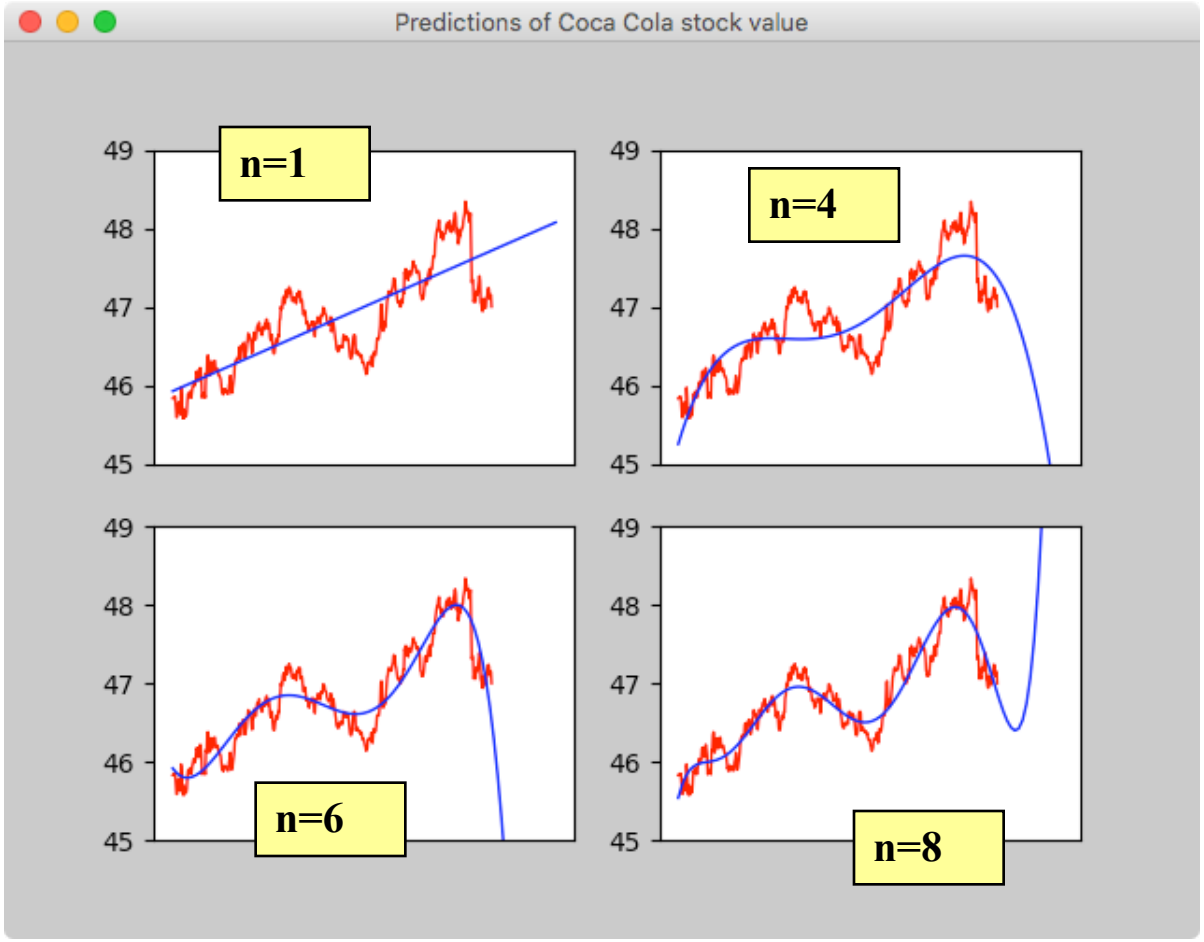
Beaucoup de données



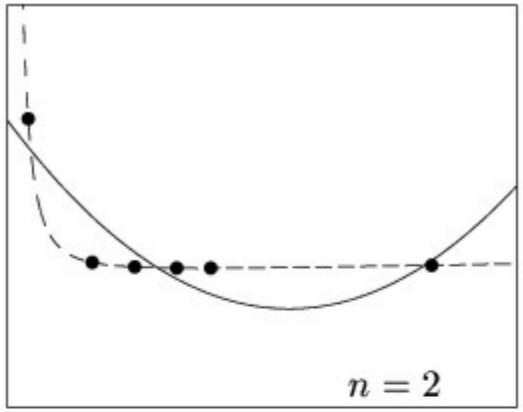
m=500

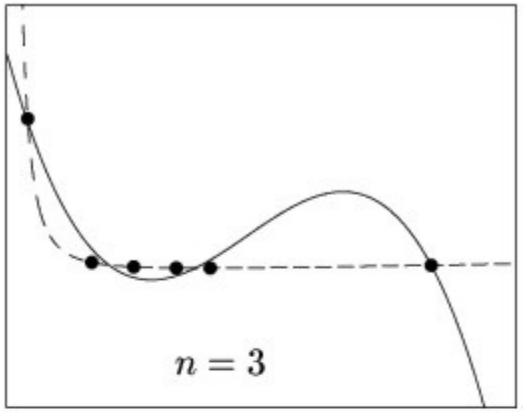
Valeurs de l'action CocaCola à la bourse de New-York du 30 mai au 18 juin 2003

Faisons des régressions et extrapolons les valeurs pour devenir riches :-)

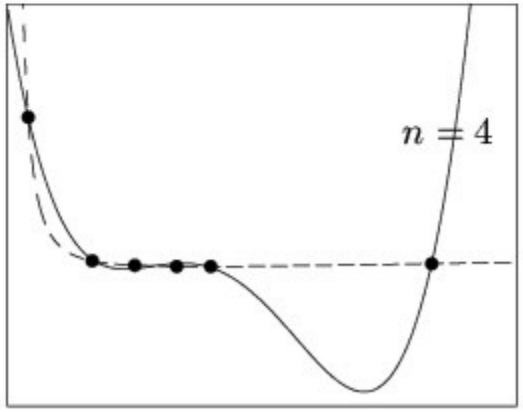


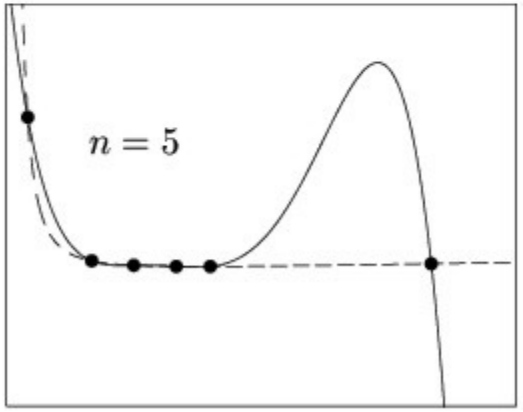
…les approximations polynomiales divergent aussi !





$$u(x) = 1.44x^{-2} + 0.24$$

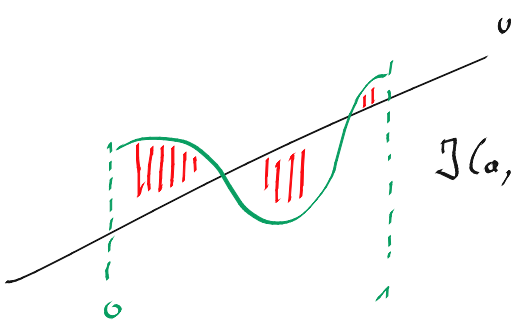




Et si nous avions u(x)…

$$\begin{bmatrix} \int x^2 & \int x \\ \int x & \int 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int xu \\ \int u \end{bmatrix}$$

EQUATIONS NORMALES



$$J(a,b) = \int_0^1 (u(x) - ax - b)^2 \, dx$$

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i u_i \\ \sum u_i \end{bmatrix}$$

EQUATIONS NORMALES

$$0 = \frac{\partial J}{\partial a} = \int_0^1 x \,(u(x) - ax - b)$$

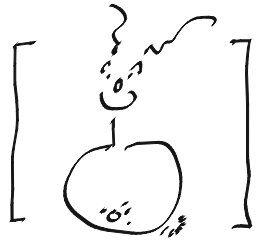
$$0 = \frac{\partial J}{\partial b} = \int_0^1 (u(x) - ax - b)$$

$$\sum_{j=0}^{n} \int_0^1 \phi_k(x)\, \phi_j(x)\, a_j \, dx = \int_0^1 \phi_k(x)\, u(x) \, dx$$

$k = 0 \ldots m$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i)\, \phi_j(X_i)\, a_j = \sum_{i=0}^{m} U_i\, \phi_k(X_i)$$

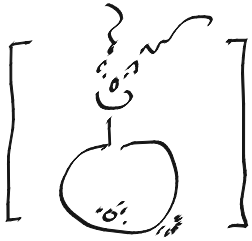
$k = 0, \dots n$



$$\sum_{j=0}^{n} \int_0^n \phi_k(x)\, \phi_j(x)\, a_j\, dx = \int_0^1 \phi_k(x)\, u(x)\, dx$$

$k = 0 \dots m$

EST BETEMENT APPROCHÉ PAR UN ETRE RUSTRE



CAR $\int \dots = \int$ ET $\sum = \sum$

Et si nous avions la fonction u(x)…

$$J(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left(u(x) - \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x)\ a_j \right)^2 dx$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial a_k} \right|_{(a_0,\ldots,a_n)} = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\int_a^b -2\phi_k(x) \left(u(x) - \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x)\ a_j \right) dx = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)dx \right) a_j = \int_a^b \phi_k(x)u(x)dx \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$B\ a = c$$

Problème intégral de l'approximation

Trouver $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)dx \right) a_j = \int_a^b \phi_k(x)u(x)dx \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Les équations normales ne sont qu'une approximation de la forme intégrale par une somme finie

Trouver $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i)\ \phi_j(X_i) \right) a_j = \sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i)U_i \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Et pratiquement…

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \phi_0(x)\phi_0(x)dx & \int_a^b \phi_0(x)\phi_1(x)dx & \dots & \int_a^b \phi_0(x)\phi_n(x)dx \\ \int_a^b \phi_1(x)\phi_0(x)dx & \int_a^b \phi_1(x)\phi_1(x)dx & \dots & \int_a^b \phi_1(x)\phi_n(x)dx \\ \int_a^b \phi_2(x)\phi_0(x)dx & \int_a^b \phi_2(x)\phi_1(x)dx & \dots & \int_a^b \phi_2(x)\phi_n(x)dx \\ & \vdots & & \vdots \\ \int_a^b \phi_n(x)\phi_0(x)dx & \int_a^b \phi_n(x)\phi_1(x)dx & \dots & \int_a^b \phi_n(x)\phi_n(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b \phi_0(x)u(x)dx \\ \int_a^b \phi_1(x)u(x)dx \\ \int_a^b \phi_2(x)u(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b \phi_n(x)u(x)dx \end{bmatrix}$$

Calcul de la projection orthogonale de u(x) pour le produit scalaire L^2

$$\langle f\, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

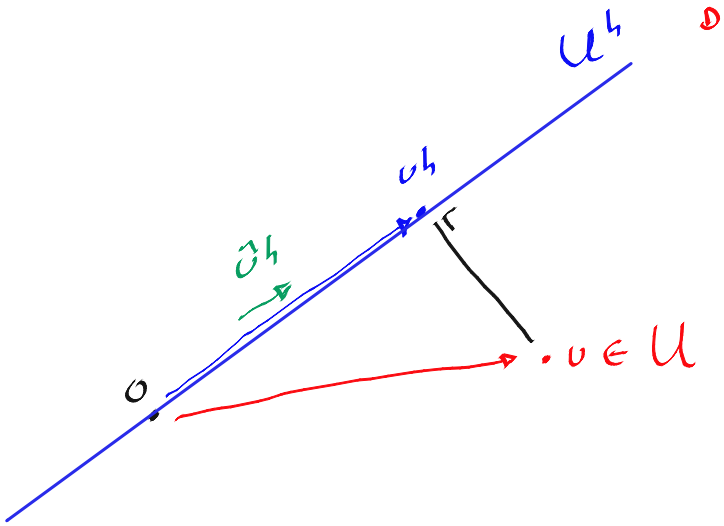
PRODUIT SCALAIRE DE $L^2(]0,1[) = \{ f(x) \text{ tel que } \int_0^1 f^2 < \infty \}$

ESPACE DES FONCTIONS CARRÉ-INTÉGRABLE

ESPACE DE SOBOLEV

ESPACE VECTORIEL
- AVEC PRODUIT SCALAIRE
- COMPLET

ESPACE D'HILBERT



$$\langle \hat{v}^h, (v - u^h) \rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^h \in U^h$$

PROJECTION ORTHOGONALE

Une jolie interprétation algébro-géométrique…

Projection orthogonale

$$\langle \hat{v}^h, (v - v^h) \rangle = 0 \quad \forall \hat{v}^h \in U^h$$

PROJECTION ORTHOGONALE

$$U^h = \{ \underbrace{ax + b}_{v^h(x)} \quad a, b \in \mathbb{R} \}$$

$\dim(U^h) = 2$

BASE = $\{ 1, x \}$

$\forall \hat{v}^h \in U^h \quad \hat{v}^h = \hat{a}x + \hat{b}$

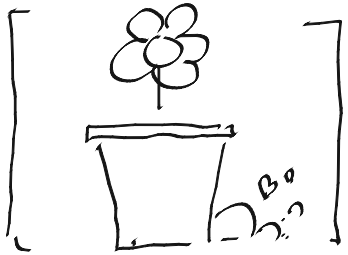
$\Leftrightarrow \forall \hat{a}\ \hat{b}$

$\Leftrightarrow (0,1) \quad (1,0)$

$$\langle x \,(v(x) - ax - b) \rangle = 0$$
$$\langle \quad (v(x) - ax - b) \rangle = 0$$

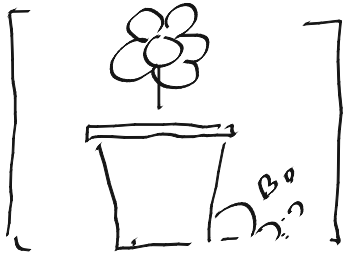
$$\int_0^1 x\,(v(x) - ax - b)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 v(x) - ax - b \, dx = 0$$



$$\int_0^1 x\,(v(x) - ax - b)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 v(x) - ax - b\,dx = 0$$



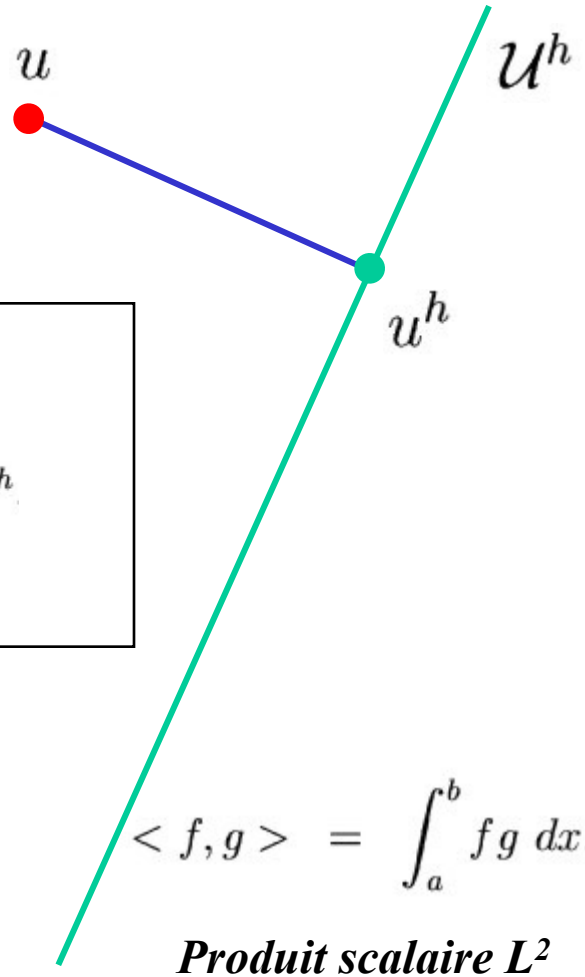
$$\sum_{j=0}^{n} \int_0^1 \phi_k(x)\,\phi_j(x)\,a_j\,dx = \int_0^1 \phi_k(x)\,v(x)\,dx$$

$k = 0 \ldots m$

…oui enfin !

L'approximation au sens des moindres carrés est une projection orthogonale…

Sous-espace vectoriel dont une base est donnée par les fonctions ϕ_i



$$< \widehat{u}^h \, , \underbrace{(u - u^h)}_{e^h} > \; = \; 0, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h$$

$$< f, g > \; = \; \int_a^b f g \; dx$$

Produit scalaire L^2

Et il s'agit bien du même $u^h(x)$.

$$< \widehat{u}^h \, , \underbrace{(u - u^h)}_{e^h} > \quad = \quad 0, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h,$$

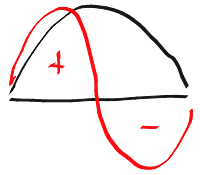
Imposer pour toute fonction de base ϕ_i est équivalent à l'imposer pour toute fonction de l'espace

$$\int_a^b \phi_k(x) \left(u(x) - \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) \; a_j \right) dx \quad = \quad 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) dx \right) \; a_j \quad = \quad \int_a^b \phi_k(x) u(x) dx \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

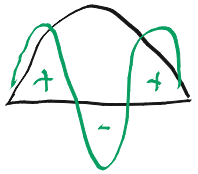
Equations intégrales de l'approximation au sens des moindres carrés !

Une base orthogonale pour ce produit scalaire !



$$\phi_i(x) = \cos(ix) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

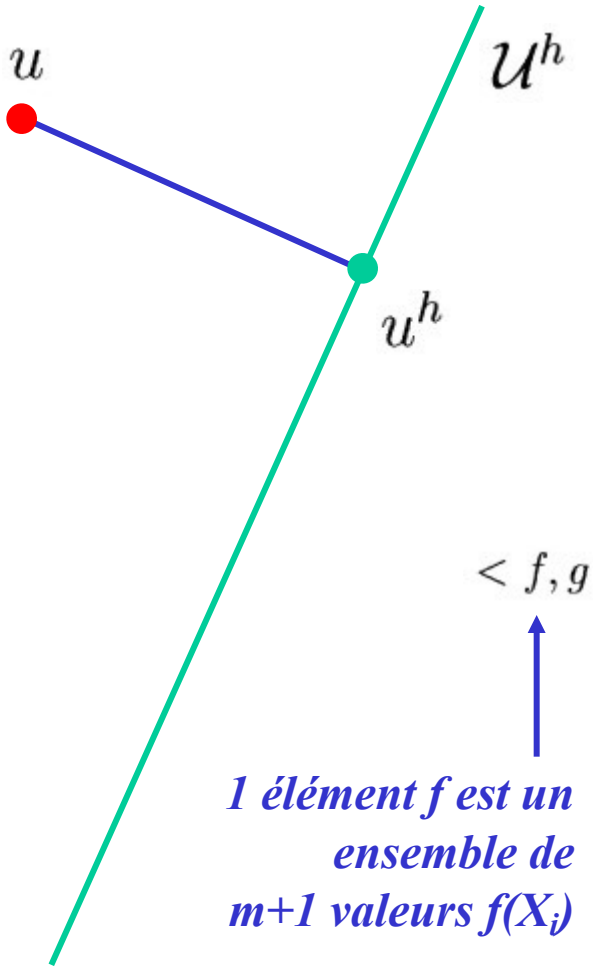
$$[-\pi, \pi]$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ix)\cos(jx) = 0 \qquad i \neq j$$
$$= \pi \qquad i = j$$

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(ix)dx$$

Sous-espace vectoriel dont une base est donnée par les n+1 vecteurs $\phi_j(X_i)$

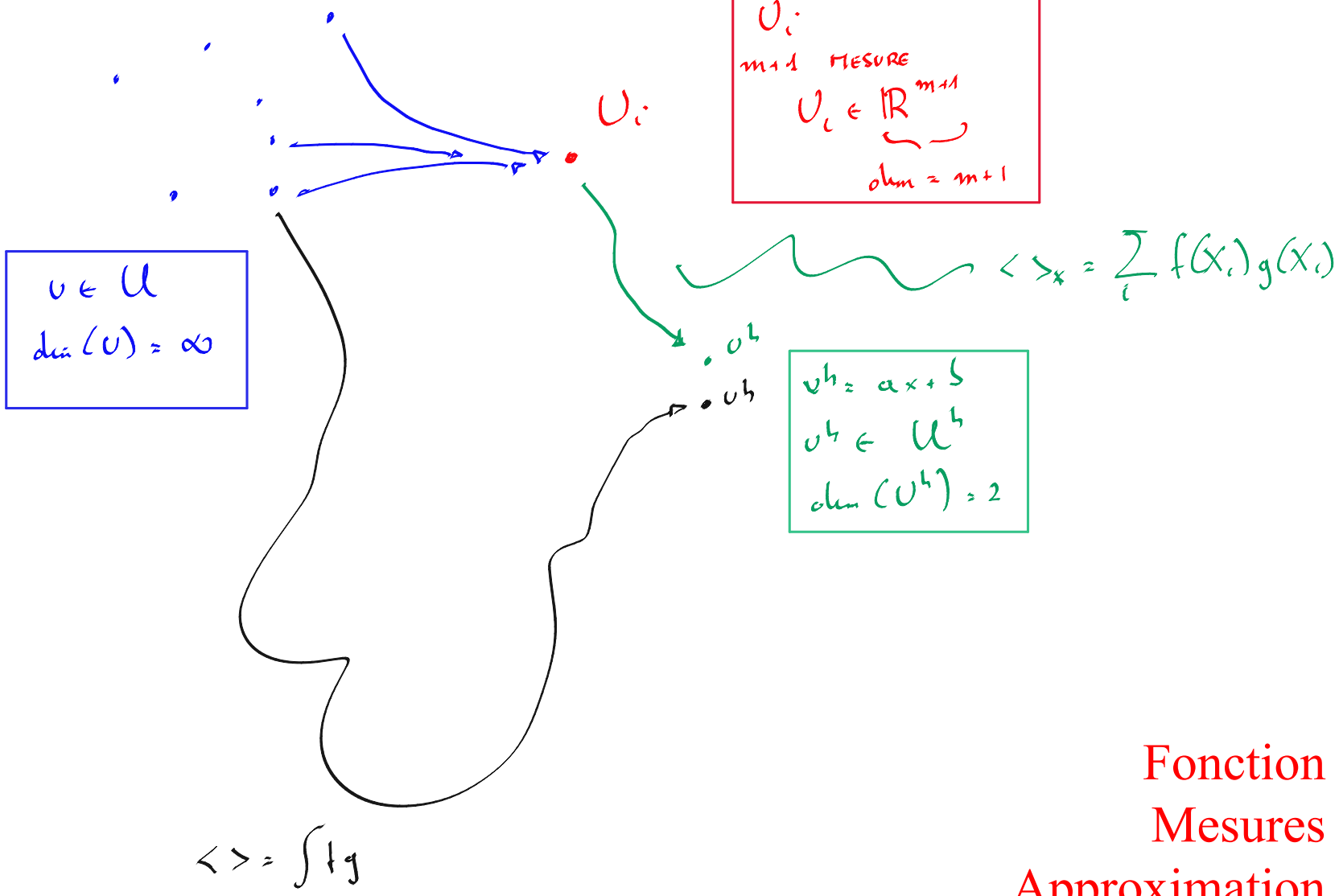


Approximer m+1 points au sens des moindres carrés avec n+1 fonctions de base

$$< f, g >_* \;=\; \sum_{j=0}^{m} f(X_j) g(X_j)$$

1 élément f est un ensemble de m+1 valeurs $f(X_i)$

C'est réaliser une projection orthogonale d'un élément de R^{m+1} dans un sous-espace de dimension n+1



Fonction
Mesures
Approximation

En fait, on réalise deux approximations successives…

Cet élément de R^m représente toutes les fonctions dont les m valeurs en X_i sont identiques

$$< \widehat{u}^h \, , \underbrace{(u - u^h)}_{e^h} >_* \quad = \quad 0, \qquad \forall \widehat{u}^h \in \mathcal{U}^h,$$

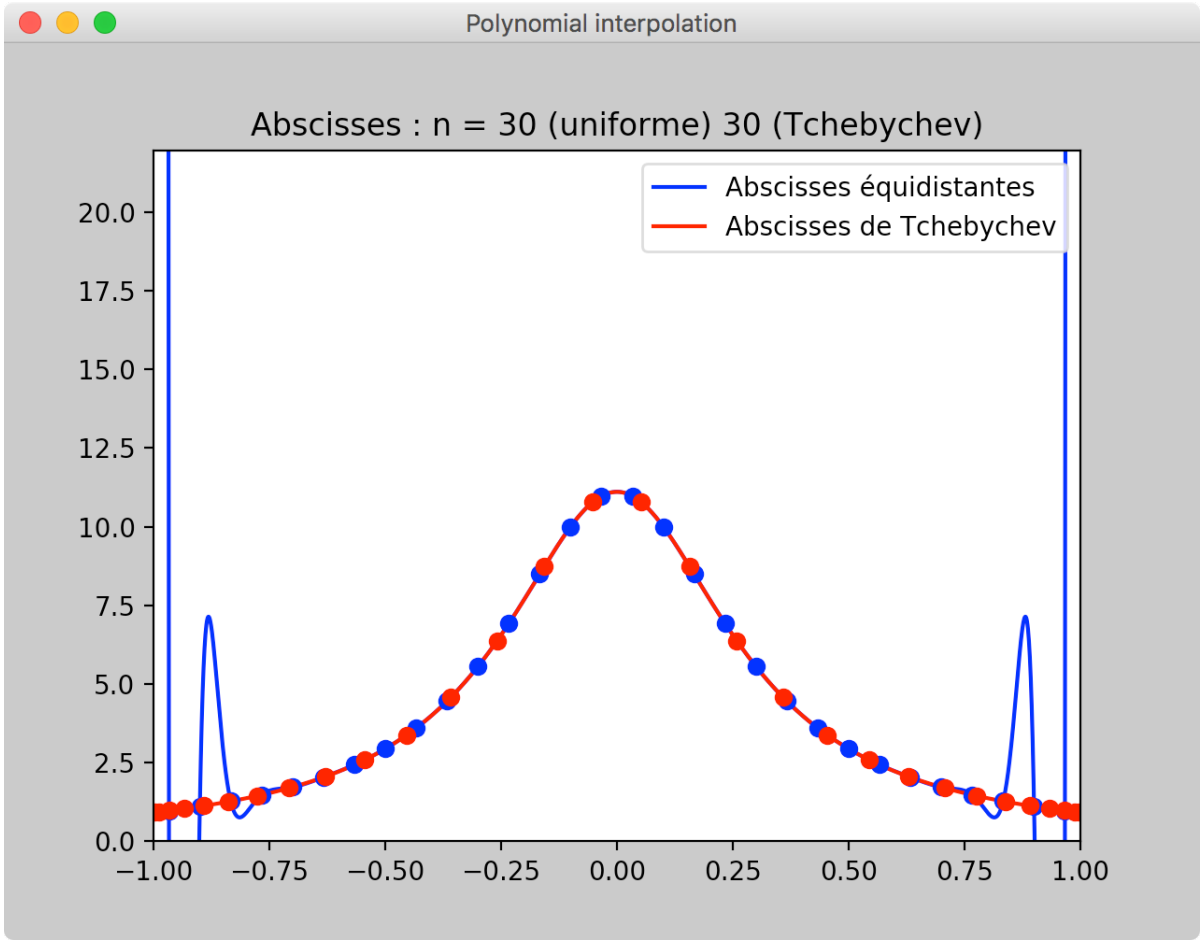
$$\sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i) \left(u(X_i) - \sum_{j=0}^{n} \phi_j(X_i) \; a_j \right) \quad = \quad 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i) \; \phi_j(X_i) \right) \; a_j \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} \phi_k(X_i) U_i \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Equations normales !

□

Implémenter l'interpolation polynomiale…



Une implémentation naïve mais qui fournit la bonne réponse…

```
def lagrange_naive(x,X,U):

  n = min(len(X),len(U))
  m = len(x)
  uh = zeros(m)
  phi = zeros(n)
  for j in range(m):
    uh[j] = 0
    for i in range(n):
      phi[i] = 1.0
      for k in range(n):
        if i != k:
          phi[i] = phi[i]*(x[j]-X[k])/(X[i]-X[k])
      uh[j] = uh[j] + U[i] * phi[i]
  return uh
```

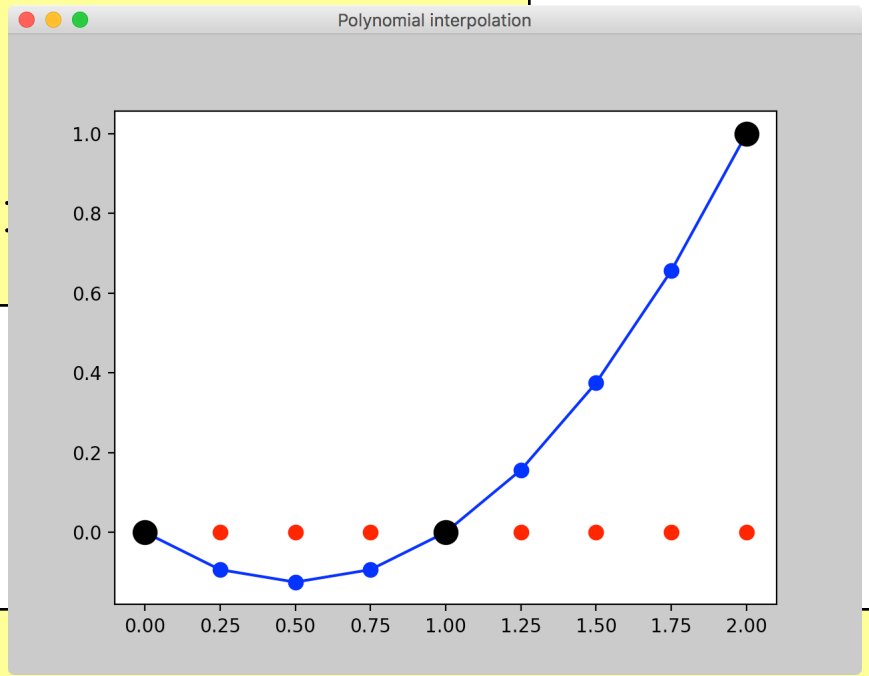
Pas si naïf que cela :
Implémentation robuste !
Pas d'erreur possible !

$$\phi_i(x) = \frac{(x - X_0)(x - X_1) \ \ldots \ (x - X_{i-1})(x - X_{i+1}) \ \ldots \ (x - X_n)}{(X_i - X_0)(X_i - X_1) \ldots (X_i - X_{i-1})(X_i - X_{i+1}) \ldots (X_i - X_n)}$$

```
def lagrange_naive(x,X,U):

  n = min(len(X),len(U))
  m = len(x)
  uh = zeros(m)
  phi = zeros(n)
  for j in range(m):
    uh[j] = 0
    for i in range(n):
      phi[i] = 1.0
      for k in range(n):
        if i != k:
          phi[i] = phi[i]*(x[j]-X[k])/(X[i]-X[k])
      uh[j] = uh[j] + U[i] * phi[i]
  return uh
```

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^{n} U_i \phi_i(x)$$

```
def lagrange_naive(x,X,U):

  n = min(len(X),len(U))
  ...
  for j in range(m):
    uh[j] = 0
    for i in range(n):
      ...
      uh[j] = uh[j] + U[i] * phi[i]
  return uh
```



x : c'est quoi ?

```
X = [0,1,2]
U = [0,0,1]
x = linspace(0,2,9)
uh = lagrange_naive(x,X,U);

plt.plot(x,zeros(size(x)),'.r',markersize=15)
plt.plot(x,uh,'.-b',markersize=15)
plt.plot(X,U,'.k',markersize=25)
```

Pourquoi est-ce naïf ?

```
x = linspace(-1,1,2000)
tic()
lagrange(x,[0,1,2],[0,1,2])
toc()
tic()
lagrange(x,[0,1,2],[0,1,2
toc()
```

```
Elapsed time is 0.000219 seconds
Elapsed time is 0.017949 seconds
```

```
x = linspace(-1,1,2000000
tic()
lagrange_naive(x,[0,1,2],[0,1,2])
...
```

```
Elapsed time is 1.415670 seconds
Elapsed time is 159.760674 seconds
```

CTRL-C

Pas de vectorisation :-(

Mais pré-allocation :-)

Suite de Pisano Fibonacci

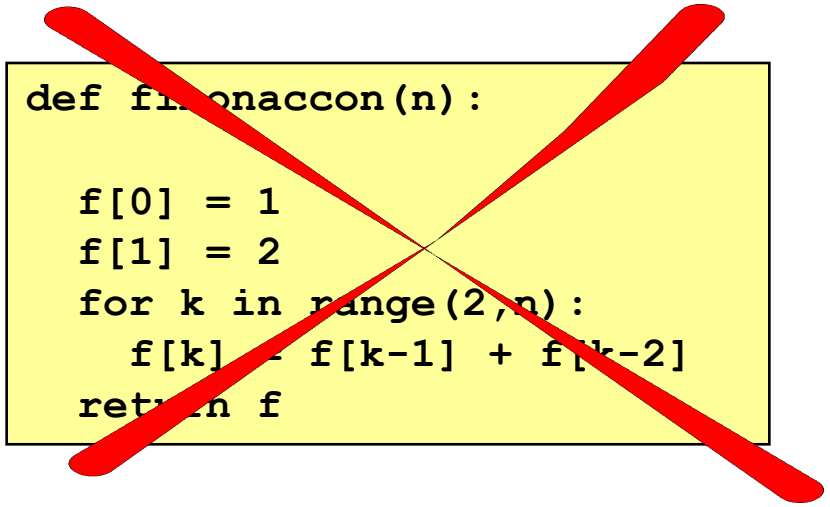
A man put a pair of rabbits in a place surrounded on all sides by a wall. How many pairs of rabbits can be produced from that pair if it is supposed that every month each pair begets a new pair which from the second month on becomes productive…

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

```
def fibonacci(n):
  f = zeros(n)
  f[0] = 1
  f[1] = 2
  for k in range(2,n):
    f[k] = f[k-1] + f[k-2]
  return f
```

Dans numpy, il faut toujours préallouer les tableaux…

```
def fibonacci(n):
  f = zeros(n)
  f[0] = 1
  f[1] = 2
  for k in range(2,n):
    f[k] = f[k-1] + f[k-2]
  return f
```



```
def fibonaccon(n):

  f[0] = 1
  f[1] = 2
  for k in range(2,n):
    f[k] = f[k-1] + f[k-2]
  return f
```

```
bash-3.2$ python fibonacci.py
Traceback (most recent call last):
  File "fibonacci.py", line 69, in <module>
    fibonacci(n)
  File "fibonacci.py", line 50, in fibonacci
    f[0] = 1
NameError: name 'f' is not defined
```

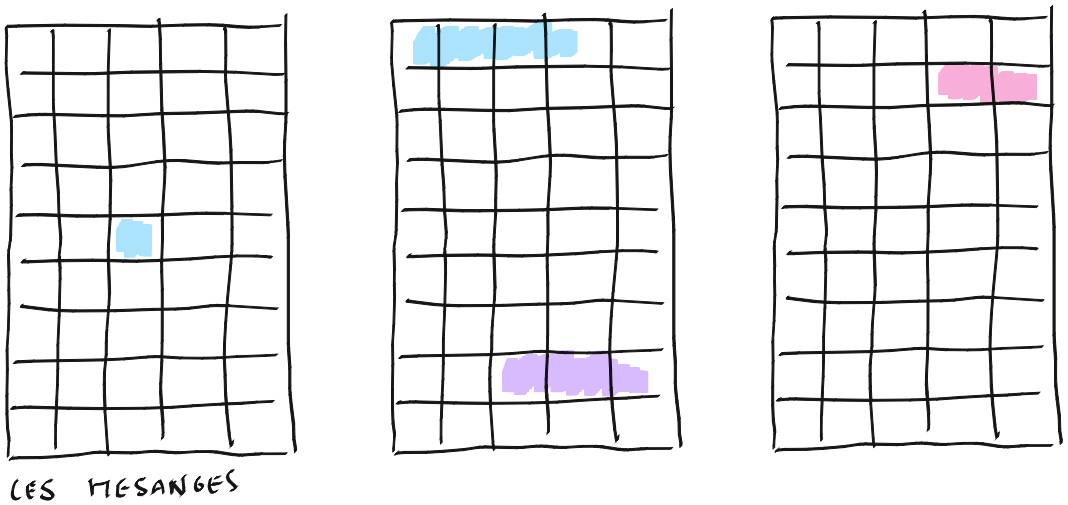
Et si tu veux vraiment pas pré-allouer les tableaux…

```
def fibonacci(n):
  f = zeros(n)
  f[0] = 1
  f[1] = 2
  for k in range(2,n):
    f[k] = f[k-1] + f[k-2]
  return f
```

```
def fibonaccon(n):

  f = [1,2]

  for k in range(2,n):
    f = append(f,[f[k-1] + f[k-2]])
  return f
```

```
bash-3.2$ python fibonacci.py
Elapsed time is 0.070130 seconds  (fibonacci)
Elapsed time is 10.754738 seconds  (fibonaccon)
```

```
n = 200000
tic()
fibonacci(n)
toc('fibonacci')
```



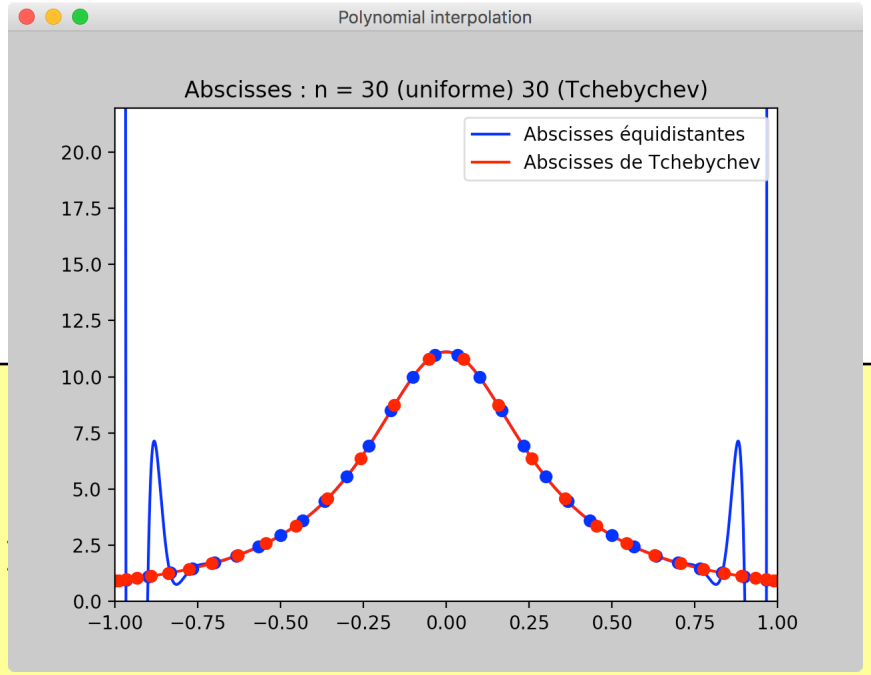
Logements sociaux à Charleroi

Ecrire le maximum d'opérations sous forme matricielle

```
U @ phi
```

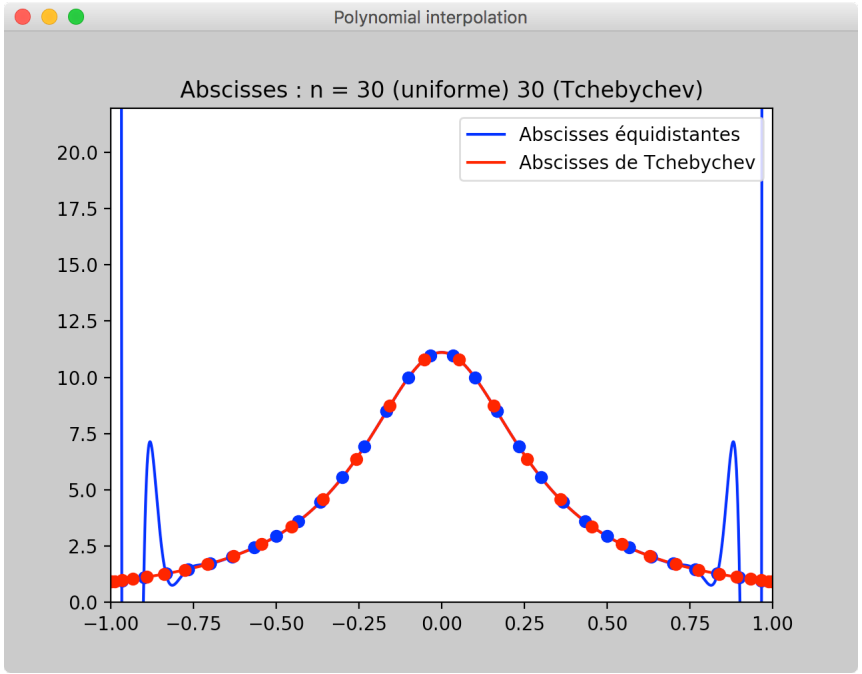
```
def lagrange(x,X,U):

  n = min(len(X),len(U))          # Evite un message d'erreur :-)
  phi = ones((n,len(x)))          # Preallocation (imposé !)
  for i in range(n):
    for k in list(range(0,i)) + list(range(i+1,n)):
      phi[i,:] = phi[i,:]*(x-X[k])/(X[i]-X[k])

  return U @ phi                  # Produit matriciel (plus rapide !)
```

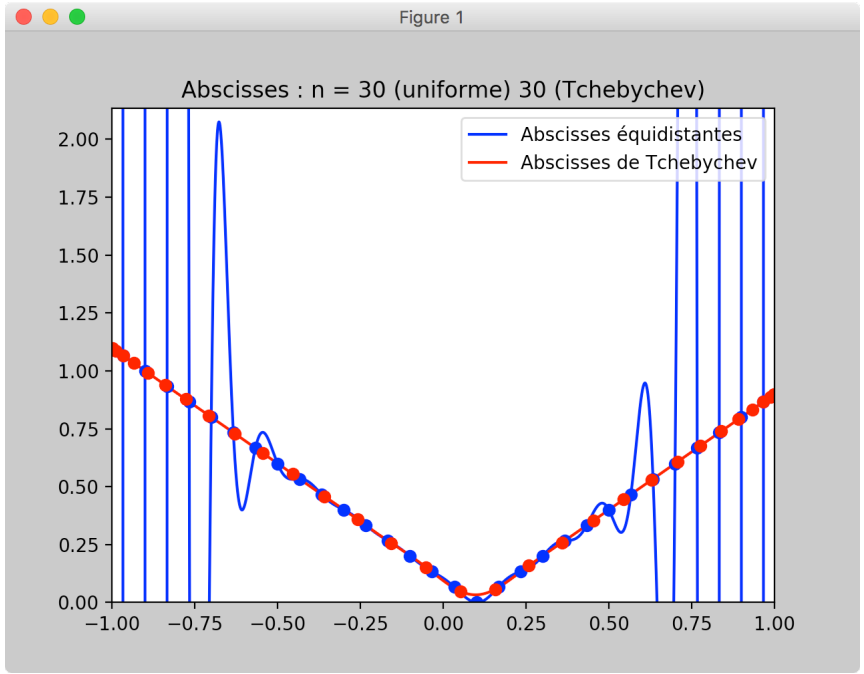
Obtenir la figure !




```
h = 1/n
x = linspace(-1,1,2000)
Xunif = arange(-1+h/2,1+h/2,h)
Xcheb = cos( pi*(2*arange(0,2*n)+1

u = lambda x : 1/(x**2 + 0.09)
Uunif = u(Xunif)
Ucheb = u(Xcheb)

plt.figure('Polynomial interpolation')
plt.plot(x,lagrange(x,Xunif,Uunif),'-b',label='Absc. équidistantes')
plt.plot(x,lagrange(x,Xcheb,Ucheb),'-r',label='Absc. de Tchebychev')
plt.plot(Xunif,Uunif,'ob',Xcheb,Ucheb,'or')
plt.xlim((-1,1))
plt.ylim((0,max(Uunif)*2))
plt.title('Abscisses : n = %d (uniforme) %d (Tchebychev)'
            % (len(Xunif),len(Xcheb)))
plt.legend(loc='upper right')
```

Obtenir deux figures…





Cool : ctrl-c / ctrl-v ☺

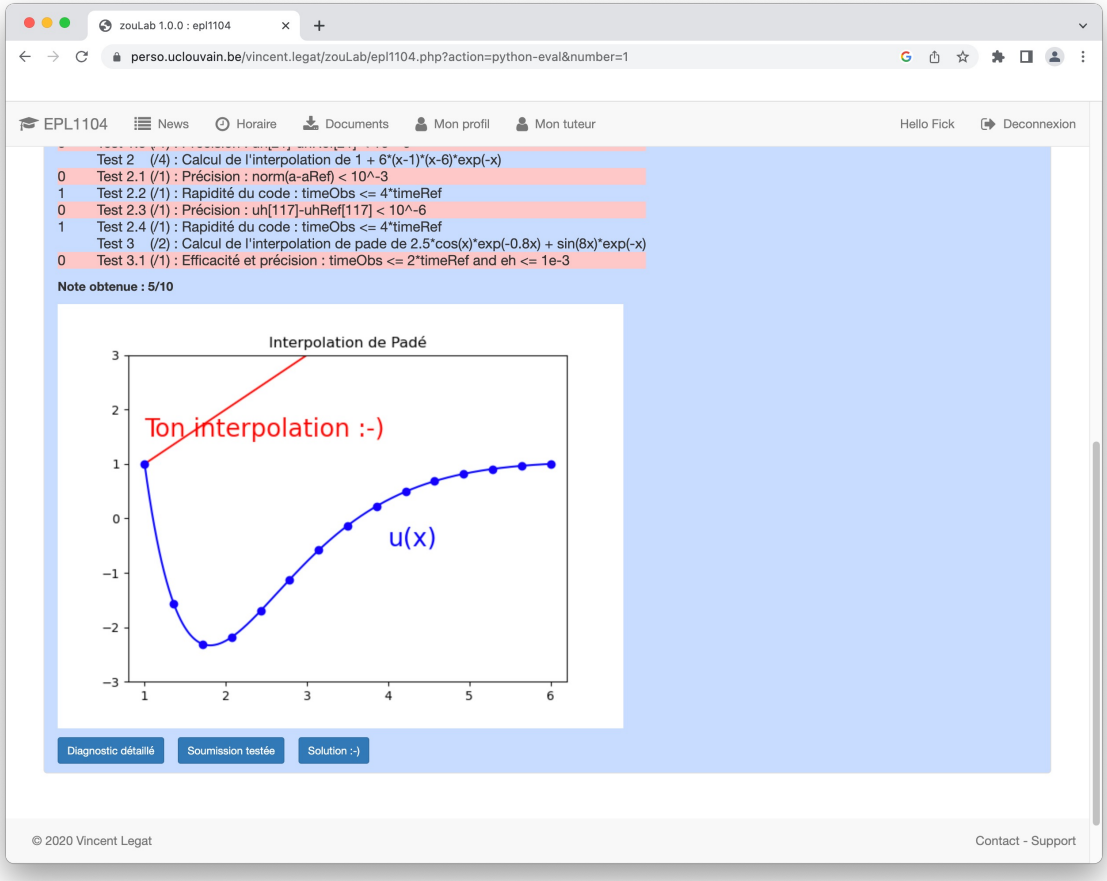
Ne jamais dupliquer du code !

```
functions = [lambda x : 1/(x**2 + 0.09),
             lambda x : abs(x - 0.1)]

for u in functions:
  Uunif = u(Xunif)
  Ucheb = u(Xcheb)
  plt.figure('Polynomial interpolation')
  plt.plot(x,lagrange(x,Xunif,Uunif),'-b', ...
  plt.plot(x,lagrange(x,Xcheb,Ucheb),'-r', ...
```

Les listes de Python peuvent contenir n'importe quoi et donc aussi des fonctions

Il faudra maintenir deux fois plus de lignes de code : c'est cher !

Votre premier devoir a été corrigé !



Votre premier devoir a été corrigé !

La correction et la solution du devoir 1 sont disponibles :-)

La correction et la solution du premier problème sont disponibles :

Solution :-)

Vous avez accès à votre note dans l'onglet

Evaluation devoir 1

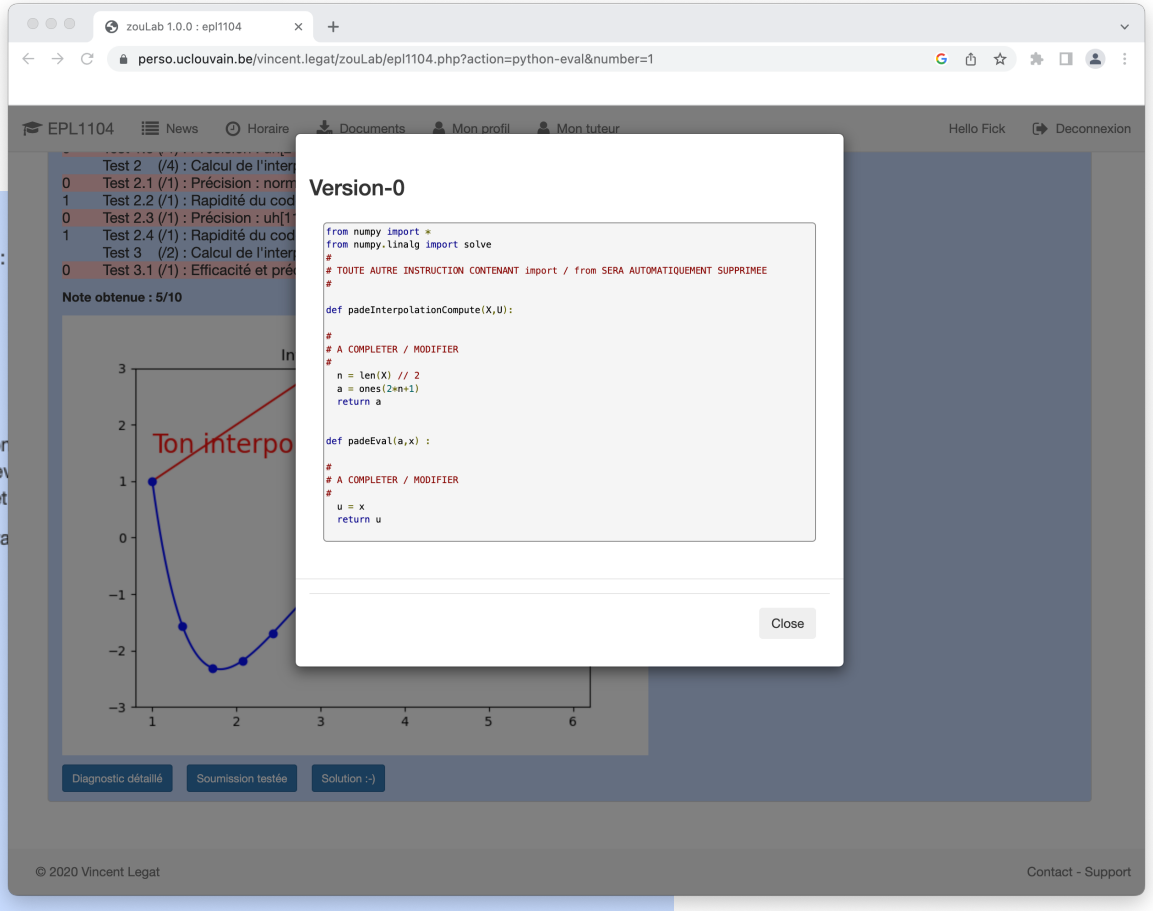
après identification. Si vraiment après vu la solution et la correction
exclusivement Nathan Coppin. Ne pas oublier qu'un point d'un dev
importance toute relative.... Attention, toute réclamation abusive et

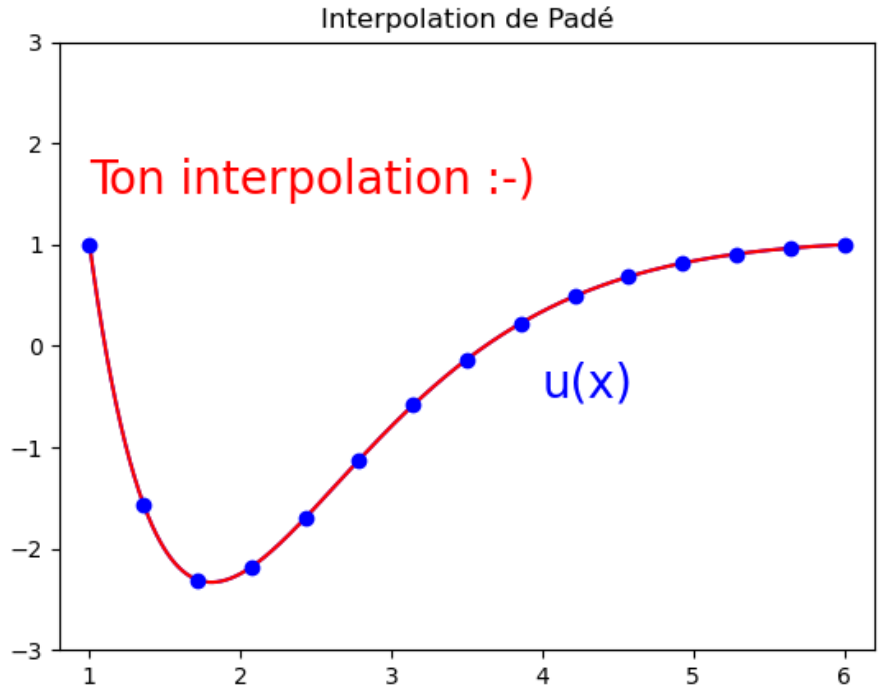
Il y a eu 351 soumissions : c'est bien et il ne faut pas vous découra

Les statistiques des résultats pour ce problème sont :

11/10 : 127 étudiant(e)s
10/10 : 2 étudiant(e)s
9/10 : 151 étudiant(e)s
8/10 : 1 étudiant(e)
7/10 : 9 étudiant(e)s
6/10 : 6 étudiant(e)s
5/10 : 14 étudiant(e)s
4/10 : 5 étudiant(e)s
2/10 : 1 étudiant(e)
1/10 : 17 étudiant(e)s
0/10 : 18 étudiant(e)s

(2023-02-19 20:45:31)



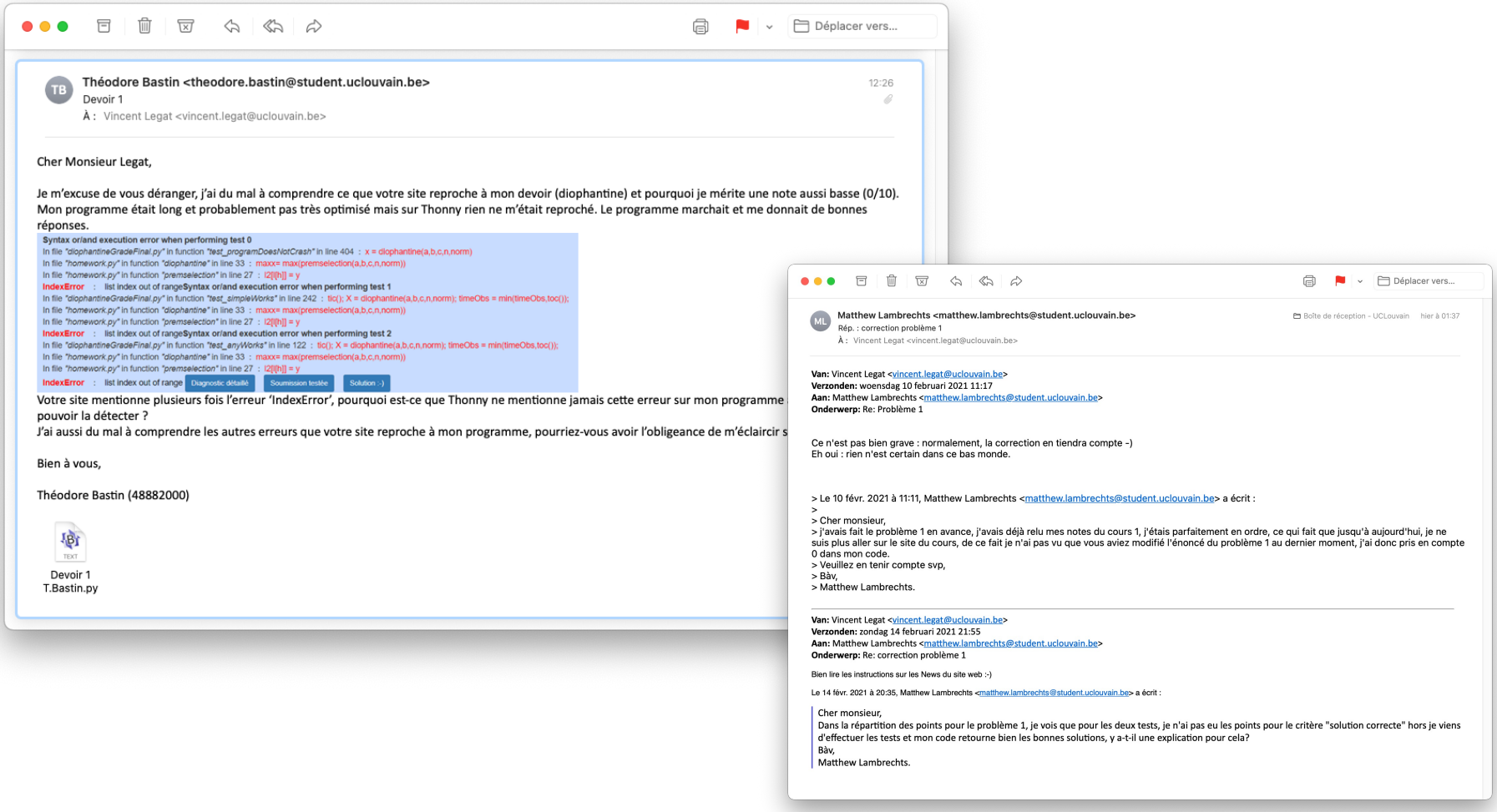


Monsieur !

Où est le SAV ?

Y a un problème !

I want my money back !



Déplacer vers...

Théodore Bastin <theodore.bastin@student.uclouvain.be>
Devoir 1
À : Vincent Legat <vincent.legat@uclouvain.be>
12:26

Cher Monsieur Legat,

Je m'excuse de vous déranger, j'ai du mal à comprendre ce que votre site reproche à mon devoir (diophantine) et pourquoi je mérite une note aussi basse (0/10). Mon programme était long et probablement pas très optimisé mais sur Thonny rien ne m'était reproché. Le programme marchait et me donnait de bonnes réponses.

Syntax or/and execution error when performing test 0
In file *"diophantineGradeFinal.py"* in function *"test_programDoesNotCrash"* in line 404 : x = diophantine(a,b,c,n,norm)
In file *"homework.py"* in function *"diophantine"* in line 33 : maxx= max(premselection(a,b,c,n,norm))
In file *"homework.py"* in function *"premselection"* in line 27 : l2[[h]] = y
IndexError : list index out of range**Syntax or/and execution error when performing test 1**
In file *"diophantineGradeFinal.py"* in function *"test_simpleWorks"* in line 242 : tic(); X = diophantine(a,b,c,n,norm); timeObs = min(timeObs,toc());
In file *"homework.py"* in function *"diophantine"* in line 33 : maxx= max(premselection(a,b,c,n,norm))
In file *"homework.py"* in function *"premselection"* in line 27 : l2[[h]] = y
IndexError : list index out of range**Syntax or/and execution error when performing test 2**
In file *"diophantineGradeFinal.py"* in function *"test_anyWorks"* in line 122 : tic(); X = diophantine(a,b,c,n,norm); timeObs = min(timeObs,toc());
In file *"homework.py"* in function *"diophantine"* in line 33 : maxx= max(premselection(a,b,c,n,norm))
In file *"homework.py"* in function *"premselection"* in line 27 : l2[[h]] = y
IndexError : list index out of range Diagnostic détaillé Soumission testée Solution :-)

Votre site mentionne plusieurs fois l'erreur 'IndexError', pourquoi est-ce que Thonny ne mentionne jamais cette erreur sur mon programme pouvoir la détecter ?
J'ai aussi du mal à comprendre les autres erreurs que votre site reproche à mon programme, pourriez-vous avoir l'obligeance de m'éclaircir s

Bien à vous,

Théodore Bastin (48882000)

Devoir 1
T.Bastin.py

Déplacer vers...

Matthew Lambrechts <matthew.lambrechts@student.uclouvain.be>
Rép. : correction problème 1
À : Vincent Legat <vincent.legat@uclouvain.be>
Boîte de réception - UCLouvain hier à 01:37

Van: Vincent Legat <vincent.legat@uclouvain.be>
Verzonden: woensdag 10 februari 2021 11:17
Aan: Matthew Lambrechts <matthew.lambrechts@student.uclouvain.be>
Onderwerp: Re: Problème 1

Ce n'est pas bien grave : normalement, la correction en tiendra compte -)
Eh oui : rien n'est certain dans ce bas monde.

> Le 10 févr. 2021 à 11:11, Matthew Lambrechts <matthew.lambrechts@student.uclouvain.be> a écrit :
>
> Cher monsieur,
> j'avais fait le problème 1 en avance, j'avais déjà relu mes notes du cours 1, j'étais parfaitement en ordre, ce qui fait que jusqu'à aujourd'hui, je ne suis plus aller sur le site du cours, de ce fait je n'ai pas vu que vous aviez modifié l'énoncé du problème 1 au dernier moment, j'ai donc pris en compte 0 dans mon code.
> Veuillez en tenir compte svp,
> Bàv,
> Matthew Lambrechts.

Van: Vincent Legat <vincent.legat@uclouvain.be>
Verzonden: zondag 14 februari 2021 21:55
Aan: Matthew Lambrechts <matthew.lambrechts@student.uclouvain.be>
Onderwerp: Re: correction problème 1

Bien lire les instructions sur les News du site web :-)

Le 14 févr. 2021 à 20:35, Matthew Lambrechts <matthew.lambrechts@student.uclouvain.be> a écrit :

> Cher monsieur,
> Dans la répartition des points pour le problème 1, je vois que pour les deux tests, je n'ai pas eu les points pour le critère "solution correcte" hors je viens d'effectuer les tests et mon code retourne bien les bonnes solutions, y a-t-il une explication pour cela?
> Bàv,
> Matthew Lambrechts.

Service après vente

Nathan est là !