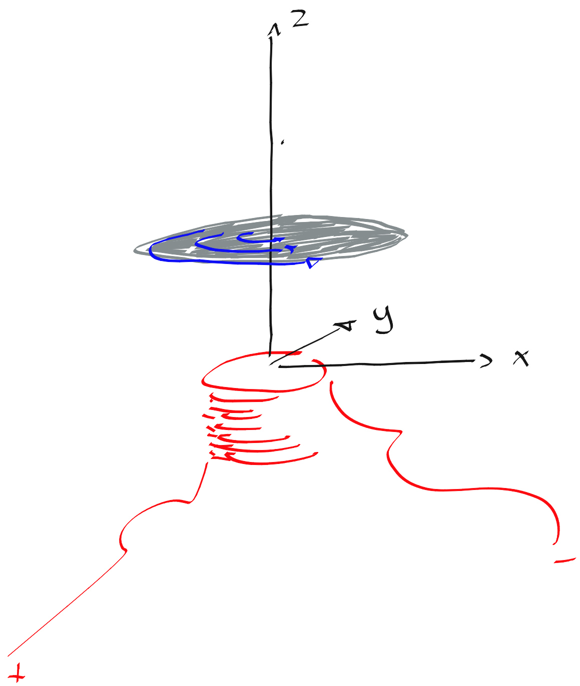
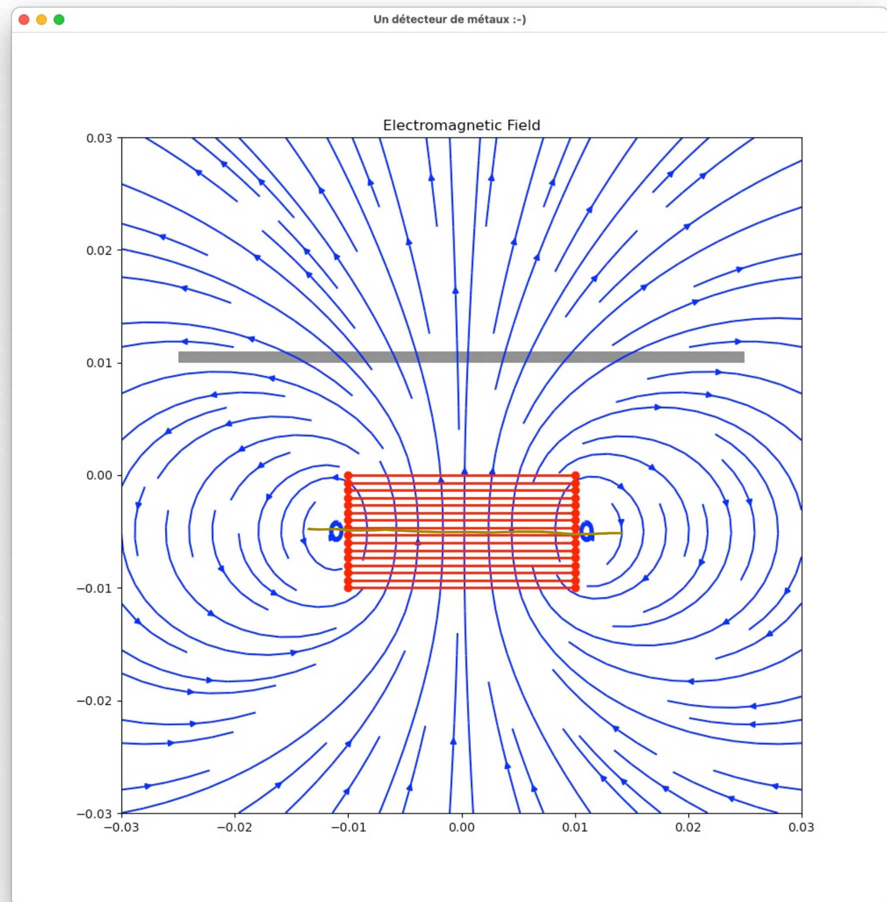
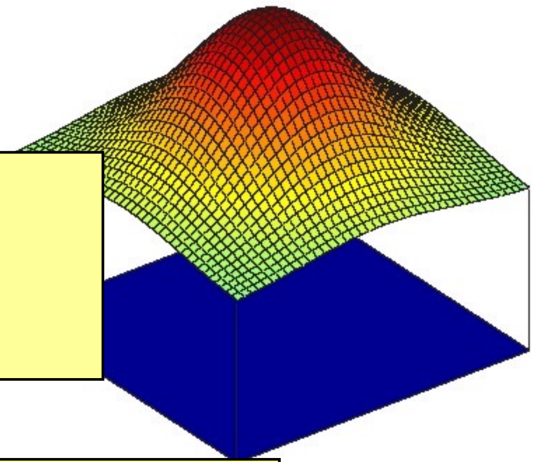
Un petit mot sur la journée de la femme !

Un petit mot sur le projet !





Plan du cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment approximer une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Intégration numérique

Quadrature :

On estime l'intégrale définie I en effectuant une somme pondérée des valeurs u(X_i)

$$I = \int_a^b u(x)\, dx$$

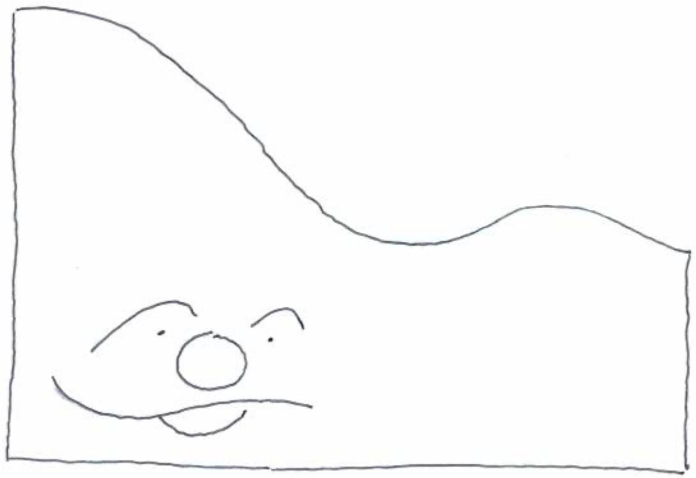
Abscisses d'intégration calculées a priori

$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i)$$

Poids calculés a priori

$$E^h = I - I^h$$

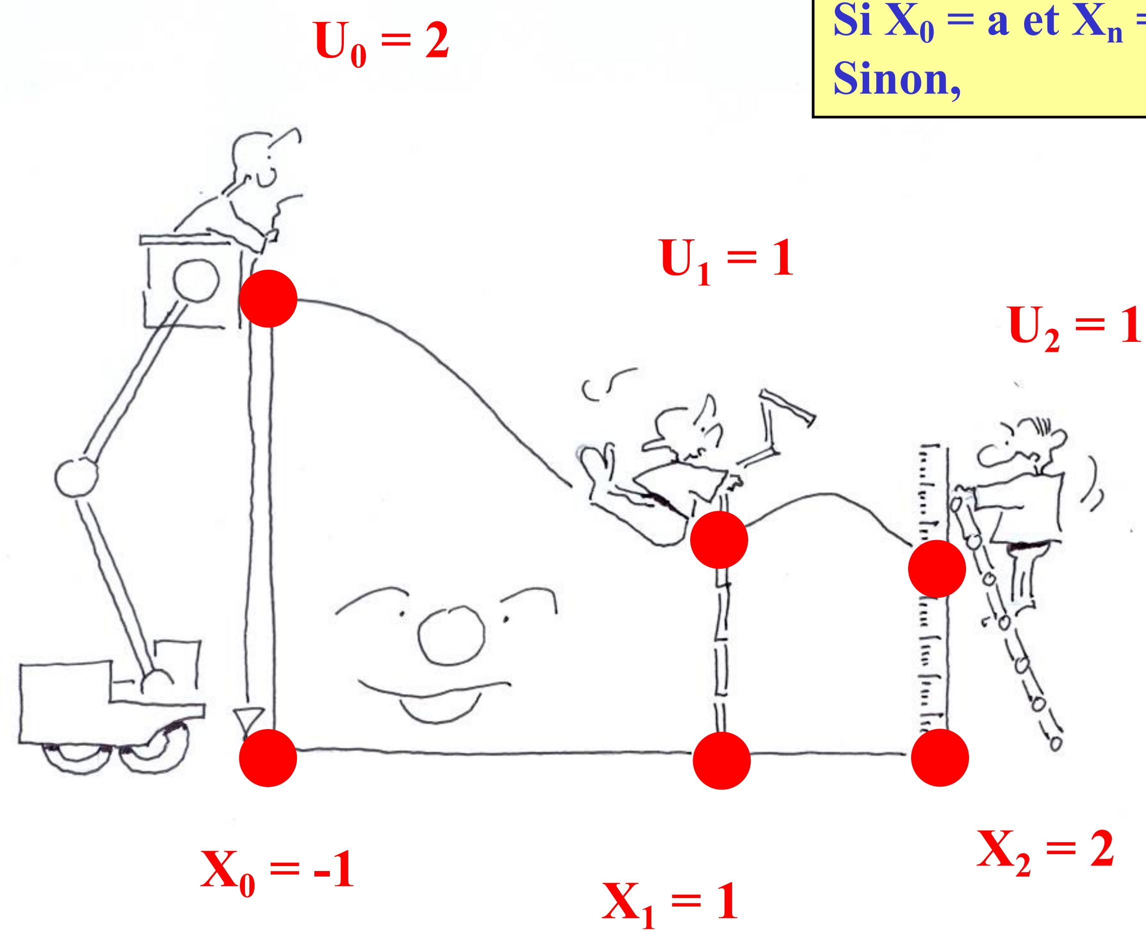
Une surface à intégrer….



Comment l'intégrer sur un ordinateur ?

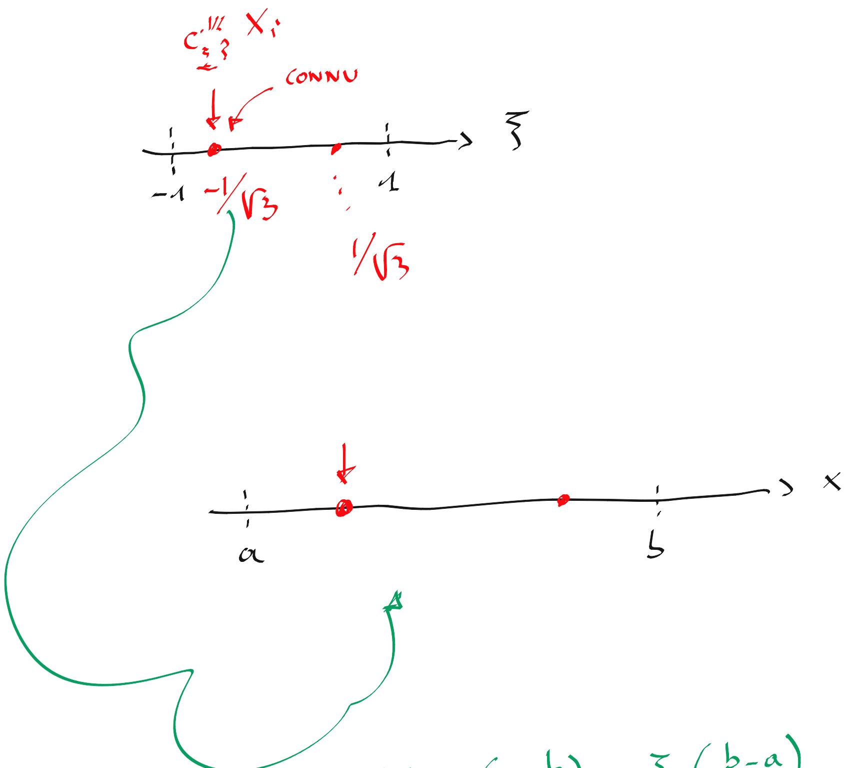
Prise de mesures…

Si $X_0 = a$ et $X_n = b$, méthode fermée
Sinon, méthode ouverte



$$I^h = \sum w_i \, f(\underbrace{x_i}_{\in [-1,1]})$$

Standardisons !



$$x(\xi) = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \xi\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

AUSSI :-)

$$x(\xi) = a\,\underbrace{\phi_{-1}(\xi)}_{\frac{(1-\xi)}{2}} + b\,\underbrace{\phi_1(\xi)}_{\frac{(1+\xi)}{2}}$$

$$= a\,\frac{(1-\xi)}{2} + b\,\frac{(1+\xi)}{2}$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)\xi + \left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b u(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(\xi)\,\underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_{\text{JACOBIEN} \,=\, \frac{(b-a)}{2}}\,d\xi$$

Simplifions, standardisons, …

$$\boxed{x(\xi) = \frac{(b-a)}{2}\,\xi + \frac{(b+a)}{2}}$$

$$I \;=\; \int_a^b u(x)\,dx \;=\; \int_{-1}^{1} u(x(\xi))\,\frac{dx}{d\xi}\,d\xi \;=\; \underbrace{\int_{-1}^{1} u(x(\xi))\,d\xi}_{\approx \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(x(\Xi_i))} \;\frac{(b-a)}{2}$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :

Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :

Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :

Extrapolation de Richardson

Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :

ou les méthodes numériques intelligentes…

Avec l'interpolation polynomiale, tout est facile…

$$I \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)\,dx}^{I^h}$$

$$\downarrow$$

$$\approx \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} u(X_i)\phi_i(x)\,dx$$

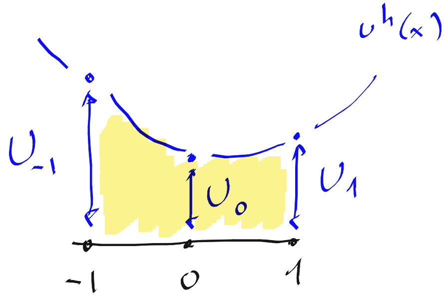
$$\downarrow$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\,dx}_{w_i}$$

$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx U_{-1} + U_1$ (méthode des trapèzes)	$d = 1$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{3}U_{-1} + \frac{4}{3}U_0 + \frac{1}{3}U_1$ (méthode de Simpson)	$d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{4}U_{-1} + \frac{3}{4}U_{-1/3} + \frac{3}{4}U_{1/3} + \frac{1}{4}U_1$ (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$)	$d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{7}{45}U_{-1} + \frac{32}{45}U_{-1/2} + \frac{12}{45}U_0 + \frac{32}{45}U_{1/2} + \frac{7}{45}U_1$ (méthode de Boole)	$d = 5$

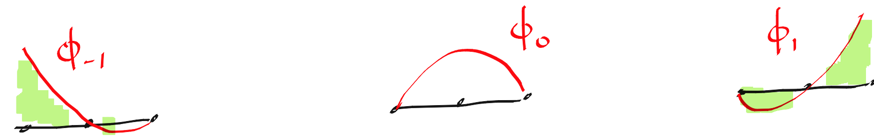
Quelques pages du grimoire de Gargamel

Sur l'intervalle standard…

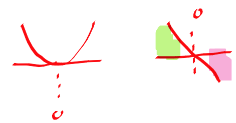


SIMPSON

$$I^h = U_{-1}\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)\,x}{2} + U_0\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)(x+1)}{-1} + U_1\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)\,x}{2}$$



$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2} = \underbrace{\left[\frac{x^3}{6}\dots\right]_{-1}^{1}}_{\frac{1}{3}}$$



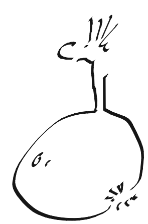
$1/3$

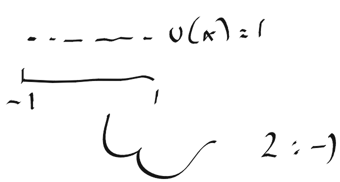
$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{-1}+\frac{-1}{-1} = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{2}{3}+2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$$

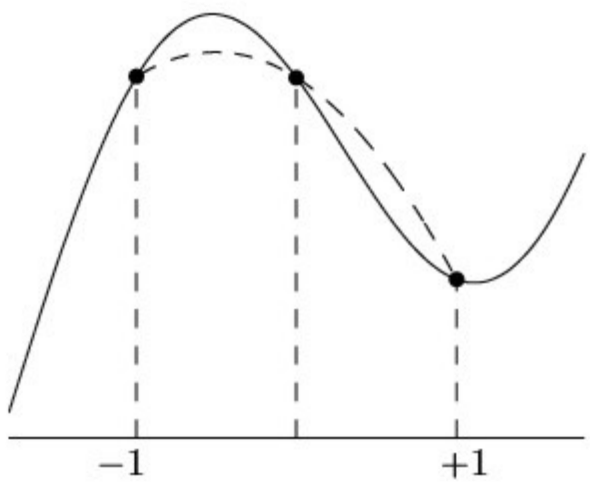
$$\boxed{I^h = \frac{U_{-1}+4U_0+U_1}{3}}$$

SANITY CHECK $\quad u = 1$





Comment obtenir les formules magiques ?



$$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)dx}^{I^h}$$

$$\approx \sum_{i=0}^{2} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)dx}_{w_i}$$

En fixant $X_0 = -1$, $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$

$$\approx U(-1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\, dx}_{w_0}$$

$$+ U(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)(x+1)}{-1}\, dx}_{w_1}$$

$$+ U(1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\, dx}_{w_2}$$

Calcul des poids

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \\
w_1 &= \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
w_2 &= \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Avec une interpolation de degré 2, on intègre exactement un polynôme de degré 3….

$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \; x^i \; dx \;=\; \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j} \; x^{2j} dx \;+\; \underbrace{\int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \; x^{2j+1} \; dx}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n} a_i \; x^i \; dx$$

Une formule symétrique développée pour un degré n pair a un degré de précision n+1

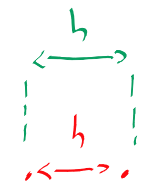
L'intervalle d'intégration ne doit pas être symétrique !
Le changement de variable ne change en rien la précision de la méthode.

Introduisons le symbole h

Trapèzes ***h = (b-a)***
Simpson ***h = (b-a)/2***
Boole ***h = (b-a)/4***

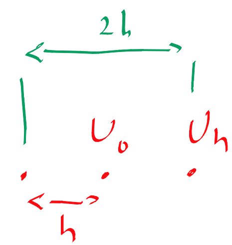
$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right)$$

(méthode des trapèzes) $d = 1$



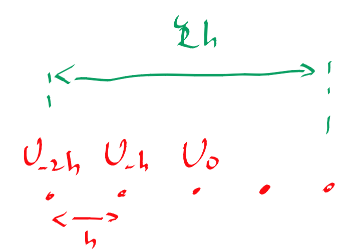
$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(U_{-h} + 4\,U_0 + U_h\right)$$

(méthode de Simpson) $d = 3$

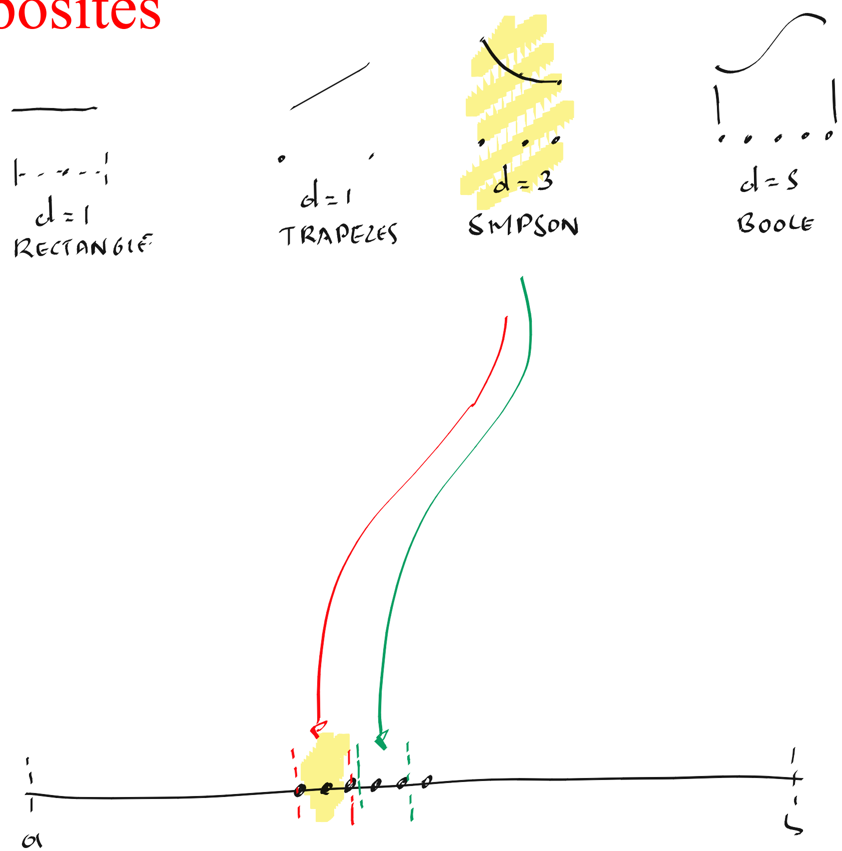


$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right)$$

(méthode de Boole) $d = 5$



Méthodes composites

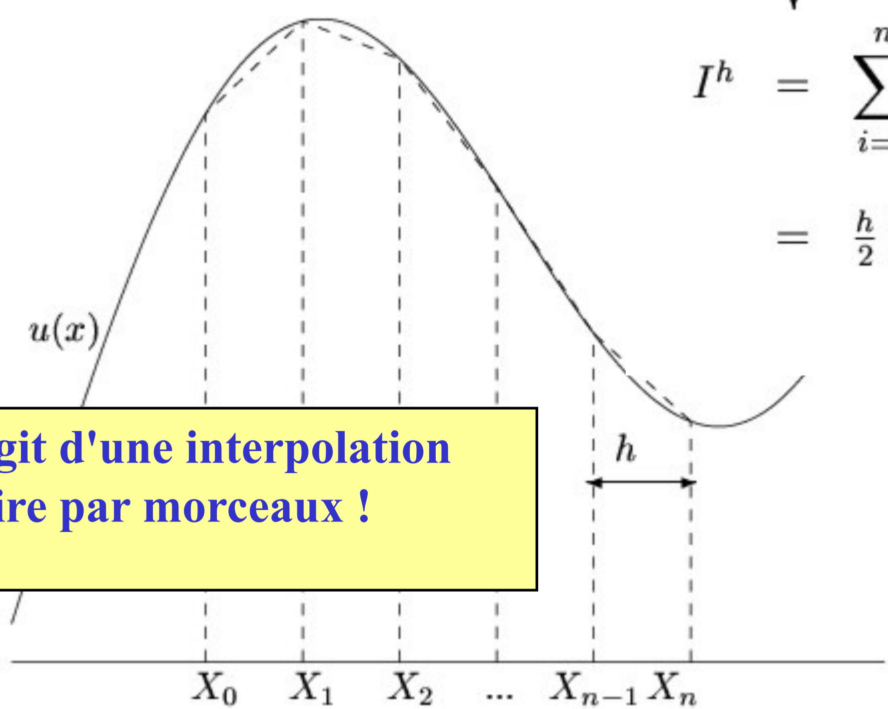


Méthode composite des trapèzes

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{X_0}^{X_n} u(x)\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{i-1}}^{X_i} u(x)\ dx
\end{aligned}
$$

En utilisant la règle des trapèzes (2.7) pour chaque sous-intervalle

$$
\begin{aligned}
I^h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\ (U_{i-1} +\ U_i) \\
&= \tfrac{h}{2}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + \ldots + 2U_{n-1} + U_n)
\end{aligned}
$$



Il s'agit d'une interpolation linéaire par morceaux !

Méthode composite de Simpson

$$I = \int_{X_0}^{X_{2n}} u(x)\, dx$$

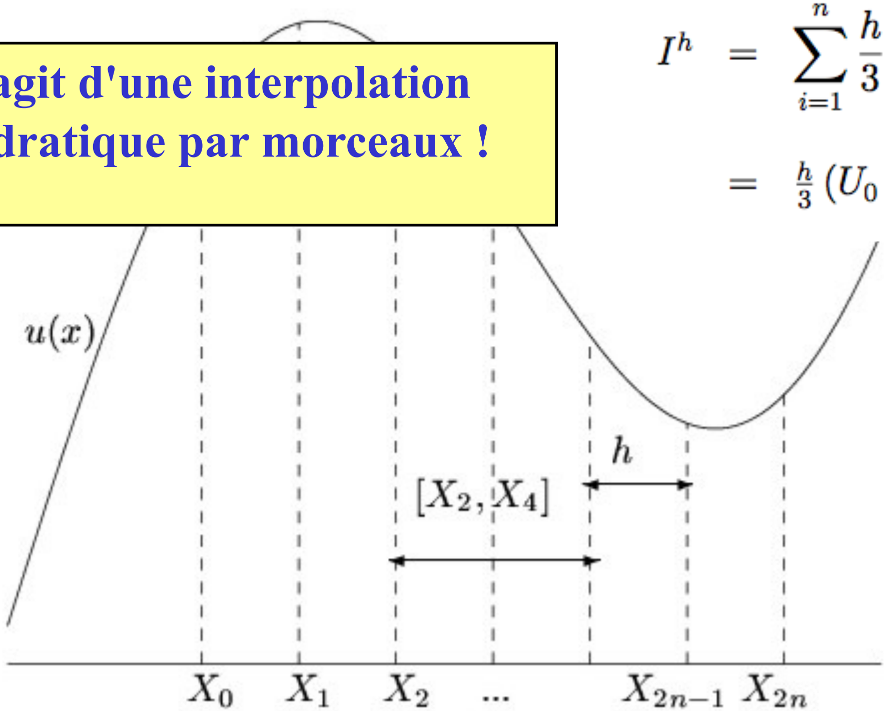
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{2i-2}}^{X_{2i}} u(x)\, dx$$

En utilisant la règle de Simpson (2.4) pour chaque sous-intervalle

$$I^h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{3} \left(U_{2i-2} + 4\, U_{2i-1} + \, U_{2i}\right)$$

$$= \tfrac{h}{3} \left(U_0 + 4U_1 + 2U_2 + 4U_3 + 2U_4 + \ldots + 4U_{2n-1} + U_{2n}\right)$$

Il s'agit d'une interpolation quadratique par morceaux !



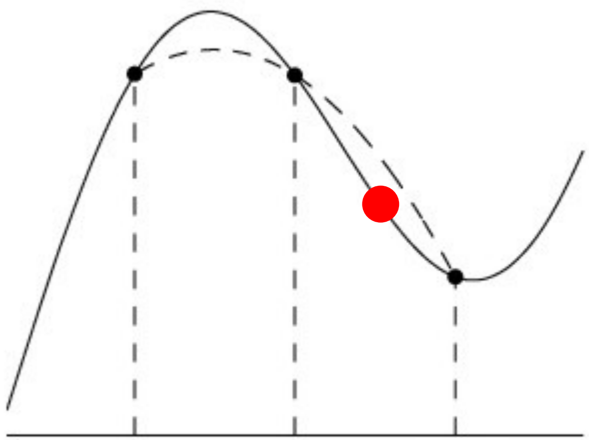
n intervalles juxtaposés de longueur 2h
2n+1 abscisses d'intégration

Comment estimer l'erreur d'intégration ?

Erreur de l'interpolation polynomiale $e^h(x)$

Erreur de l'intégration numérique $E^h(x)$

Simpson intègre parfaitement un polynôme de degré 3…



Erreur d'interpolation

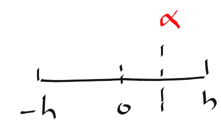
$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.

Erreur d'intégration pour Simpson !

$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.



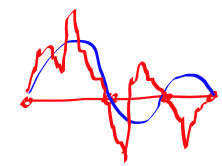
$h \to 0$

ERREUR ASYMPTOTIQUE

$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u''''(\xi_i)}{4!}(x-h)(x+h)\,x\,(x-\alpha)\,dx$$

$\xi_i(x)$

SIMPLIFIONS $\xi_i(x) \simeq \xi_i$



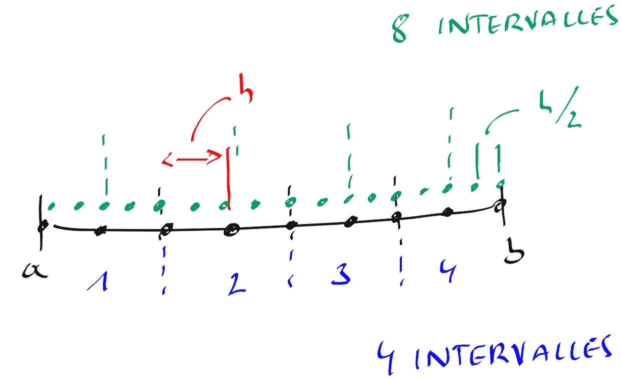
$$\leq n\frac{C_4}{24}\left|\int_{-h}^{h}\underbrace{(x-h)(x+h)x^2}_{x^4-h^2x^2}\,dx - \underbrace{\alpha\int_{-h}^{h}\underbrace{(x-h)(x+h)x}_{x^3-h^2x}\,dx}_{=0}\right|$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{h^2x^3}{3}\right]_{-h}^{h}$$

$$= h^5\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right] = h^5\left[\frac{6-10}{15}\right] = -\frac{4}{15}h^5$$

$$\leq n\frac{C_4}{90}h^5$$

Ordre de précision



$$E^h \leq \underbrace{\frac{n\, C_4}{90}}_{n(h)}\, h^5$$

$\cancel{O(h^5)}$

~~NON :-)~~

$$2nh = (b-a)$$

$$n = \frac{(b-a)}{2h}$$

$$E^h \leq \underbrace{\frac{(b-a)}{180}\, h^4}_{O(h^4)}$$

ORDRE PRECISION SIMPSON $= 4$

$\underbrace{\text{DEGRE DE PRECISION}}_{3}$

$4 = 3 + 1$

Degré de précision

Ordre de précision de Simpson

$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u^{(4)}(\xi_i)}{4!} (x-h)x(x+h)(x-\boxed{\alpha})\, dx$$

En définissant $C_4 = \max_i \left|u^{(4)}(\xi_i)\right|$

$$\begin{aligned}
\left|E^h\right| &\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h} (x-h)x(x+h)(x-\boxed{\alpha})\, dx\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h} x^2(x-h)(x+h)\, dx - \boxed{\alpha}\underbrace{\int_{-h}^{h} (x-h)x(x+h)\, dx}_{=0}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{h^2x^3}{3}\right]_{-h}^{h}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{90}h^5
\end{aligned}$$

$O(\mathrm{h}^5)$,
Monsieur ?

Nenni, nein, neen : $O(h^4)$ only !

$$\leq \quad n\frac{C_4}{90}h^5$$

Car $2nh = (b-a)$ pour une méthode composite de Simpson

$$\leq \quad (b-a)\frac{C_4}{180}h^4$$

$$\boxed{|E^h| \quad \leq \quad \frac{C_4(b-a)}{180}\,h^4}$$

n et h sont deux paramètres liés entre eux !
En d'autres mots, n n'est pas une constante, mais une fonction de h !

n(h) = (b-a)/2h

Degré de précision = 3
Ordre de précision = 4

Combien de sous-intervalles pour obtenir une précision donnée ?

$$
\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx &= \tfrac{h}{2}\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right) - \tfrac{h^3}{12}u^{(2)}(\xi) \\
|E^h| &\leq \frac{C_2(b-a)}{12}\, h^2 \qquad \text{(méthode des trapèzes)} \quad \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} u(x)dx &= \tfrac{h}{3}\left(U_{-h} + 4\,U_0 + U_h\right) - \tfrac{h^5}{90}u^{(4)}(\xi) \\
|E^h| &\leq \frac{C_4(b-a)}{180}\, h^4 \qquad \text{(méthode de Simpson)} \quad \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-2h}^{2h} u(x)dx &= \tfrac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right) - \tfrac{8h^7}{945}u^{(6)}(\xi) \\
|E^h| &\leq \frac{2C_6(b-a)}{945}\, h^6 \qquad \text{(méthode de Boole)} \quad \mathcal{O}(h^6)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{C_2}{12}\, n\, \frac{(b-a)^3}{n^3} \leq \epsilon
$$

$$
\sqrt{\frac{C_2(b-a)^3}{12\epsilon}} \leq n
$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :

Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :

Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :

Extrapolation de Richardson

Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :

ou les méthodes numériques intelligentes…

Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k\, p(X_k)$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i \int_{-1}^{1} x^i\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i X_k^i$$

$n+1$ POINTS

IL DEVRAIT ETRE POSSIBLE D'INTEGRER UN POLYNOME DE DEGRE $2n+1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^{2j}}_{\frac{2}{2j+1}} +} \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^{2j+1}}_{=0}} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j}} + \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}}$$

CAS PARTICULIER

$n = 1$

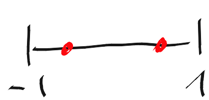
$$\begin{cases} X_0^3 w_0 + X_1^3 w_1 = 0 \ \checkmark \\ X_0^2 w_0 + X_1^2 w_1 = \frac{2}{3} \\ X_0 w_0 + X_1 w_1 = 0 \ \checkmark \\ w_0 + w_1 = 2 \ \checkmark \end{cases}$$

$$2X_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$X_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_0 = w_1 = 1$$

$$X_0 = -X_1$$



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2}{2j+1} &= \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j+1} \\ & j = 1 \dots n \end{aligned}}$$

LES EQUATIONS A RESOUDRE !

Méthodes à pas inégaux : Gauss-Legendre

Simpson sur un intervalle
Degré de précision = 3
Nombre de points = 3

Choisir des abscisses équidistantes n'est pas le meilleur choix !

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k p(X_k) \ ,$$

En développant le polynôme,

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \int_{-1}^{1} a_i\, x^i\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\, X_k^i$$

Gauss-Legendre sur un intervalle
Degré de précision = 2n+1
Nombre de points = n+1

En séparant les termes pairs et impairs,

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j} x^{2j}\, dx + \sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j+1} x^{2j+1}\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

GAUSS
LEGENDRE
$n = 2$

DEGRE = 5

En effectuant les intégrales,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j+1)} a_{2j} \quad + \quad 0 = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

Calcul des abscisses de Gauss-Legendre

$$
\begin{aligned}
(X_0^3\ w_0 + X_1^3\ w_1) &= 0,\\
(X_0^2\ w_0 + X_1^2\ w_1) &= 2/3,\\
(X_0\ w_0 + X_1\ w_1) &= 0,\\
(w_0 + w_1) &= 2,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
w_0 &= w_1 = 1,\\
-X_0 &= X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
}
$$

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

La manière la plus efficace et la plus précise d'intégrer sur un intervalle donné (et borné!) un polynôme de degré 2n+1 dont on connaît les coefficients est d'utiliser une règle de Gauss-Legendre avec n+1 points.

Vrai ou Faux ?

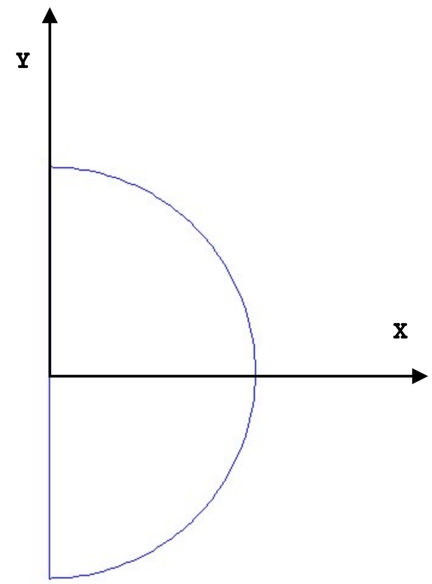
Evaluation S7 : vrai ou faux…

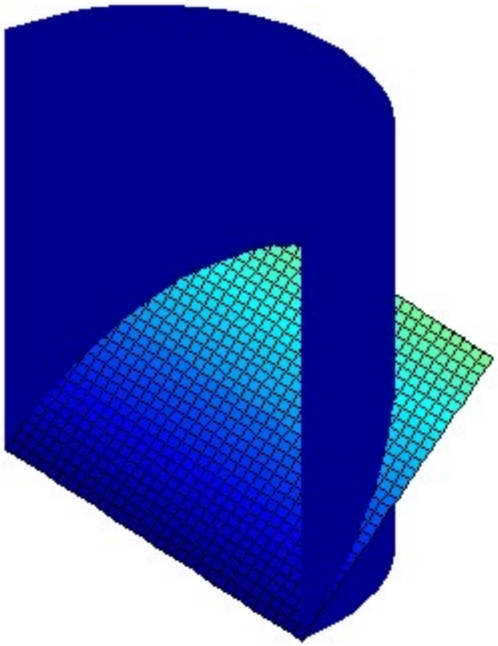
Un petit exemple en 2D…

Quelle est la valeur de l'intégrale double

$$I = \int_D x \, dx \, dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$?

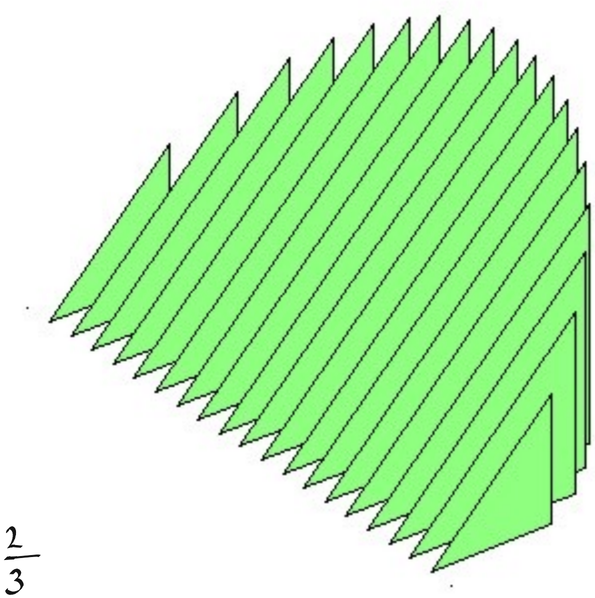


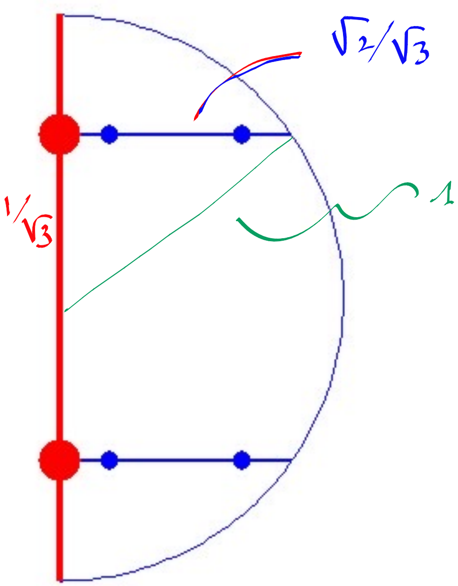


D'abord les x, puis les y…

$$I = \int_{-1}^{1} \underbrace{\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{}}} \, dy$$

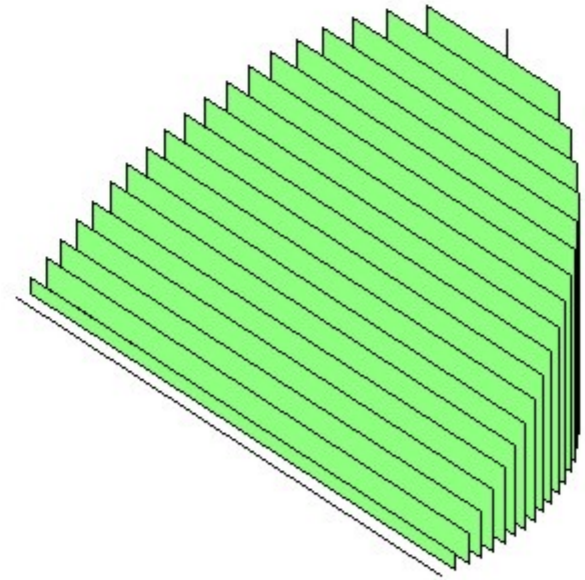
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$





$$I_h = 2 \, \frac{1}{2} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

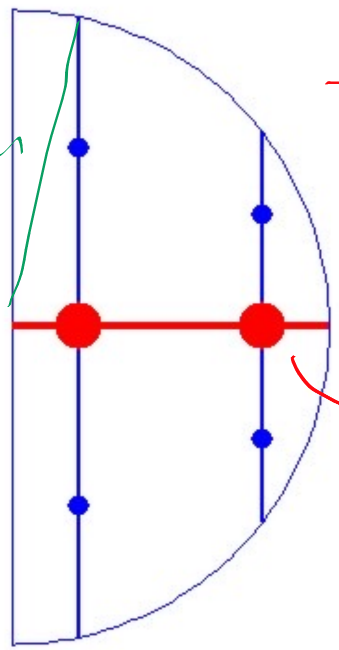
D'abord les y, puis les x…



$$I = \int_0^1 x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \; dx$$

$$= -\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2} \; dx$$

$$- \left[(1-x^2)^{3/2} \, \frac{2}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



2 ~

$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.

$I^h = 0,69 \simeq \frac{2}{3}$

D'abord les x puis les y…

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

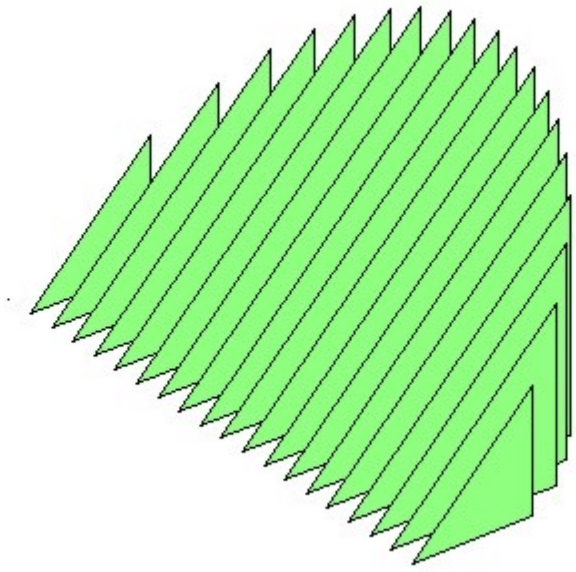
$\downarrow$ En intégrant le long de x pour chaque y

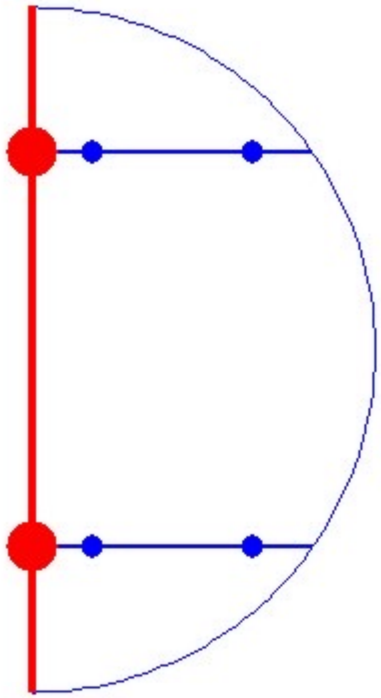
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy$$

$\downarrow$ En intégrant le long de y

$$= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_{y=-1}^{y=1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

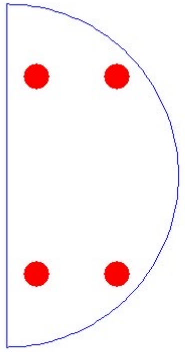




…et numériquement ?

$$I = \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du triangle en}\\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du triangle en}\\ y = +\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}$$



D'abord les y, puis les x…

$$I = \int_0^1 x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

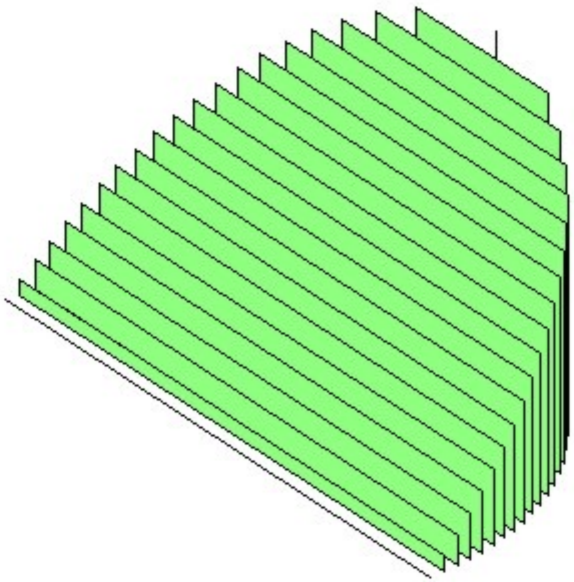
$\downarrow$ En intégrant le long de y pour chaque x

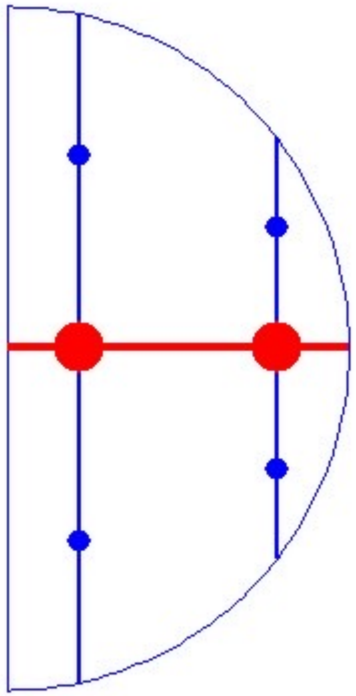
$$= \int_0^1 x \left[y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

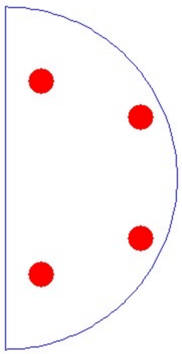
$\downarrow$ En intégrant le long de x

$$= \left[\frac{-2}{3} \left(1-x^2\right)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$$





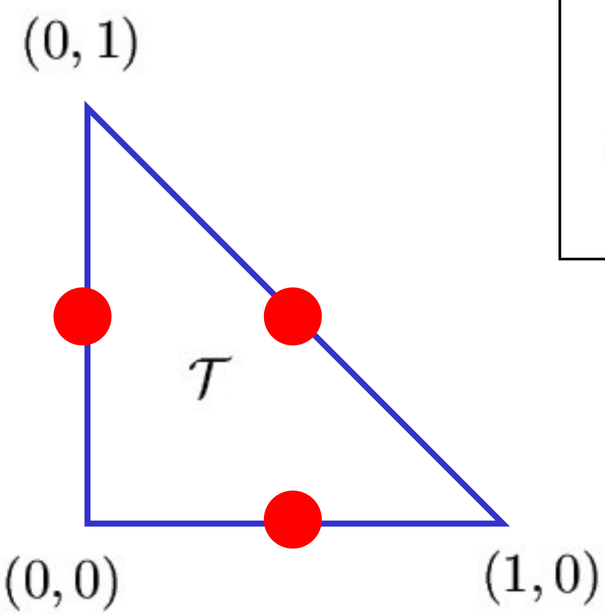
…et numériquement ?



$$I = \frac{1}{2}\left(\boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du rectangle en}\\ x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du rectangle en}\\ x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\end{array}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.6914 \simeq \frac{2}{3}$$

Intégration sur un triangle : Règle de Hammer à 3 points



$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x,y)\ dx\ dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{3} w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}$$

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

Interrogation (mai 2003)

Démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux : $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$

Question

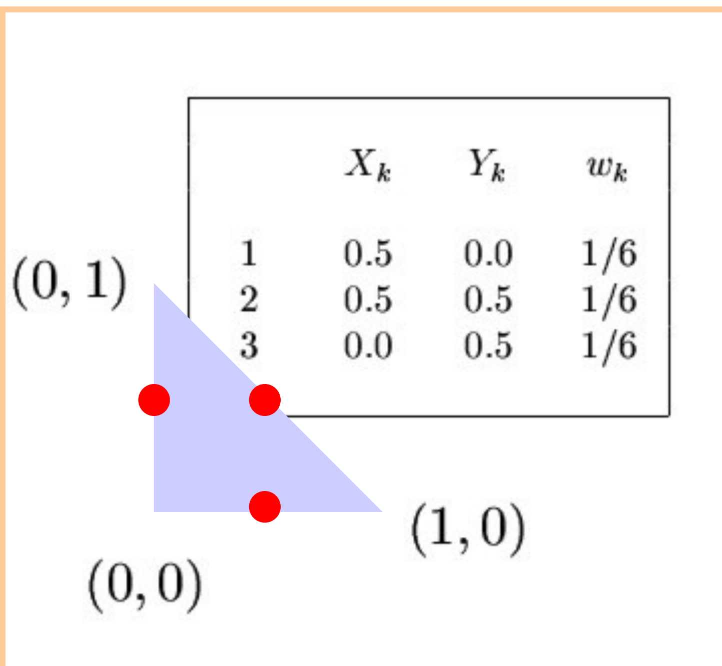
$$\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2} + b\int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\; dx + c\int_0^1 y \int_0^{1-y} dx\; dy \\
&\quad + d\int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy\; dx + e\int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} dx\; dy + f\int_0^1 x \int_0^{1-x} y\; dy\; dx \\
&= \frac{a}{2} + b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + c\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&\quad + d\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + e\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + f\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24} \\
&= I^h
\end{aligned}$$

$\square$

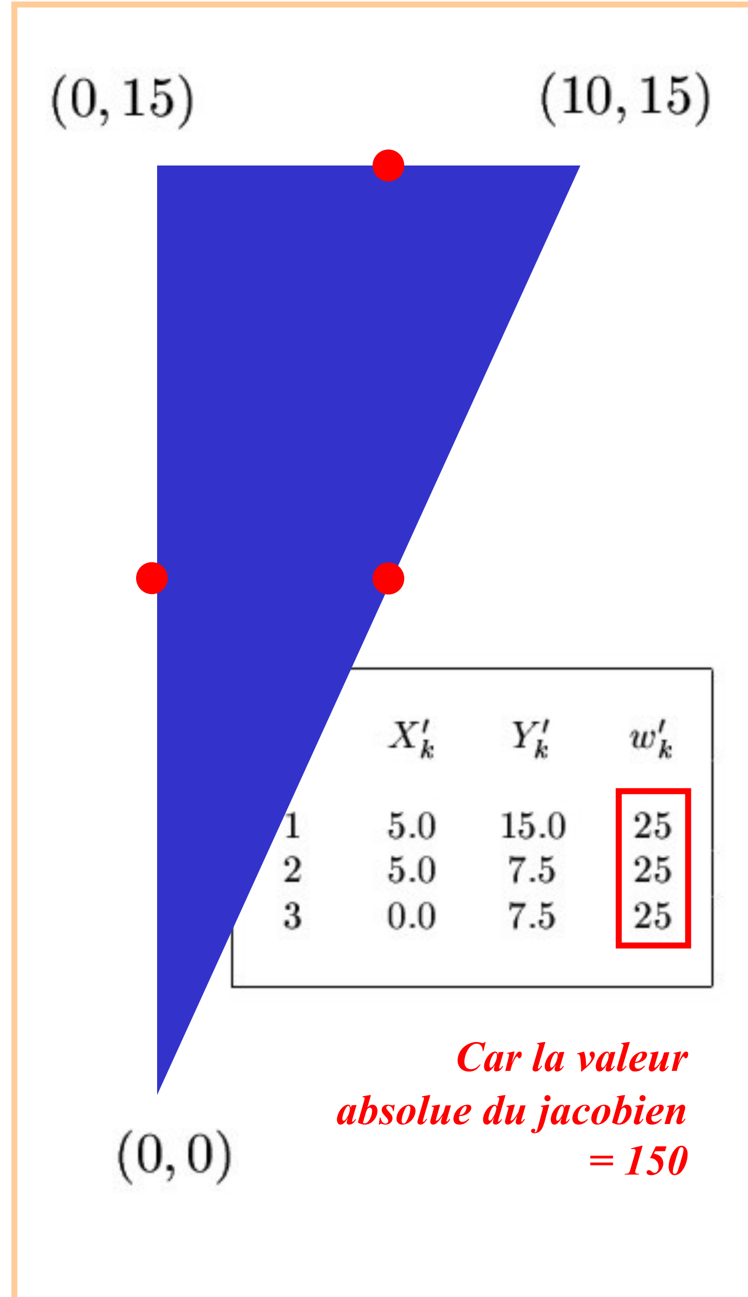
Degré de précision

Et un autre triangle ?

$$
\begin{aligned}
x' &= 10x \\
y' &= 15 - 15y
\end{aligned}
$$



	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6



	X'_k	Y'_k	w'_k
1	5.0	15.0	25
2	5.0	7.5	25
3	0.0	7.5	25

Car la valeur absolue du jacobien = 150