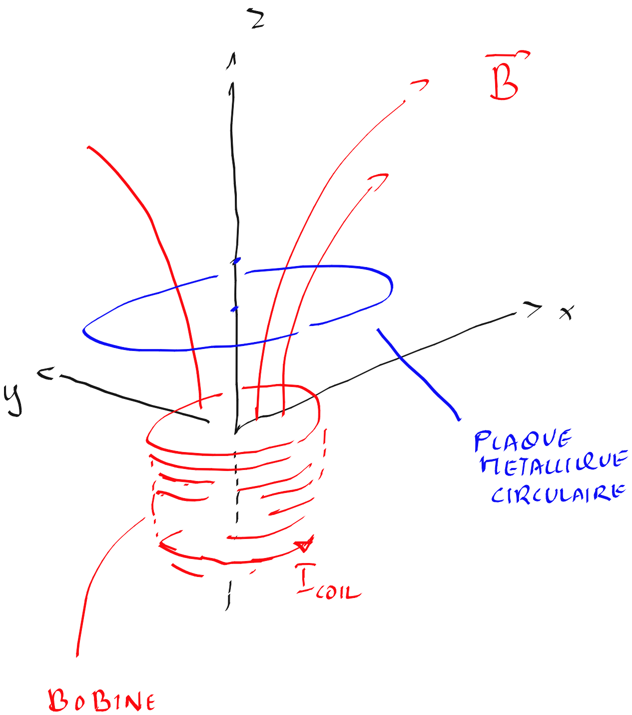
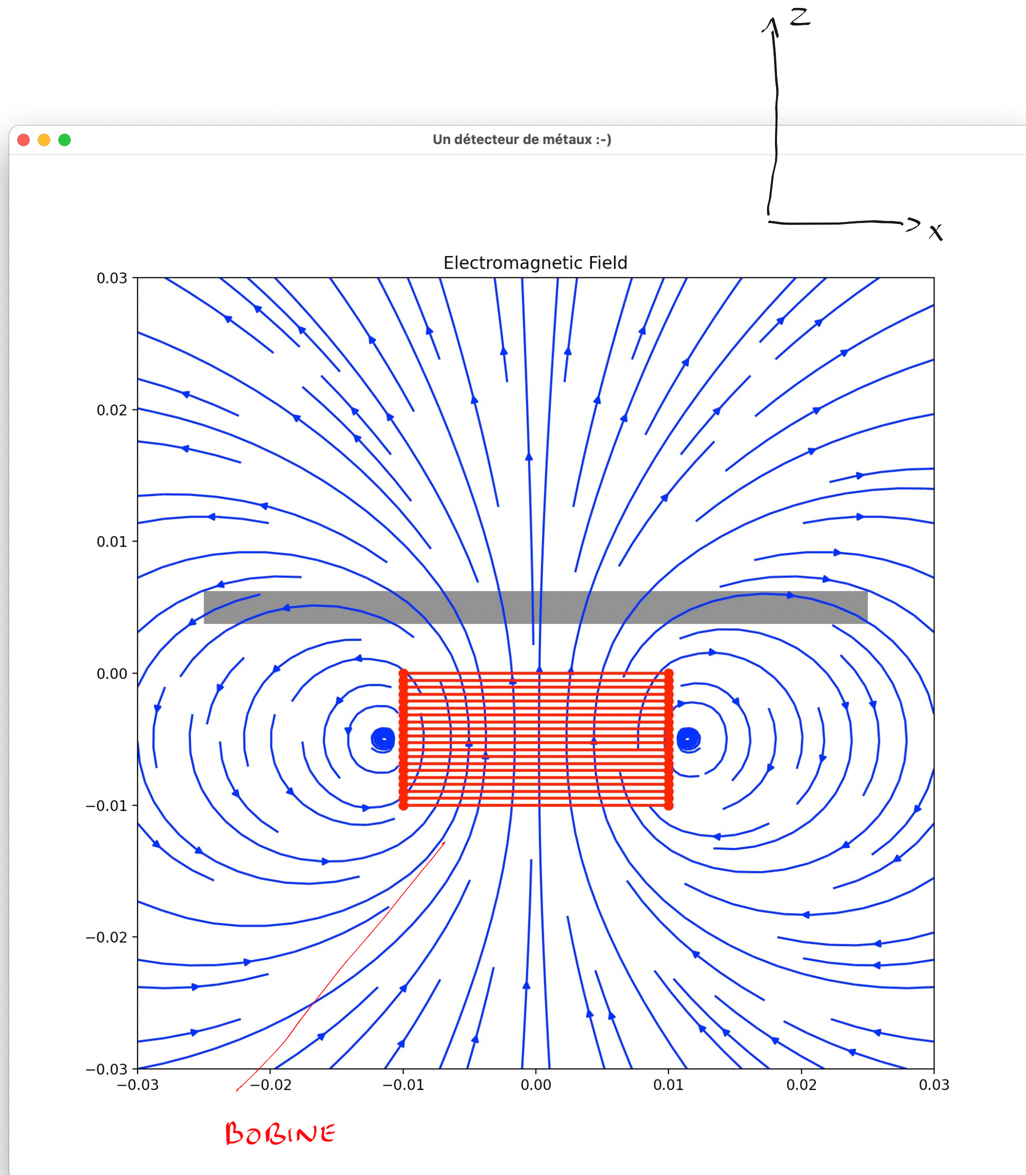
Le fameux devoir 5 !



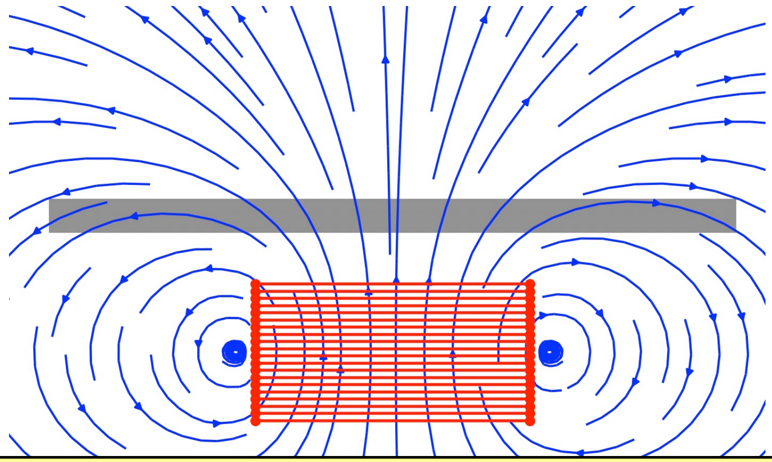


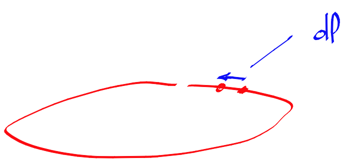
Calculer le champs magnétique

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

En discrétisant le cercle en n arcs $d\theta = 2\pi/n$:-)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{l}_i \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'_i|^3}$$

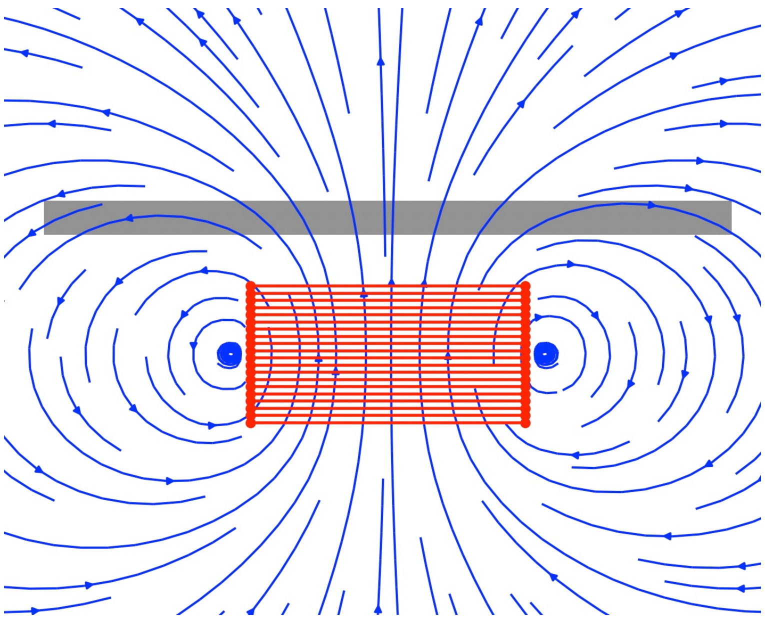


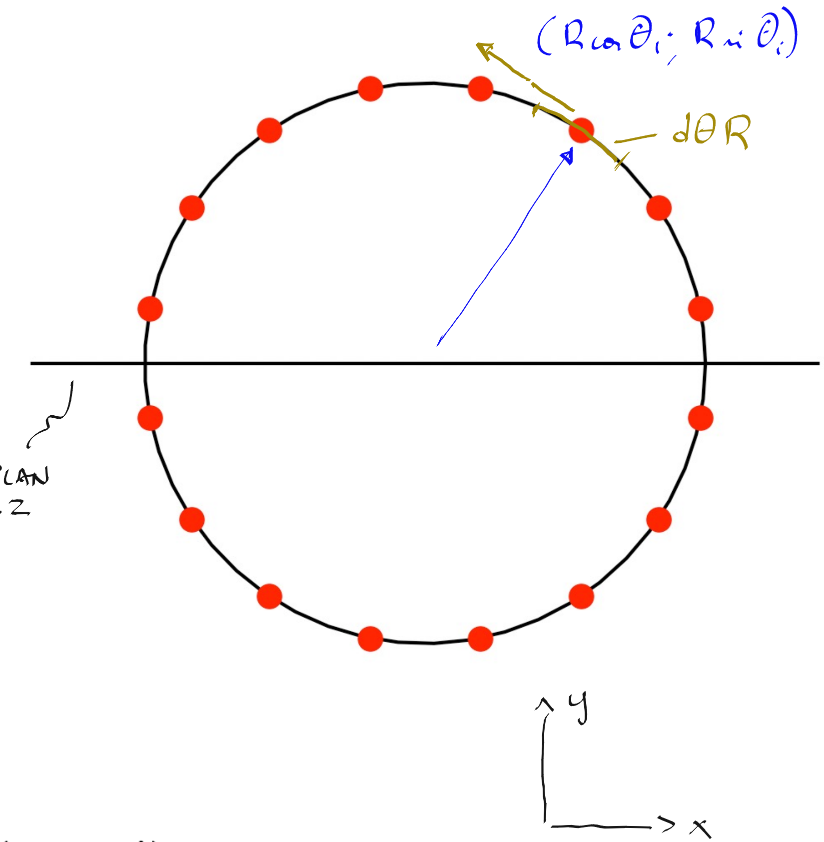



```
Zcoil = -linspace(0,theData.Hcoil,n)
Rcoil = theData.Rcoil * ones_like(Zcoil)
Icoil = theData.Icoil * ones_like(Zcoil) * theData.nSpires / n
Bx,Bz = inductanceMegneticField(X,Z,Rcoil,Zcoil,Icoil,theData)
plt.streamplot(X,Z,Bx,Bz, density=1.0, linewidth=None, color='blue')
```

C’est symétrique !

$$\begin{aligned} x_i &= R\cos\theta_i \\ y_i &= R\sin\theta_i \\ dx_i &= -d\theta R\sin\theta_i \\ dy_i &= d\theta R\cos\theta_i \end{aligned}$$

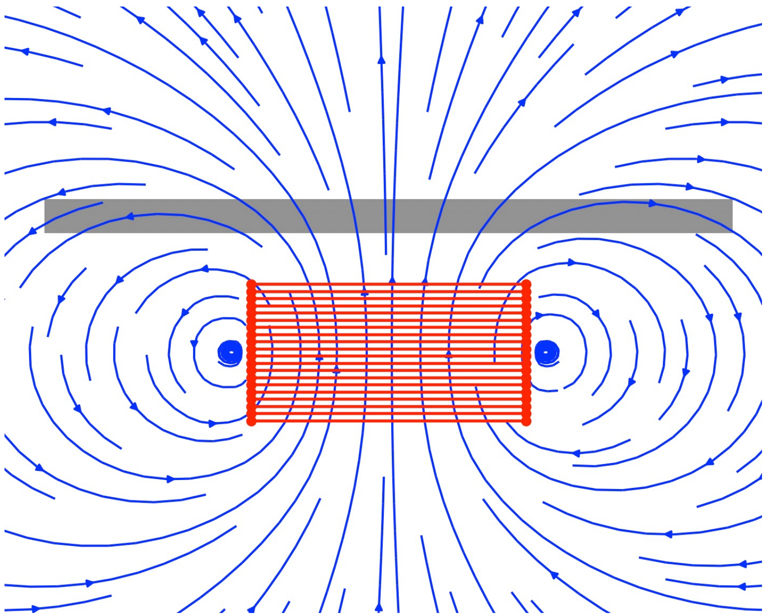




$$B_x(x,z,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{dy_i(z-z_i')}{r_i^3}$$

$$B_z(x,z,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(-y_i') - dy_i(x-x_i')}{r_i^3}$$

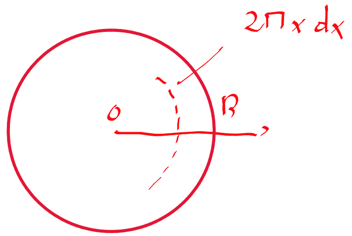
Calculer le flux



$$\phi = \int_\Omega \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_z \; d\mathbf{x} \quad = \quad 2\pi \int_0^R B_z(x,z) \; x dx$$

En utilisant une quadrature composite de Gauss-Legendre:-)

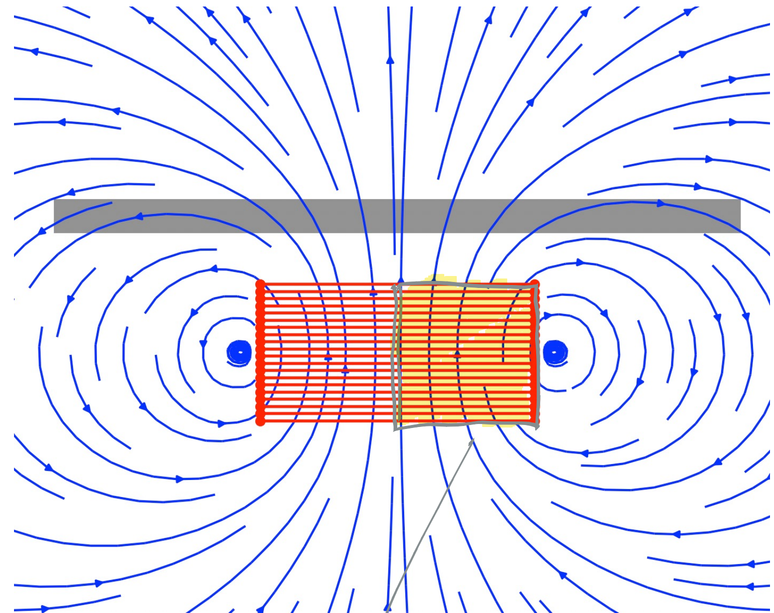
$$\approx \quad \sum_{i=0}^{n} B_z(X_i, Z_i) \; w_i$$




```
nX = 10; nZ = 5; nGL = 2
X,Z,W = inductanceGaussLegendre(0,Rcoil,0,-Hcoil,nX,nZ,nGL)
Bz    = inductanceMegneticField(X,Z,Rsource,Zsource,Isource,theData)[1]

flux = W @ Bz
L = nSpires * (flux/I)
```

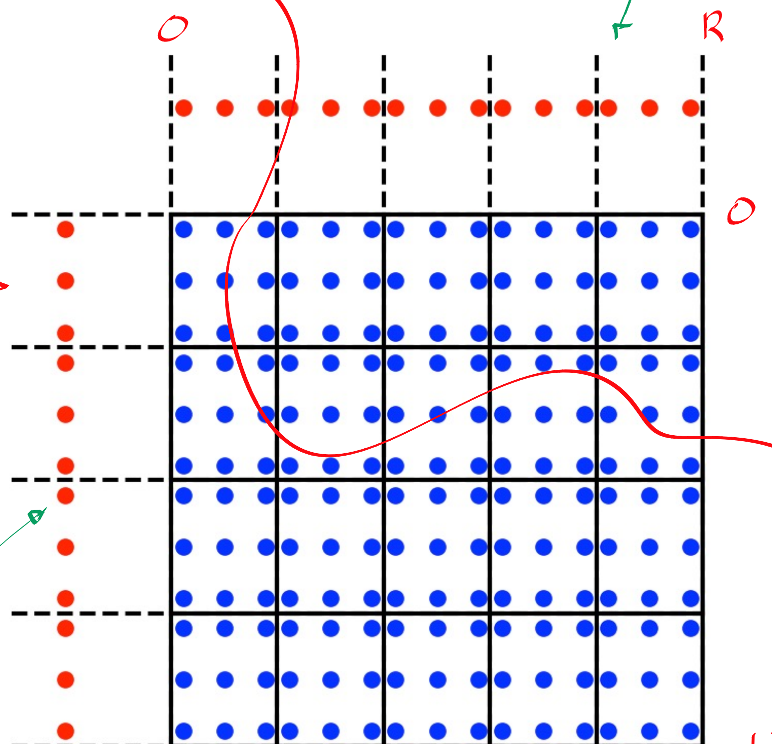
Obtenir les poids et points !

$\boxed{\dfrac{2\pi\, w_i\, X_i}{2 h_x}}$



$nGL = 3$

$nX = 5$



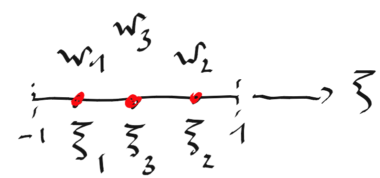
Z_0

Z_1

$h_z = Z_1 - Z_0$

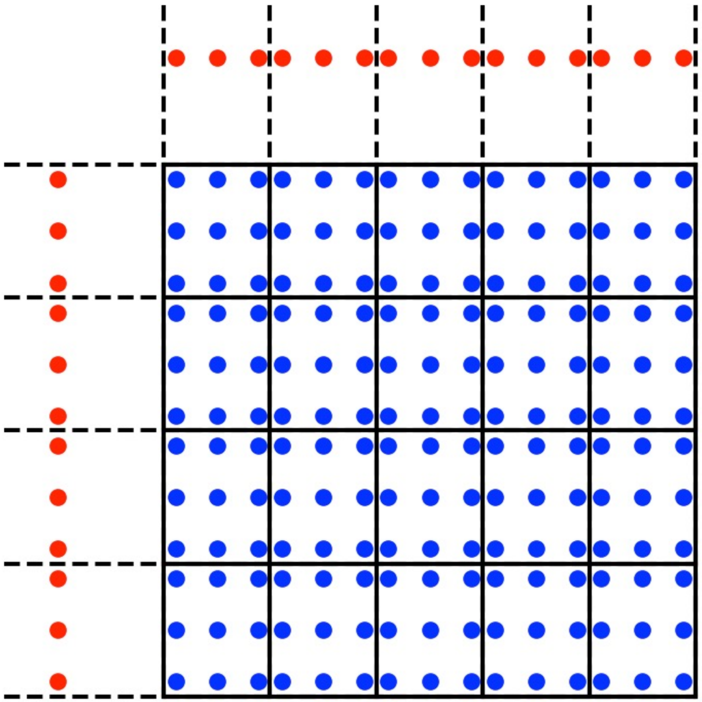
$nZ = 4$

$\dfrac{w_i}{2m}$

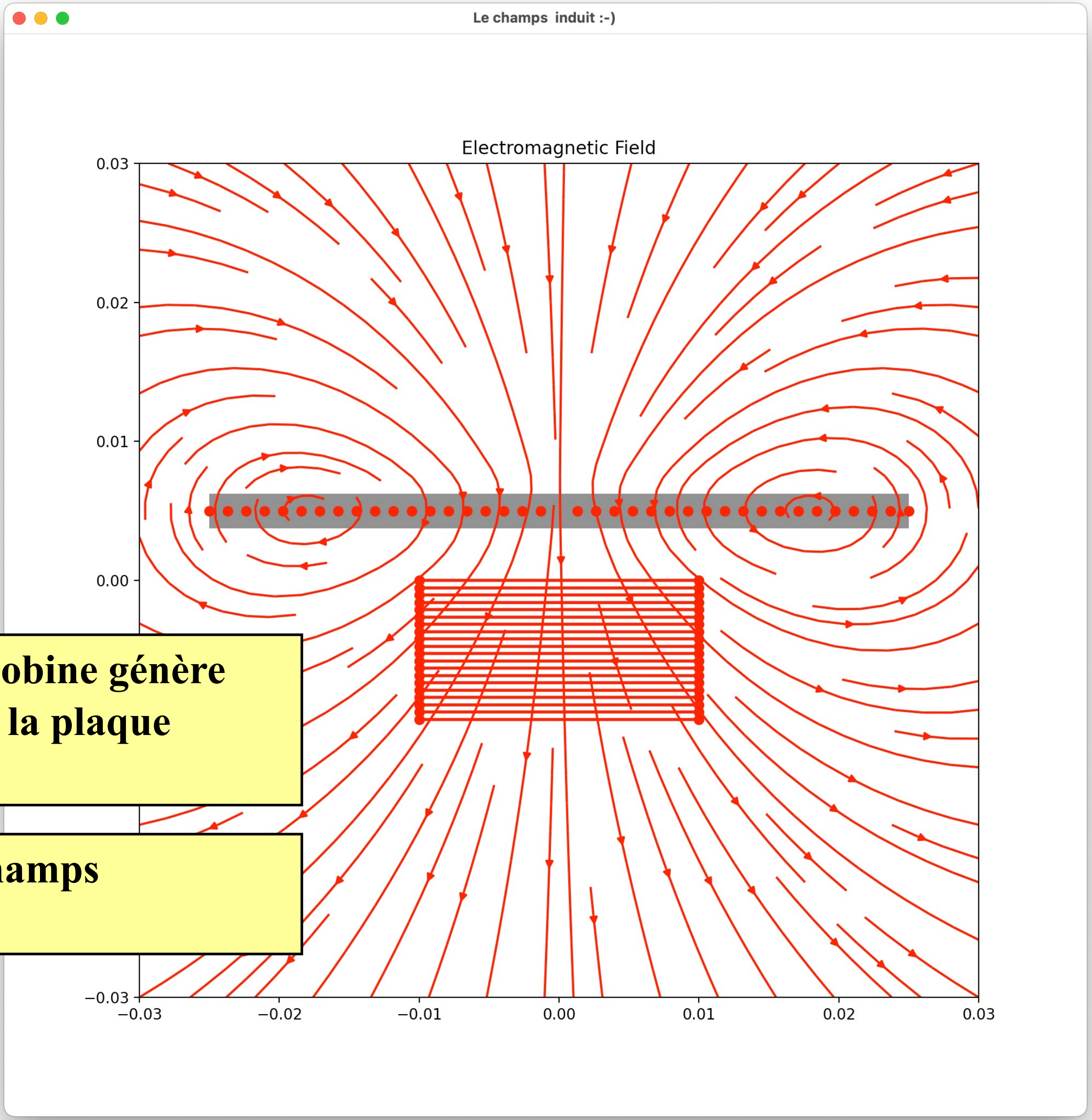


$Z_i = Z_0 + h_z/2 + \xi_i\,(h_z/2)$

Obtenir les poids et points !

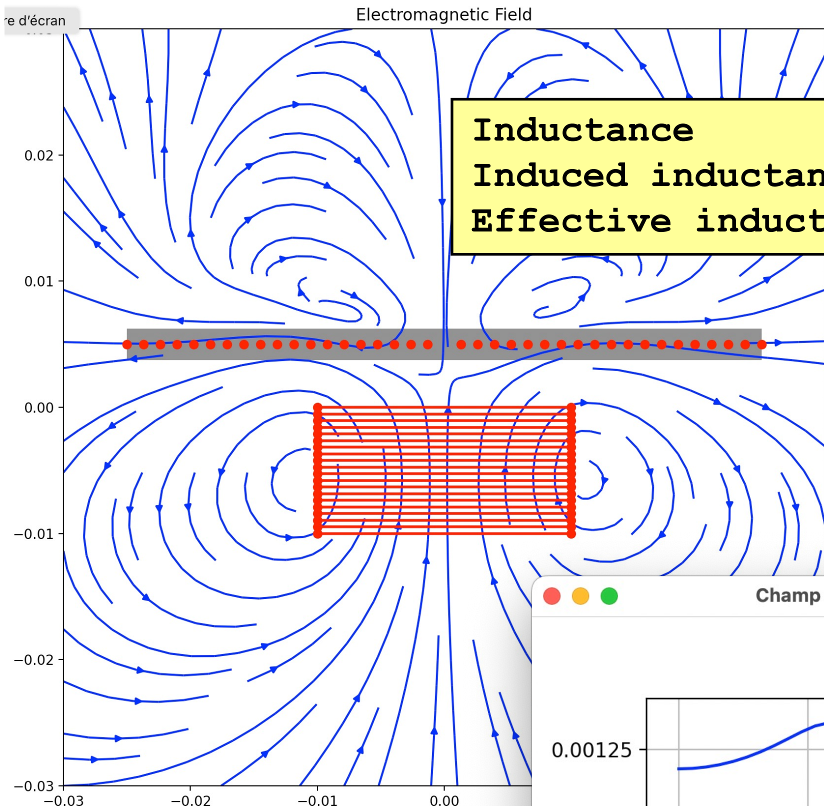


Et ensuite observer !



Le champs magnétique de la bobine génère des courants de Foucault dans la plaque métallique…

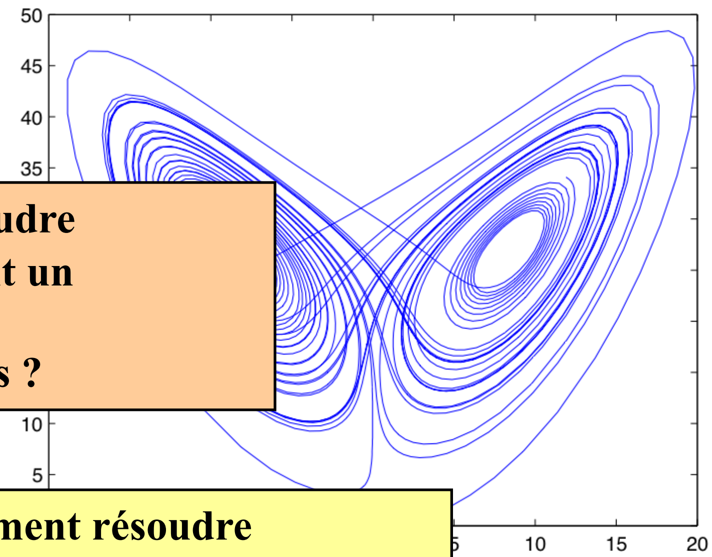
Et ces courants génèrent un champs magnétique induit….




```
Inductance                    =    0.0005950227032506 94
Induced inductance            =   -6.861628781573362e-05
Effective inductance          =    0.0005264064154349604
```

La plaque modifie l'inductance du circuit !

Plan du cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Et les équations non linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

INCONNU

Trouver $u(x)$ *tel que*

FOURNI / CONNU

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

Applications :
très nombreuses dans tous les domaines

Problème de Cauchy

Valeur exacte

$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$

Approximation numérique

Questions théoriques

Existence, unicité et régularité d'une solution

Stabilité d'une équation différentielle

Méthodes numériques

Stabilité d'une méthode

Précision d'une méthode

$$u'(x) = \frac{\cosh(x^7)\, u(x)}{\log(\sin(x))}$$

LINEAIRE
HOMO
SCALAIRE
ORDRE 1

$$u''(x) = u^2(x)$$

NON-LINEAIRE
HOMOGENE
SCALAIRE
ORDRE 2

$$u'(x) = 4\,(u(x))^2 + 6x^2$$

NON-LIN
NON-HOM

$$u'(x) = \exp(u(x))$$

NON-LIN
HOM

TRUC

$$v'(x) = u^2(x)$$
$$u'(x) = v(x)$$

NON-LINEAIRE
VECTORIELLE
ORDRE 1

Problème linéaire ou non linéaire ?

Problème homogène ou non homogène ?

Problème scalaire ou vectoriel ?

Ordre d'une équation différentielle ?

Problème de Cauchy…

Savez-vous si…

Problème linéaire ou non linéaire ?

Est-ce que f est une fonction linéaire de u ?

Est-ce que f est une fonction linéaire de x ?

Problème homogène ou non homogène ?

Dépendance explicite ou non de f par rapport à x ?

Solution particulière et solution du problème homogène

Problème scalaire ou vectoriel ?

***u* scalaire ou *u* vecteur ?**

***x* scalaire : équation différentielle ordinaire (*x* = le temps très souvent)**

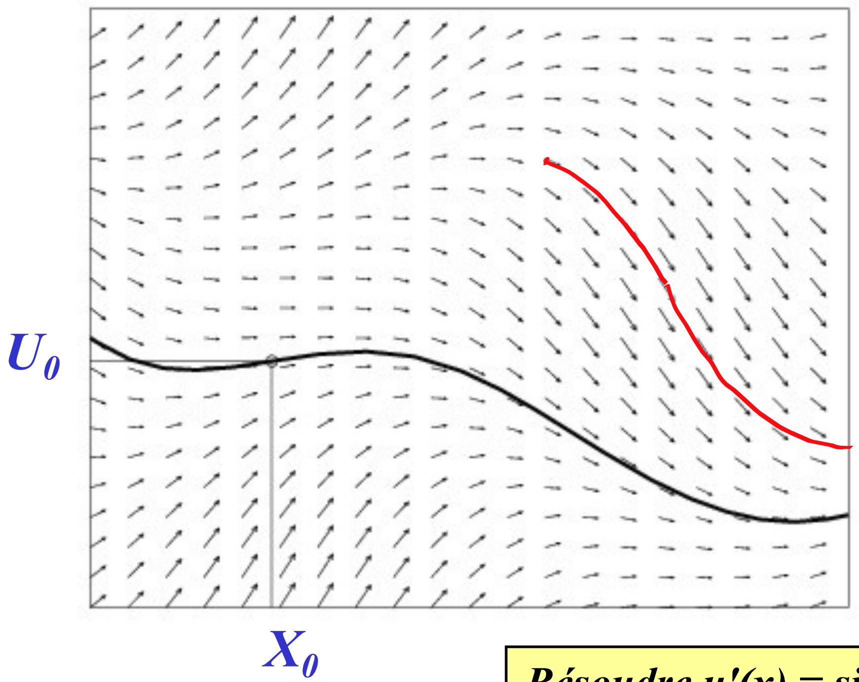
***x* vecteur : équation aux dérivées partielles (CM10-CM11-CM12)**

Ordre d'une équation différentielle ?

problème scalaire d'ordre *n* = système de *n* équations d'ordre un

Nous allons juste construire des méthodes pour résoudre des systèmes d'équations d'ordre 1

Interprétation graphique



Résoudre u'(x) = sin(x)+ cos(u(x))
avec $u(X_0) = U_0$

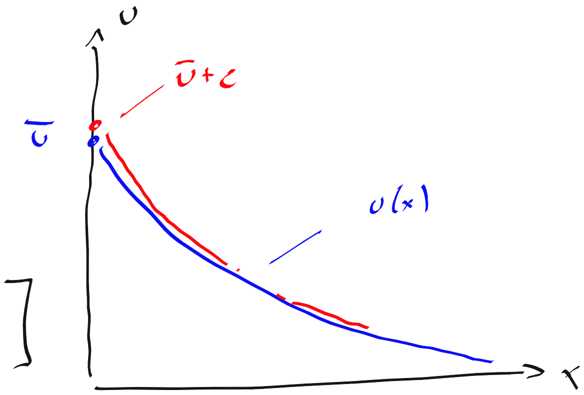
est équivalent à

Construire une courbe
qui passe par (X_0,U_0)
qui a une pente en tout point x qui vaut sin(x) + cox(u(x))

Equation stable

PROBLEME STABLE

$$u'(x) = -u(x)$$
$$u(0) = \bar{u}$$



$$u(x) = \bar{u}\,\exp(-x)$$

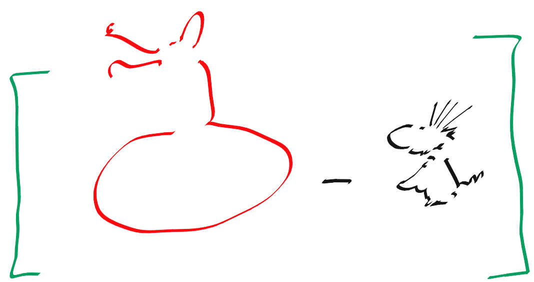
PROBLEME PERTURBE

$$u_\varepsilon'(x) = -u_\varepsilon(x)$$
$$u_\varepsilon(0) = \bar{u} + \varepsilon$$

PROBLEME DE L'ERREUR

$$(\underbrace{u - u_\varepsilon}_{e})' = -e$$
$$e(0) = \varepsilon$$

$$u_\varepsilon(x) = (\bar{u} + \varepsilon)\exp(-x)$$

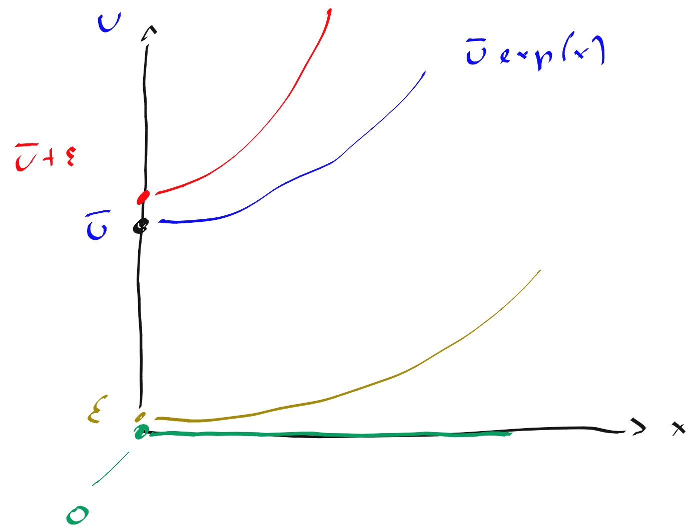


Equation instable

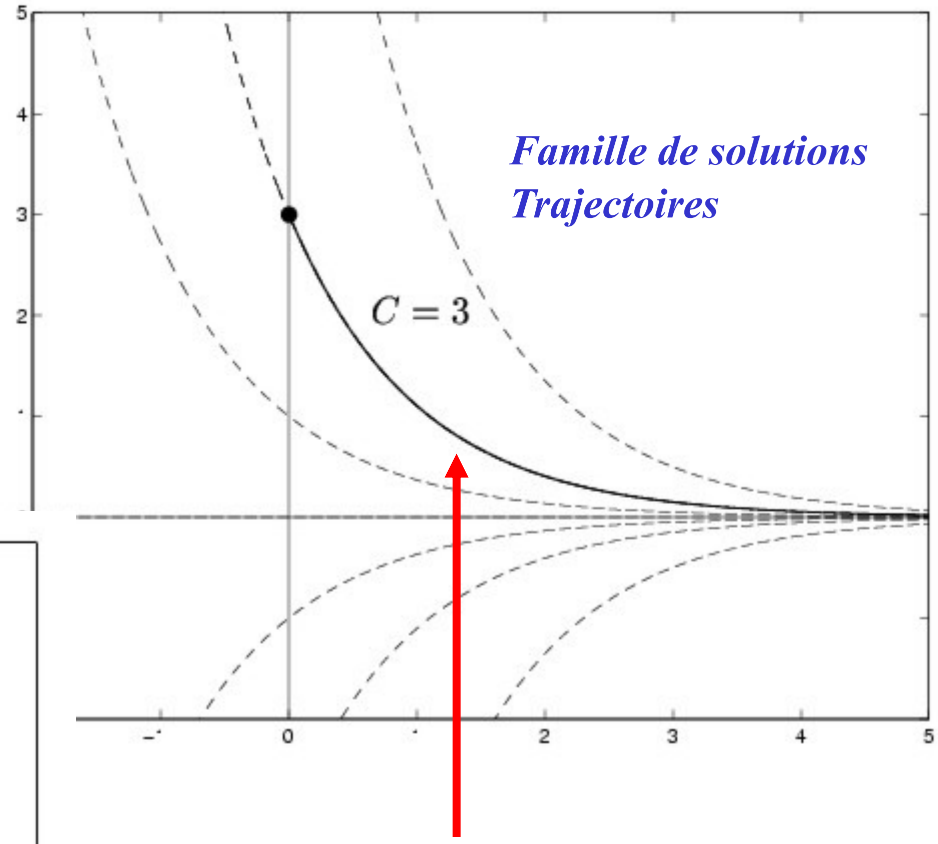
$$\boxed{\begin{aligned} u'(x) &= u(x) \\ u(0) &= \bar{u} \end{aligned}}$$

PROBLEME
INSTABLE

$$u(x) = \bar{u}\exp(x)$$



u'(x) = -u(x) est une équation différentielle stable…



Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) &= -u(x), \qquad x \in [a, b] \\ u(a) &= \bar{u} \end{cases}$$

$$u(x) = \bar{u}\ e^{-(x-a)}$$

Lorsque les solutions se rejoignent lorsque x tend vers l'infini, on dit que le problème différentiel est stable ou bien posé

Sensibilité à une perturbation de la condition initiale

Problème non perturbé

Trouver $u(x)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'(x) & = & -u(x), & x \in [a,b] \\ u(a) & = & \bar{u} & \end{array}\right.$$

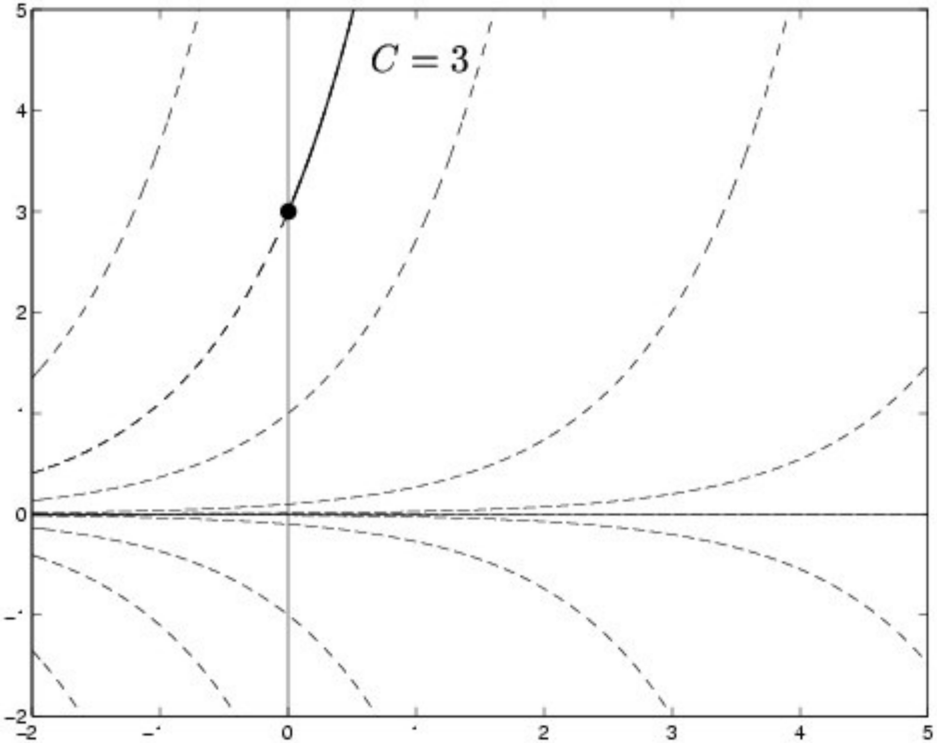
Trouver $u_\epsilon(x)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_\epsilon'(x) & = & -u_\epsilon(x), & x \in [a,b] \\ u_\epsilon(a) & = & \bar{u}+\epsilon & \end{array}\right.$$

Problème perturbé

$$\underbrace{u_\epsilon(x) - u(x)}_{e_\epsilon(x)} = \epsilon \; e^{-(x-a)}$$

L'écart entre la solution du problème perturbé et la solution du problème non pertubé diminue progressivement de manière exponentielle...



$$u(x) = \bar{u}\ e^{(x-a)}$$

u'(x) = u(x) est une équation différentielle instable.

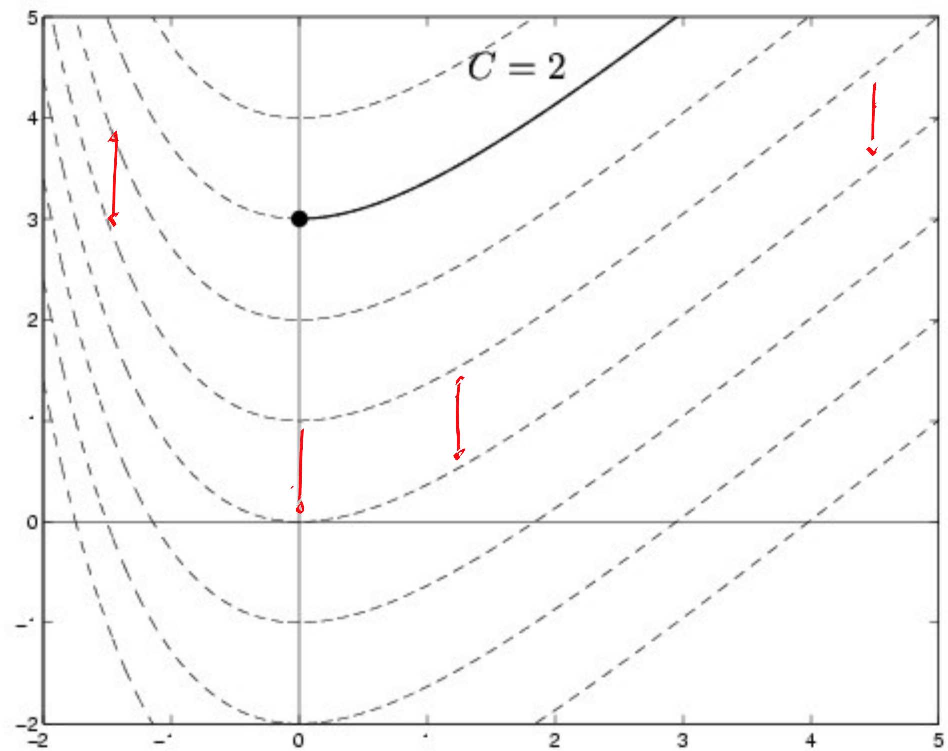
Si la solution analytique est déjà instable, il semble illusoire de croire que la solution discrète sera stable par rapport aux erreurs d'arrondi !

$u'(x) = 1 - e^{-x}$

n'est

ni stable,

ni instable.

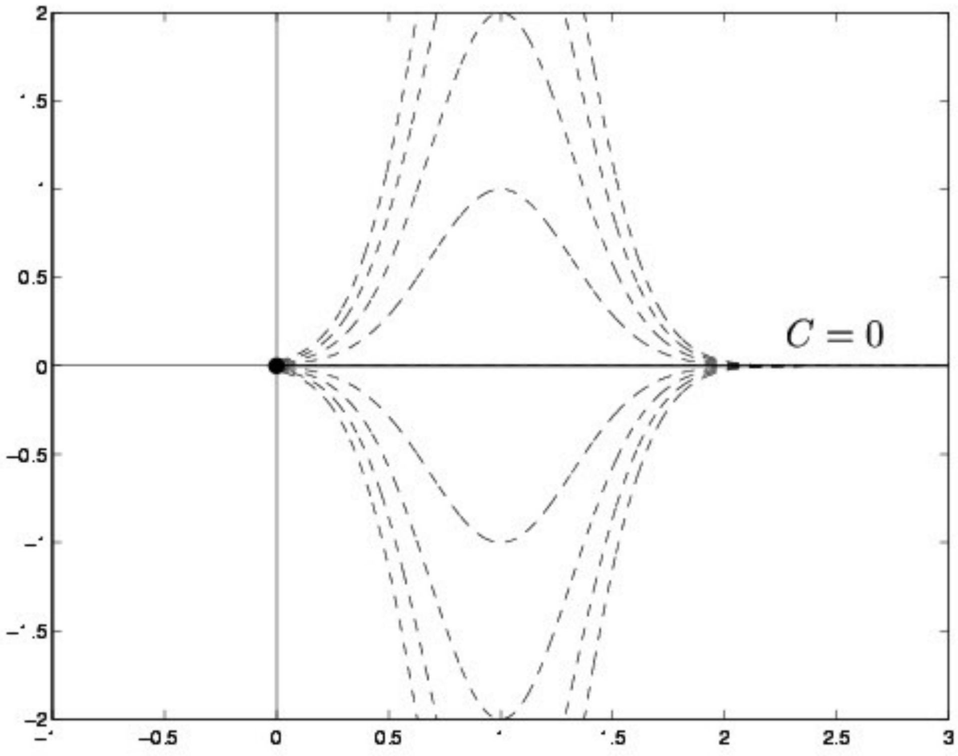


$$u(x) = C + x + e^{-x}$$

L'écart dû à une perturbation reste constant

Au bénéfice du doute, on dit classiquement que le problème est encore stable

u'(x) = -10(x-1)u(x) est un peu stable et un peu instable…



$$u(x) = Ce^{-5(x-1)^2}$$

Ni stable
Ni instable

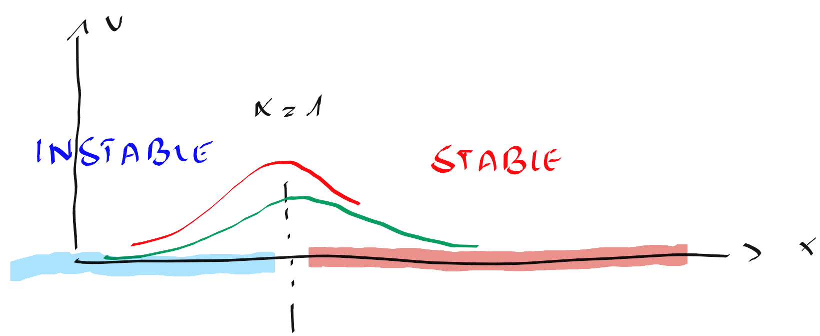
$$u(x) = \exp(g(x))$$
$$u'(x) = g'(x)\exp(g(x))$$

$$u'(x) = \underbrace{-10(x-1)}_{g'(x)}\, u(x)$$

$$g(x) = 5(x-1)^2$$
$$g'(x) = -10(x-1)$$

$$u(x) = C \exp(-5(x-1))^2$$

VALEUR EN $x = 1$



En général

$$e(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$$

$$e'(x) = f(x, u_\varepsilon) - f(x, u)$$

$$= \cancel{f(x,u)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(x,u)}}_{J(x,\,u(x))} \underbrace{(u_\varepsilon - u)}_{e(x)} - \cancel{f(x,u)}$$

JACOBIEN

> 0 ECART GRANDIT INSTABLE

< 0 ECART DIMINUE STABLE

Comment savoir dans le cas général ?

Idée

Presque toute l'information locale est contenue dans le *jacobien*.

Equation différentielle pour la différence entre solution du problème perturbé et solution du problème non-perturbé

$$e'_\epsilon(x) = f(x, u_\epsilon(x)) - f(x, u(x))$$

En effectuant un développement de Taylor de $f(x, v)$ pour la seconde variable v autour du point $(x, u(x))$,

$$\approx f(x, u(x)) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x,u(x))} \Big(u_\epsilon(x) - u(x) \Big) - f(x, u(x))$$

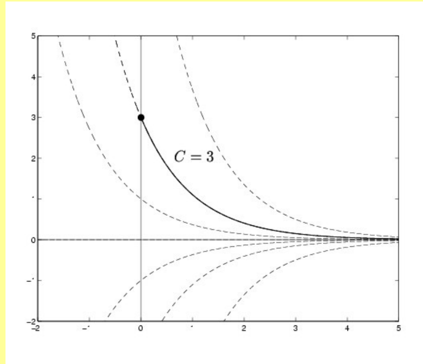
$$\approx \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x,u(x))} e_\epsilon(x)$$

$$J(x, u(x)) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u(x))}$$

jacobien

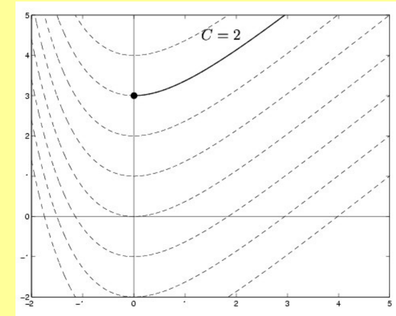
Bilan

$u'(x) = -u(x)$



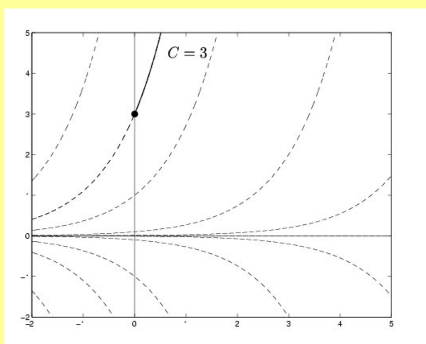
$J = -1$ ***stable***

$u'(x) = f(x)$



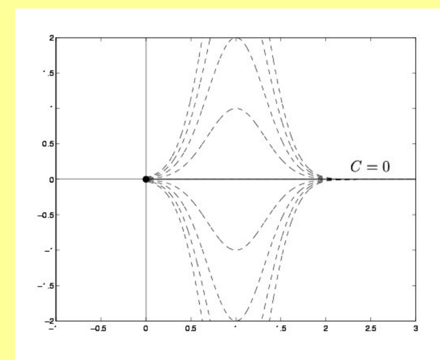
$J = 0$ ***écart constant***

$u'(x) = u(x)$



$J = 1$ ***instable***

$u'(x) = -10(x-1)u(x)$



$J > 0$ si $x<1$ ***instable***

$J < 0$ si $x>1$ ***stable***

Stable mais raide !

$$\underbrace{u'(x) = -\alpha\,[\,u(x)}_{\text{EQUATION HOMO}} - \sin(x)\,] + \cos(x)$$

$$u(x) = u_{homo}(x) + \underbrace{u_p(x)}_{\text{UNE SOLUTION PARTICULIERE DU PROBLEME NON HOMOGENE}}$$

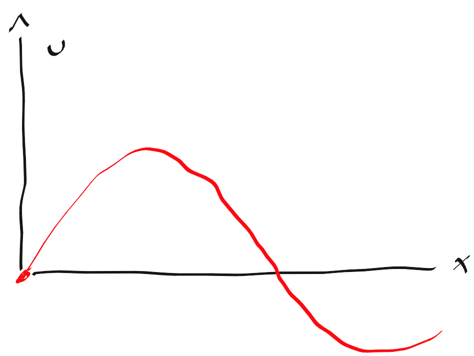
EQUATION HOMO

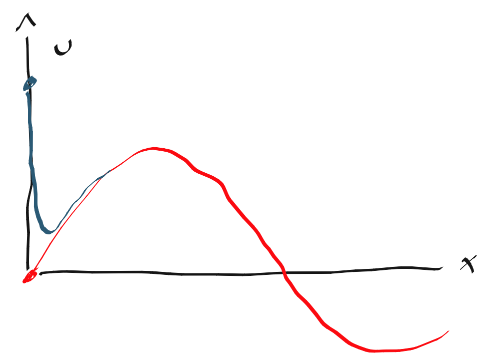
$$u' = -\alpha u$$

$$u(x) = C \exp(-\alpha x)$$

$$\alpha \ggg 1$$

$$u(x) = C \exp(-\alpha x) + \sin(x)$$



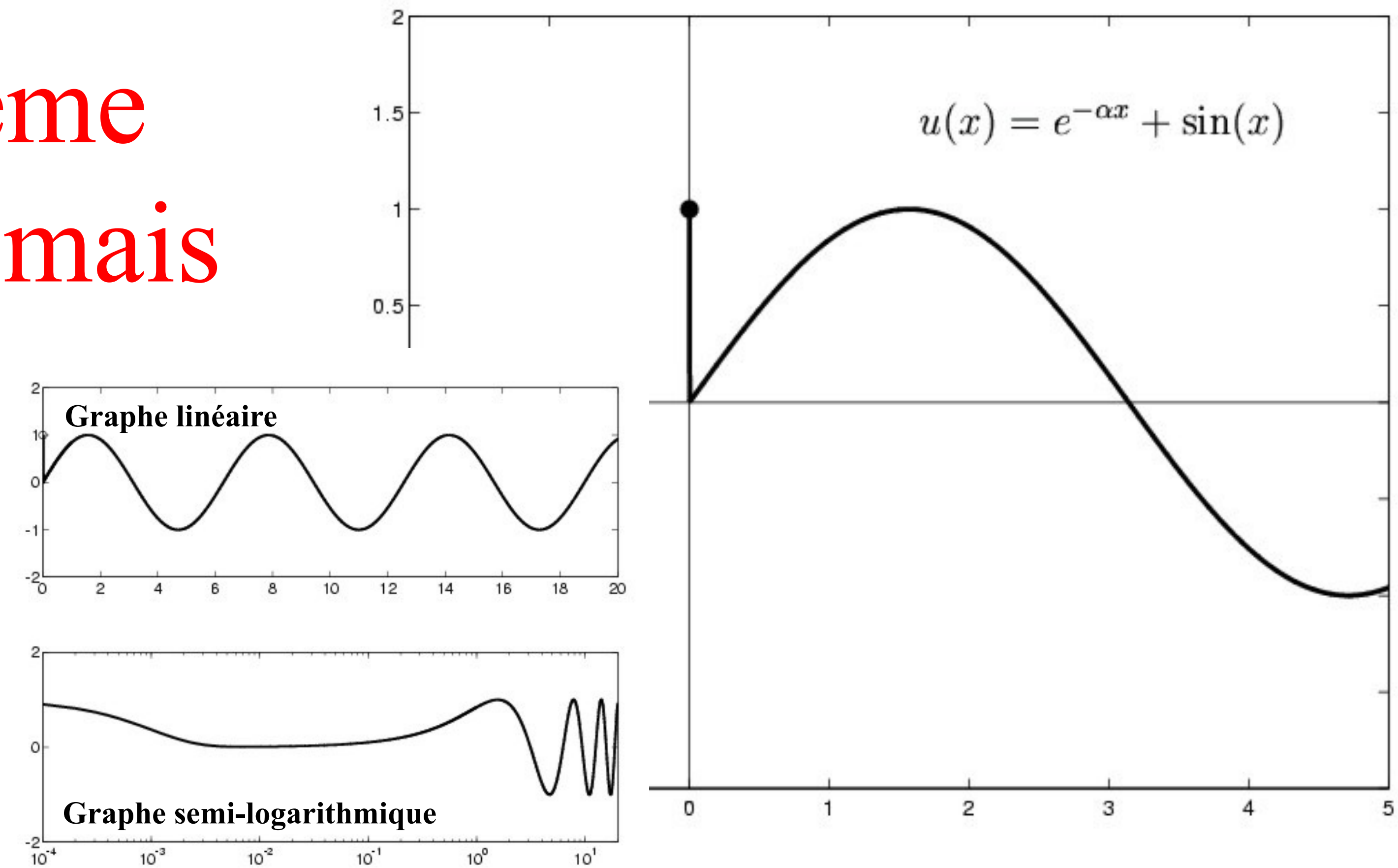


Trouver $u(x)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u'(x) & = & -\alpha \Big(u(x) - \sin(x) \Big) + \cos(x), & x \in [0, 5] \\ u(0) & = & 1 & \end{array} \right.$$

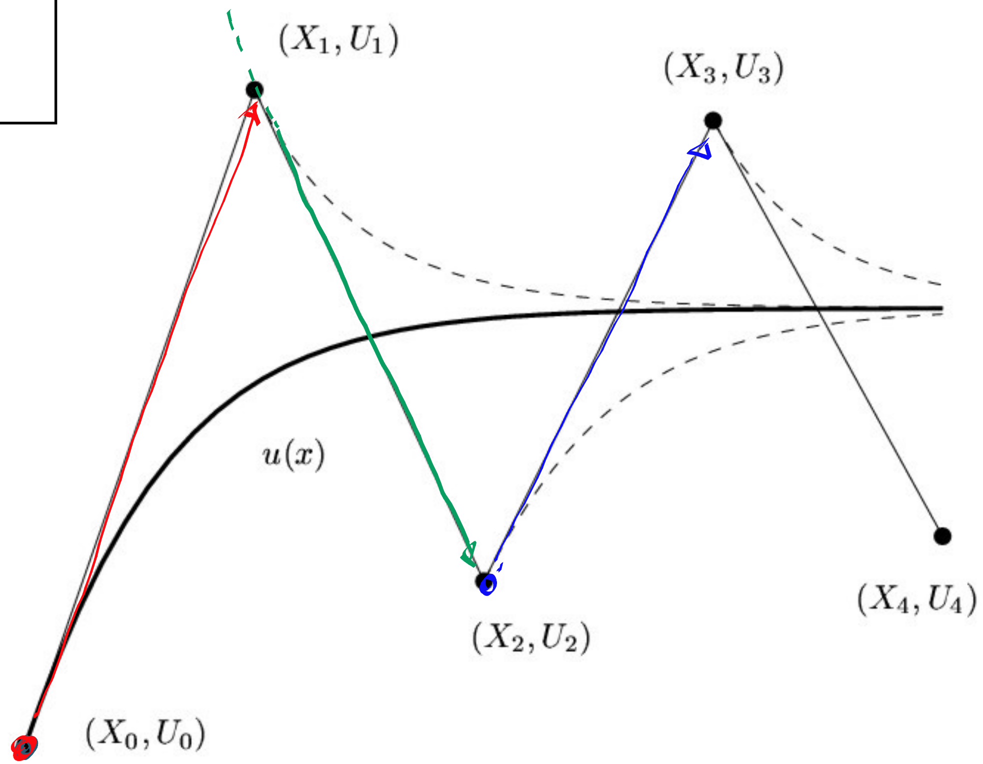
Très difficile à résoudre
pour beaucoup de méthodes numériques

Problème stable mais raide



Méthode d'Euler explicite

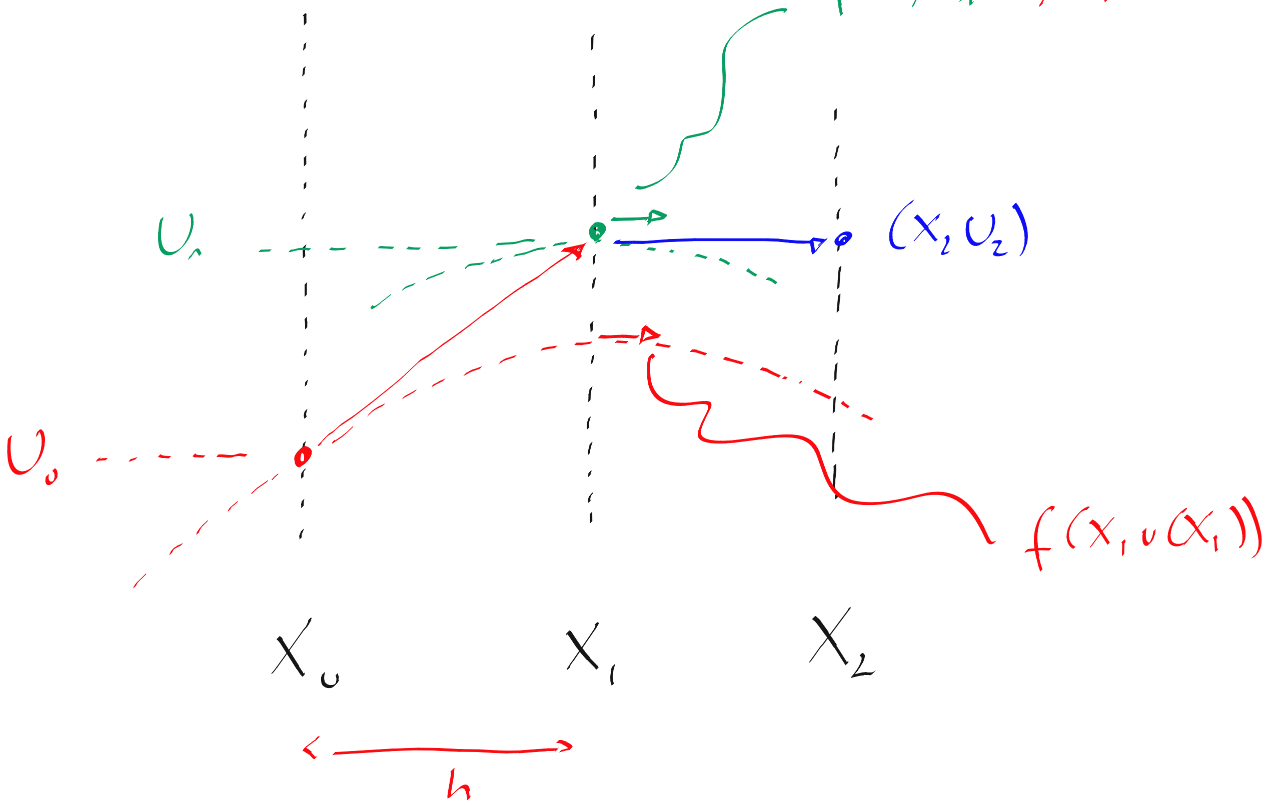
$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$



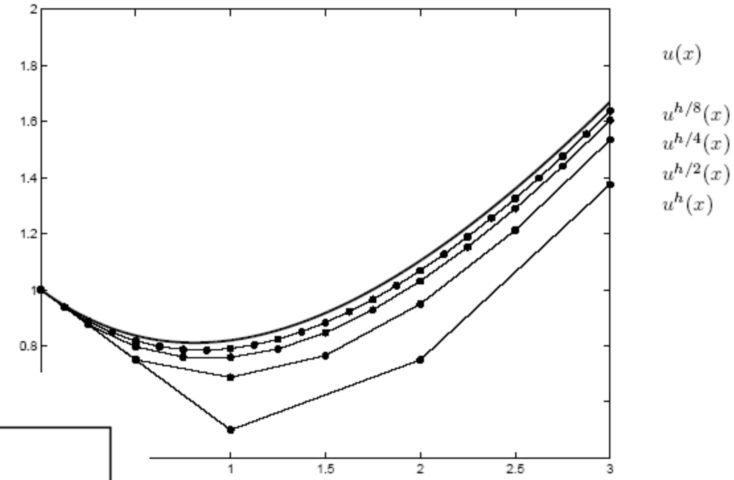
Méthode d'Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h\, f(x_i, U_i)$$

$$f(x_1, U_1) \neq \overbrace{f(x_1, u(x_1))}^{\neq\, u'(x_1)}$$



Euler explicite…

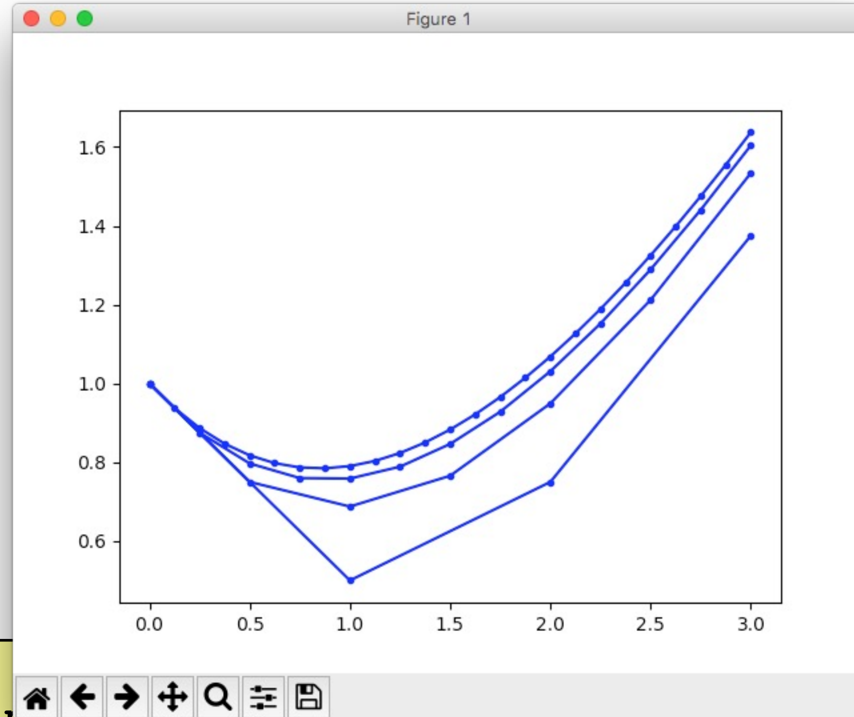


Méthode d'Euler explicite pour $u' = (x-u)/2$					
X_i	$u^h(X_i)$	$u^{h/2}(X_i)$	$u^{h/4}(X_i)$	$u^{h/8}(X_i)$	$u(X_i)$
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1250				0.9375	0.9432
0.2500			0.8750	0.8867	0.8975
0.3750				0.8469	0.8621
0.5000		0.7500	0.7969	0.8174	0.8364
0.7500			0.7598	0.7868	0.8119
1.0000	0.5000	0.6875	0.7585	0.7902	0.8196
2.0000	0.7500	0.9492	1.0308	1.0682	1.1036
3.0000	1.3750	1.5339	1.6043	1.6374	1.6694

… converge

Euler explicite

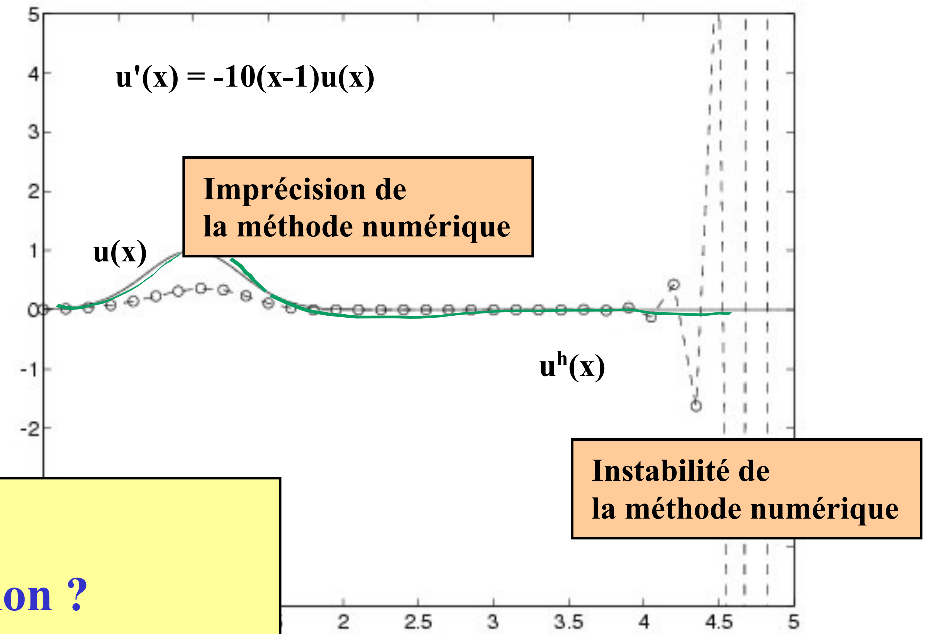
$u' = (x-u)/2$




```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

Xstart = 0; Xend = 3; Ustart = 1;
for n in [3,6,12,24]:
  h = (Xend-Xstart)/n
  X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
  U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
  for i in range(n):
    U[i+1] =  U[i] + h*(X[i]-U[i])/2
  plt.plot(X,U,'.-b')
plt.show()
```

Et parfois, cela ne marche pas !

$$X_i = a + hi \quad i = 0, \ldots, m,$$



Définir m points

Comment choisir le pas de discrétisation ?

Pas constant ou adaptatif ?

Chercher une approximation U_k en X_k

Comment avoir une méthode stable ?

Comment avoir une méthode précise ?

$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$

Méthodes de Taylor explicites

$$u(X_1) = u(X_0) + \underbrace{(X_1 - X_0)}_{h}\,\overset{u'(X_0)}{\hat{f}} + \frac{h^2}{2}\,\overset{u''(X_0)}{\hat{f}'} + \frac{h^3}{6}\,\overset{u'''(X_0)}{\hat{f}''}$$

$$\hat{f} : x \to f(x, u(x)) = \hat{f}(x)$$

$$f : (x, u) \to f(x, u)$$

$$\boxed{\hat{f}' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\,\overset{u' :-)}{f}}$$

$$\hat{f}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f\right)$$

$$\boxed{\hat{f}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 f}$$

Exemple

So easy !

$$u'(x) = \frac{x - u(x)}{2}$$

$$U_{i+1} = U_i + h\left[\frac{X_i - U_i}{2}\right] + \frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^3}{6}\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^4}{24}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{16}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^5}{120}\left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{32}(X_i - U_i)\right]$$

$$\boxed{\hat{f} = \frac{x - u(x)}{2}}$$

$$\boxed{\hat{f}' = \frac{1}{2} - \frac{u'(x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\hat{f}(x)}_{\frac{x-u(x)}{2}}}$$

$$\boxed{\hat{f}'' = -1/4 + \frac{1}{4}\hat{f}}$$

$$\boxed{\hat{f}''' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\hat{f}}$$

$$U_{i+1} = U_i + h\left[\frac{X_i - U_i}{2}\right] + \frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^3}{6}\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^4}{24}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{16}(X_i - U_i)\right] + \frac{h^5}{120}\left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{32}(X_i - U_i)\right]$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(X_i - U_i) + \frac{h^2}{8}(2 - X_i + U_i) - \frac{h^3}{48}(2 - X_i + U_i) + \frac{h^4}{384}(2 - X_i + U_i)$$

$$(2 - X_i + U_i)$$

16×24

$= 320 + 64$

Et zou !

$$\hat{f}'' = \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + 2\cancel{f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}f^2 + \cancel{\frac{\partial f}{\partial u}}\frac{\partial f}{\partial x} + \cancel{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} f$$

Méthodes explicites de Taylor :

Effectuons un développement de Taylor...

$$u(x) = u(X_0) + (x - X_0)\, u'(X_0) + \frac{(x-X_0)^2}{2!}\, u''(X_0) + \cdots$$

En vertu du problème à la valeur initiale,

$$= U_0 + (x - X_0)\, \widehat{f}(X_0) + \frac{(x-X_0)^2}{2!}\, \widehat{f}'(X_0) + \cdots$$

En tenant compte que $\widehat{f}' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u'$ et que $u' = \widehat{f}$

$$\begin{aligned} = U_0 &+ (x - X_0)\, f(X_0, U_0) \\ &+ \frac{(x-X_0)^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f \right)_{(X_0,U_0)} \\ &+ \frac{(x-X_0)^3}{3!} \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + 2\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}} f + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}} f^2 + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}} + \cancel{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} f \right)_{(X_0,U_0)} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

$$\widehat{f} : x \to f(x, u(x))$$

Attention, la fonction à une variable ressemble à la fonction à deux variables, mais ce n'est pas la même chose !!!

Méthodes de Taylor d'ordre n

$$U_{i+1} = U_i + h \underbrace{\left[f + \frac{h}{2!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{u'=f} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} \left. \frac{d^{(n-1)}f}{dx^{n-1}} \right|_{u'=f} \right]_{(X_i,U_i)}}_{\Phi(X_i,U_i)}$$

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{u'=f} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

Euler explicite (Taylor n=1)

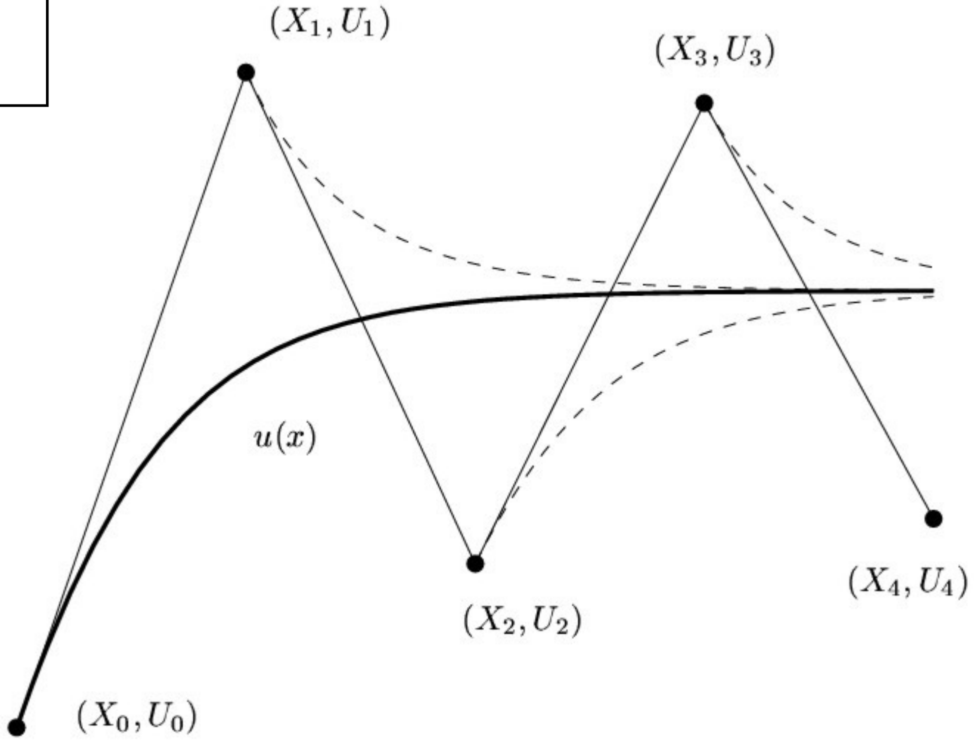
- **Ordre de précision linéaire**
- **Mise en œuvre facile**
- **Stabilité ?**

Taylor n quelconque

- **Ordre de précision arbitrairement élevé,**
- **Mise en œuvre fastidieuse si n élevé**
- **Stabilité ?**

Méthode de Taylor d'ordre 1
Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$



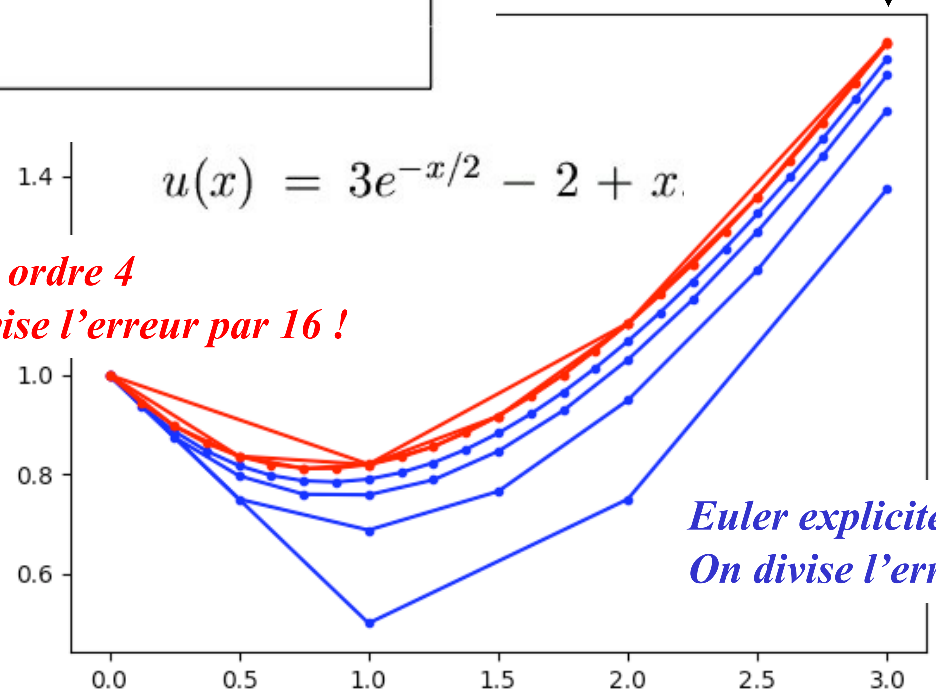
Exemple

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) &= (x - u(x))/2, \qquad x \in [0,3] \\ u(0) &= 1 \end{cases}$$

```
====== Explicit Euler method =====
==== Euler  (order=1) h=1.000 : eh(Xend) = 2.94e-01
==== Euler  (order=1) h=0.500 : eh(Xend) = 1.35e-01
==== Euler  (order=1) h=0.250 : eh(Xend) = 6.51e-02
==== Euler  (order=1) h=0.125 : eh(Xend) = 3.20e-02
============= Estimated order : 1.0678
====== Explicit Taylor order 4 method =====
==== Taylor (order=4) h=1.000 : eh(Xend) = 7.96e-04
==== Taylor (order=4) h=0.500 : eh(Xend) = 4.03e-05
==== Taylor (order=4) h=0.250 : eh(Xend) = 2.27e-06
==== Taylor (order=4) h=0.125 : eh(Xend) = 1.35e-07
============= Estimated order : 4.1767
```

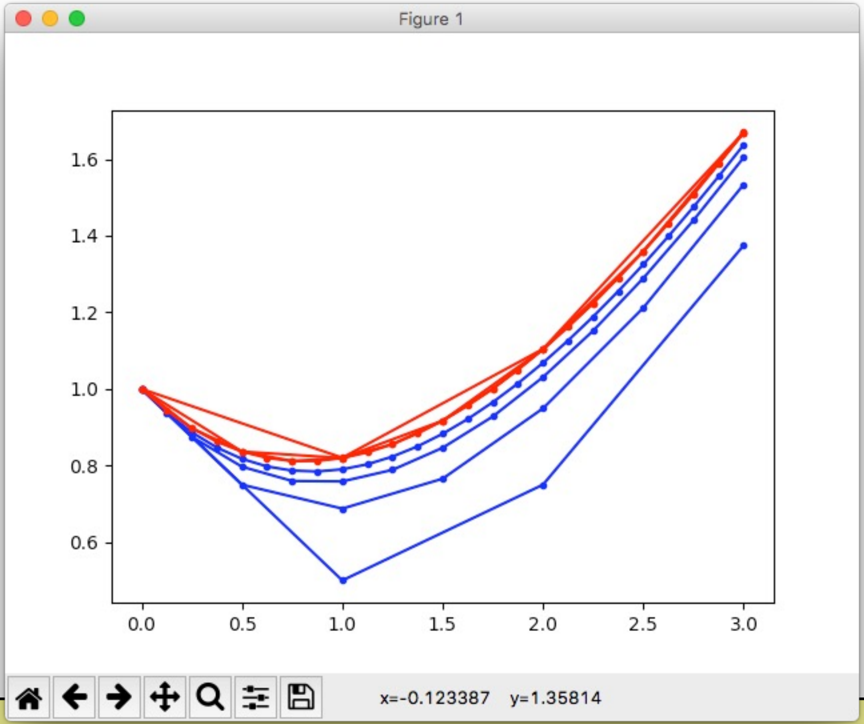
$$u(x) = 3e^{-x/2} - 2 + x$$



Taylor ordre 4
On divise l'erreur par 16 !

Euler explicite
On divise l'erreur par 2 !

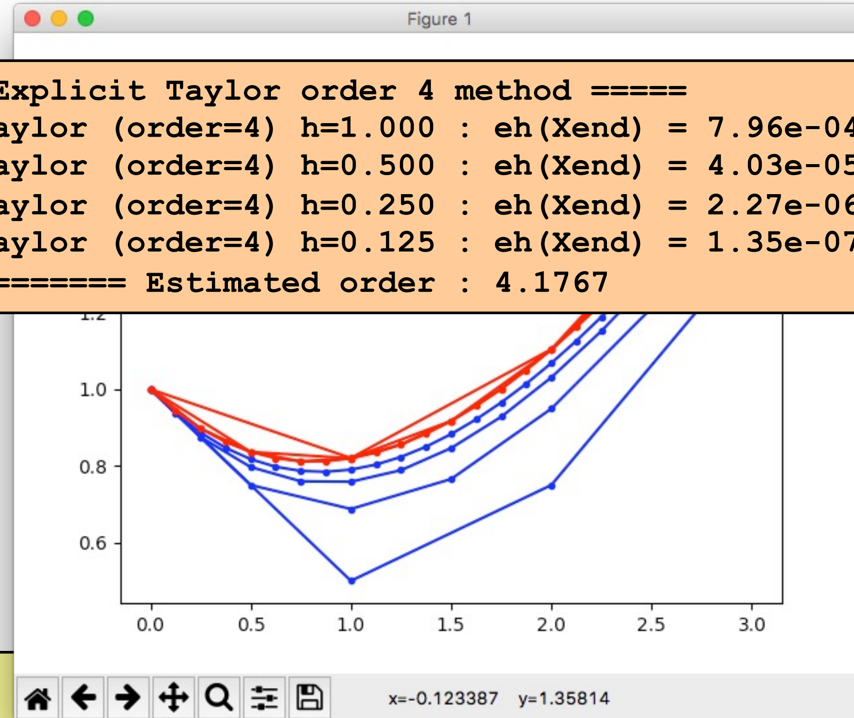
Taylor ordre 4 u'= (x-u)/2




```
u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x

Xstart = 0; Xend = 3;
Ustart = 1;

for n in [3,6,12,24]:
  h = (Xend-Xstart)/n
  X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
  U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
  for i in range(n):
    U[i+1] =  U[i] + h*(X[i]-U[i])/2 + (h**2)*(2-X[i]+U[i])/8 \
         - (h**3)*(2-X[i]+U[i])/48 + (h**4)*(2-X[i]+U[i])/384
```

Calcul du taux de convergence

```
====== Explicit Taylor order 4 method =====
 ==== Taylor (order=4) h=1.000 : eh(Xend) = 7.96e-04
 ==== Taylor (order=4) h=0.500 : eh(Xend) = 4.03e-05
 ==== Taylor (order=4) h=0.250 : eh(Xend) = 2.27e-06
 ==== Taylor (order=4) h=0.125 : eh(Xend) = 1.35e-07
 ============= Estimated order : 4.1767
```

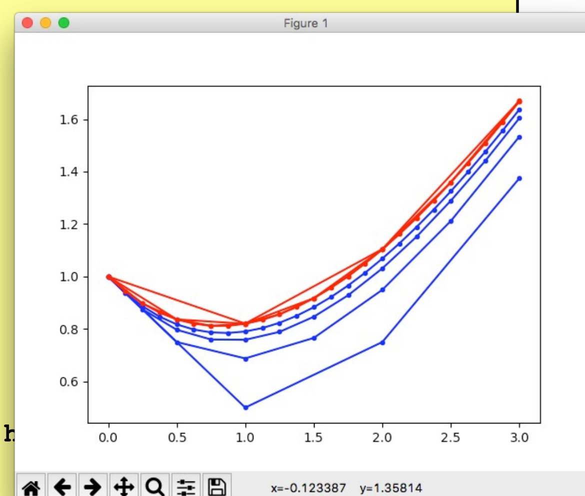



```
u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x
error = zeros(4)
for j in range(4):
  n = 3*pow(2,j)
  h = (Xend-Xstart)/n
  X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
  U = zeros(n+1); U[0] = 1
  for i in range(n):
    U[i+1] =  U[i] + h*(X[i]-U[i])/2 + (h**2)*(2-X[i]+U[i])/8 \
          - (h**3)*(2-X[i]+U[i])/48 + (h**4)*(2-X[i]+U[i])/384
  error[j] = abs(U[-1]-u(Xend))
  print(" ==== Taylor : h=%5.3f : eh(Xend) = %8.2e " % (h,error[j]))
order = mean(log(error[:-1]/error[1:])/log(2))
print(" ============= Estimated order : %.4f " % order)
```

Ne jamais dupliquer du code !

Introduire une classe d'intégrateurs explicites

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

class ExplMethods(object):
  def __init__(self,name,color,f):
    self.name = name
    self.f = f
    self.color = color

integrators = [ExplMethods("Explicit Euler order 1",".-b",
                     lambda u,x,h : h*(x-u)/2  ),
               ExplMethods("Explicit Taylor order 4",".-r",
                     lambda u,x,h : h*(x-u)/2+(2-x+u)*((h**2)/8-(h**3)/48+(h**4)/384) ) ]

u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x
Xstart = 0; Xend = 3; Ustart = 1;

for integrator in integrators:
  print(" ====== %s method=====" % integrator.name)
  error = zeros(4)
  for j in range(4):
    n = 3*pow(2,j)
    h = (Xend-Xstart)/n
    X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
    U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
    for i in range(n):
      U[i+1] =  U[i] + integrator.f(U[i],X[i],h)
    plt.plot(X,U,integrator.color)
    error[j] = abs(U[-1]-u(Xend))
    print(" ==== %s : h=%5.3f : eh(Xend) = %8.2e " % (integrator.name,h

  order = mean(log(error[:-1]/error[1:])/log(2))
  print(" ============ Estimated order : %.4f " % order)
```



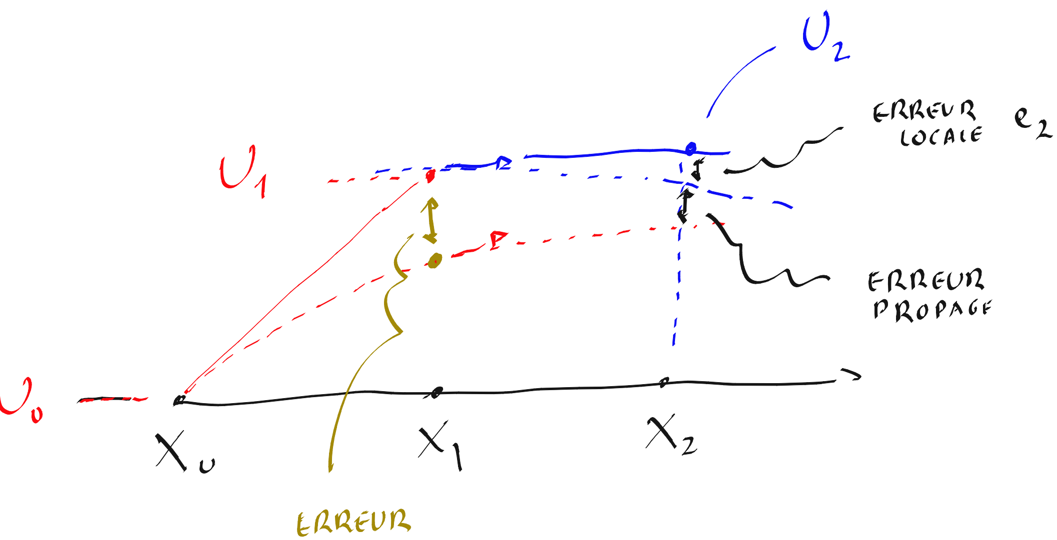
Comment estimer l'erreur ?

$$U_{i+1} = U_i + h\, f(x_i, U_i)$$

$$\boxed{U_1} + h\, f(x_1, U_1)$$

$$e^h(x_2) = u(x_2) - U_2$$

$$\boxed{u(x_1)} + h\, \underbrace{f(x_1, u(x_1))}_{u'(x_1)} + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$



$$\boxed{U_1} + h\, f(x_1 U_1)$$

Erreur locale

Erreur propagée

$$e^h(x_2) = \underbrace{u(x_2)}\, - \widetilde{U_2}$$

$$\boxed{u(x_1)} + h\, \underbrace{f(x_1\, u(x_1))}_{u'(x_1)} + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

$$e^h(x_2) = e^h(x_1) + h\Big[\underbrace{f(x_1\, u(x_1)) - f(x_1 U_1)}_{e^h(x_1)\ \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_1\xi)}}\Big] \underbrace{+ \frac{h^2}{2} u(\xi)}_{e_2}$$

$$= e^h(x_1) \underbrace{\left[1 + h J_1\right]}_{\text{FACTEUR D'AMPLIFICATION}} + e_2$$

$$|1 + h J_1| < 1$$

$$-2 < h J_1 < 0$$

Comment estimer l'erreur ?

Le roi s'en va par une porte…

Développement en série de Taylor

$$\boxed{u(X_{i+1})} = \boxed{u(X_i)} + \boxed{h\ f(X_i, u(X_i)) + \frac{h^2}{2}\ u''(\xi_{i+1})}$$

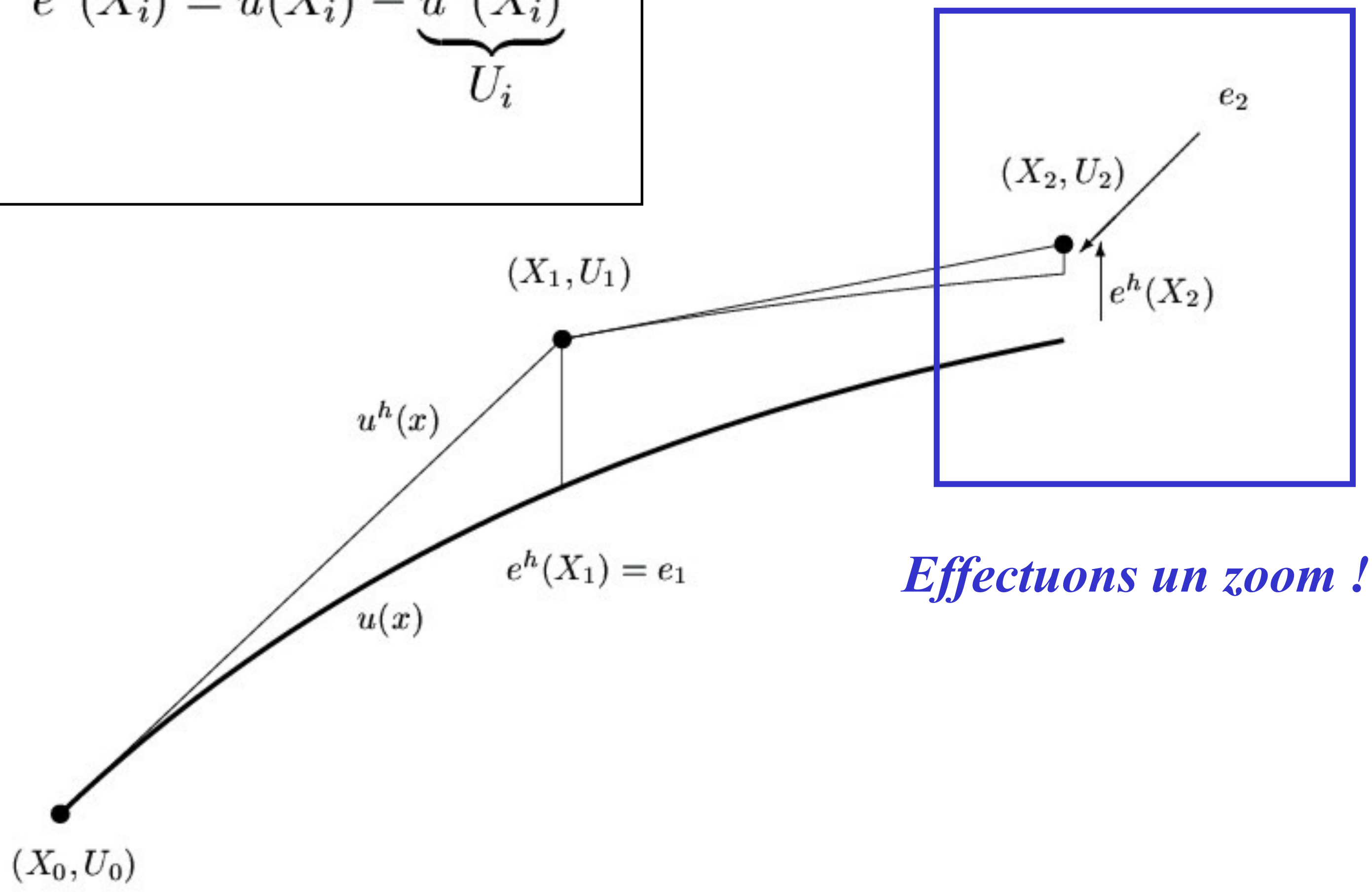
ξ_{i+1} est un point particulier de l'intervalle $[X_i, X_{i+1}]$

Et un triste substitut apparaît…

avec son cortège de courtisans…

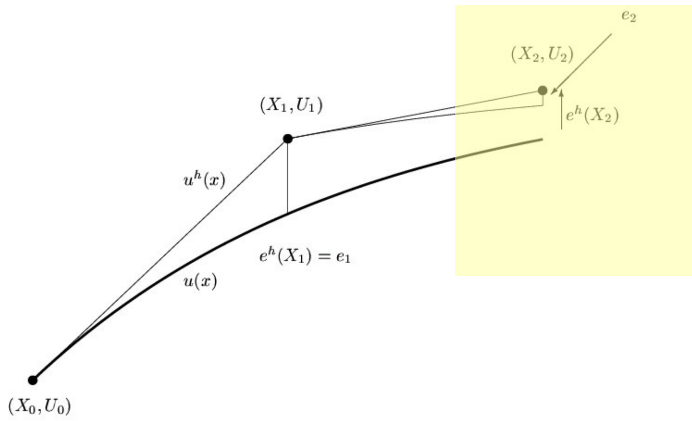
Définissons l'erreur

$$e^h(X_i) = u(X_i) - \underbrace{u^h(X_i)}_{U_i}$$

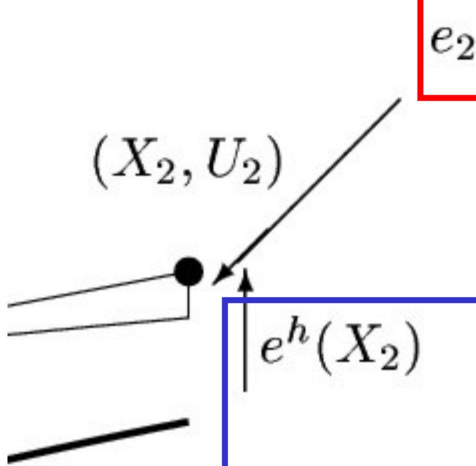


Effectuons un zoom !

Erreur locale et globale



Erreur locale commise lors du pas de X_1 à X_2



Erreur globale de discrétisation = erreur propagée + erreur locale

Taylor
dit bonjour…

$$u(X_{i+1}) = u(X_i) + h\ f(X_i, u(X_i)) + \frac{h^2}{2}\ u''(\xi_{i+1})$$

$$\underbrace{\boxed{u(X_{i+1})} - \boxed{U_{i+1}}}_{e^h(X_{i+1})} = \underbrace{\boxed{u(X_i)} - \boxed{U_i}}_{e^h(X_i)} + h\ \Big(\boxed{f(X_i, u(X_i))} - \boxed{f(X_i, U_i)} \Big) + \boxed{\frac{h^2}{2}\ u''(\xi_{i+1})}$$

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$

… à Euler

$$\underbrace{u(X_{i+1}) - U_{i+1}}_{e^h(X_{i+1})} = \boxed{\underbrace{u(X_i) - U_i}_{e^h(X_i)} + h\left(f(X_i, u(X_i)) - f(X_i, U_i) \right)} + \boxed{\frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})}$$

En vertu du théorème de la valeur moyenne,
il existe ζ_i dans l'intervalle entre U_i et $u(X_i)$
si f est continue et différentiable par rapport à u.

$$e^h(X_{i+1}) = \boxed{e^h(X_i) + h \underbrace{\left(u(X_i) - U_i \right)}_{e^h(X_i)} \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(X_i,\zeta_i)}} + \boxed{\frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})}$$

En définissant $J_i = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(X_i,\zeta_i)}$ et $e_{i+1} = \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$,

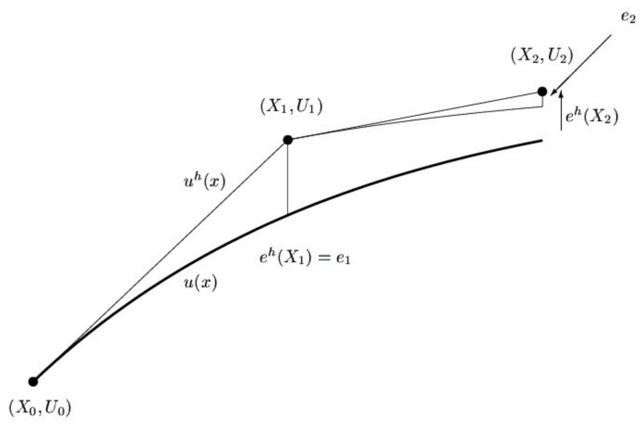
$$e^h(X_{i+1}) = \boxed{e^h(X_i) \left(1 + hJ_i \right)} + \boxed{e_{i+1}}$$

Erreur locale

Erreur propagée

$$\boxed{a_i = (1 + hJ_i)}$$

Facteur d'amplification ou d'amortissement (cas du dessin !) des erreurs précédentes



Propagation des erreurs…

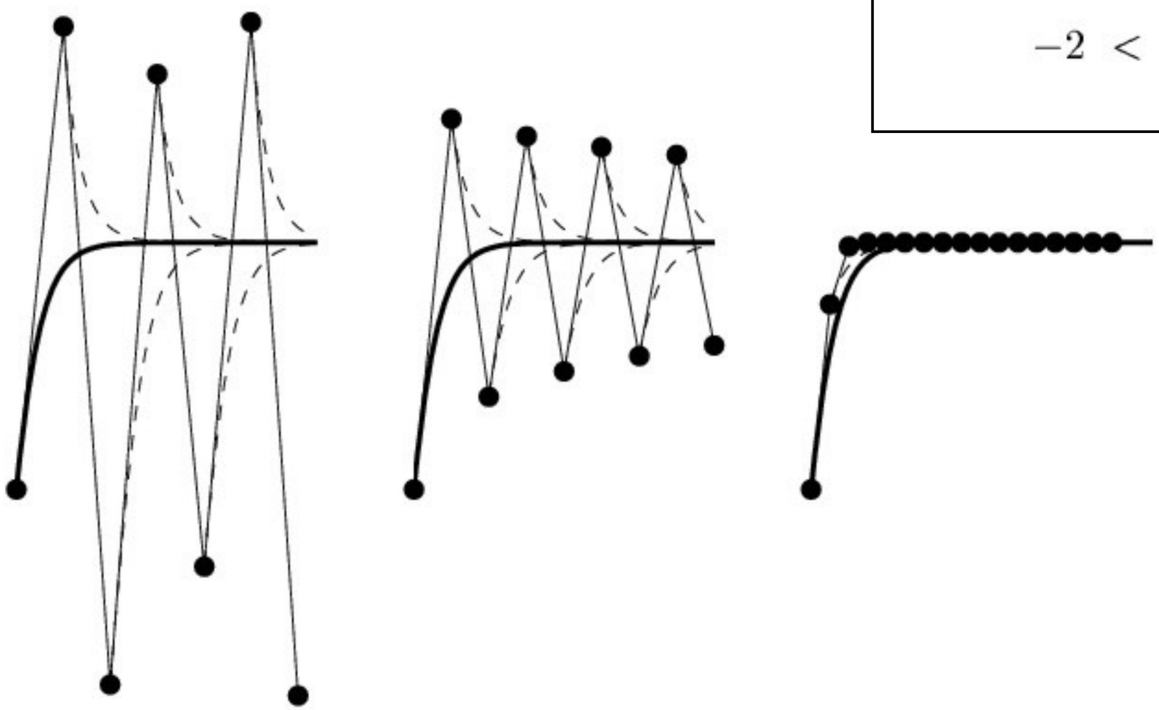
$$\begin{aligned}
e^h(X_1) &= e_1 \\
e^h(X_2) &= a_1\, e_1 + e_2 \\
e^h(X_3) &= a_2 a_1\, e_1 + a_2\, e_2 + e_3 \\
&\dots \\
e^h(X_{i+1}) &= \boxed{\underbrace{a_i a_{i-1} \dots a_2 a_1\, e_1 + a_i \dots a_2\, e_2 \ \dots + a_i e_i}_{\text{erreur propagée}}} + \boxed{e_{i+1}}
\end{aligned}$$

Stabilité de la méthode d'Euler

$$\big|\overbrace{1 + hJ_i}^{a_i}\big| \quad < \quad 1 \qquad\qquad \forall i,$$

$$\downarrow$$

$$-2 \; < \; hJ_i \; < \; 0 \qquad\qquad \forall i,$$

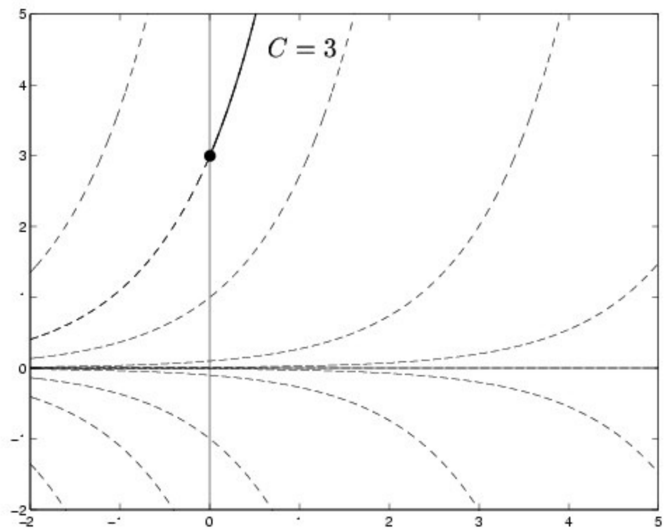


$h = 1.25$ (instable) $\qquad$ $h = 1.00$ $\qquad$ $h = 0.50$ (stable)

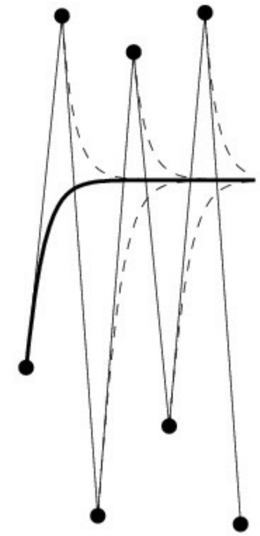
Stabilité…

Stabilité d'un système physique :
systèmes chaotiques, turbulence…

Stabilité d'un modèle mathématique :
sensibilité aux données



Stabilité d'une méthode numérique :
instabilité numérique de la méthode d'Euler explicite



Modélisation mathématique

Simulation numérique