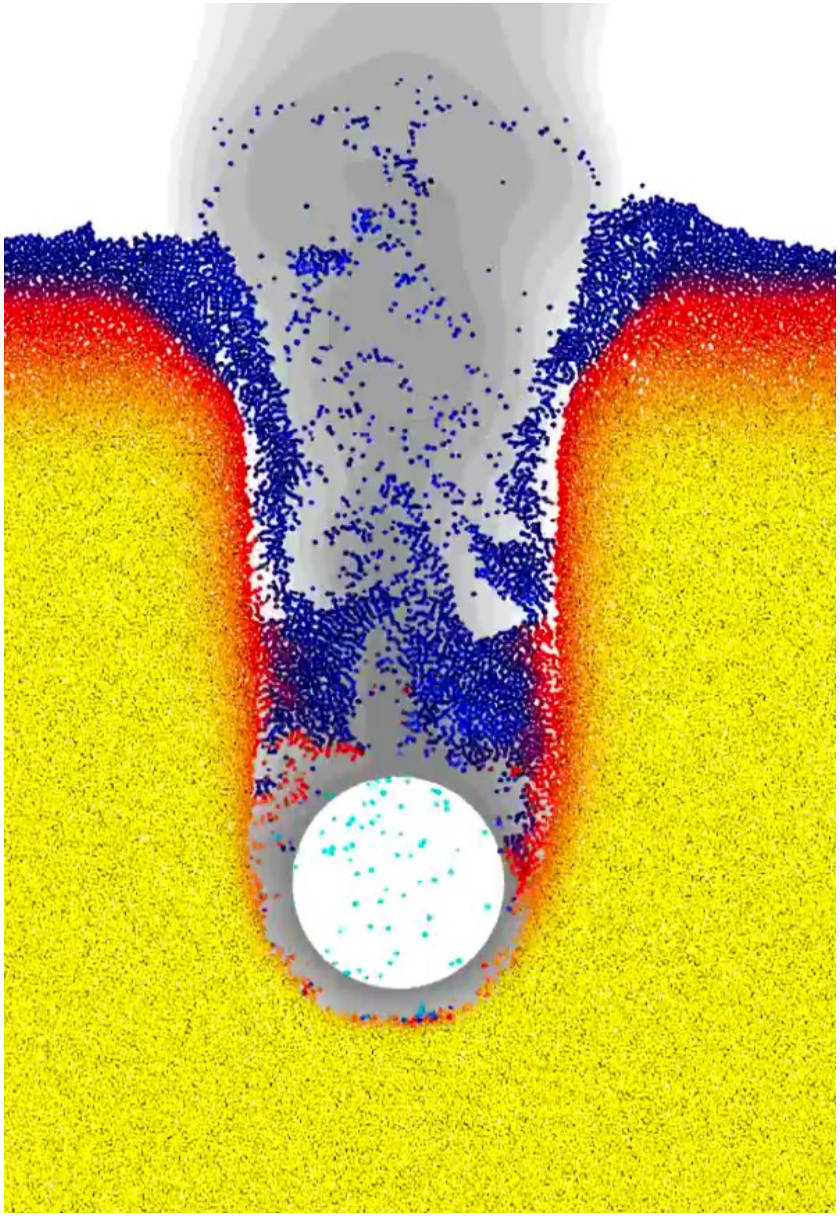
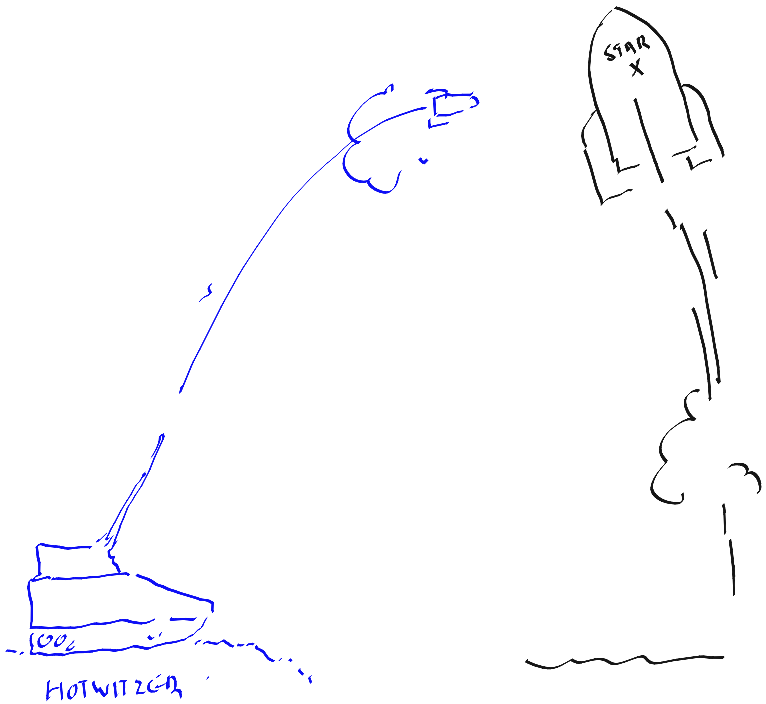
Une goutte d’eau qui chute sur du sable chaud

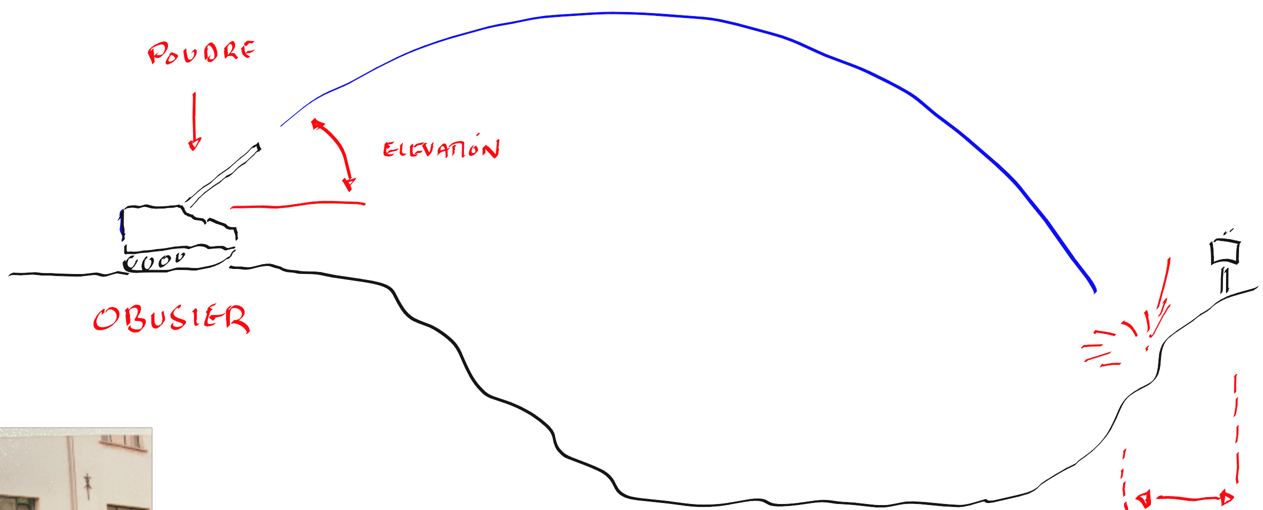


Sur le front de l’Est…

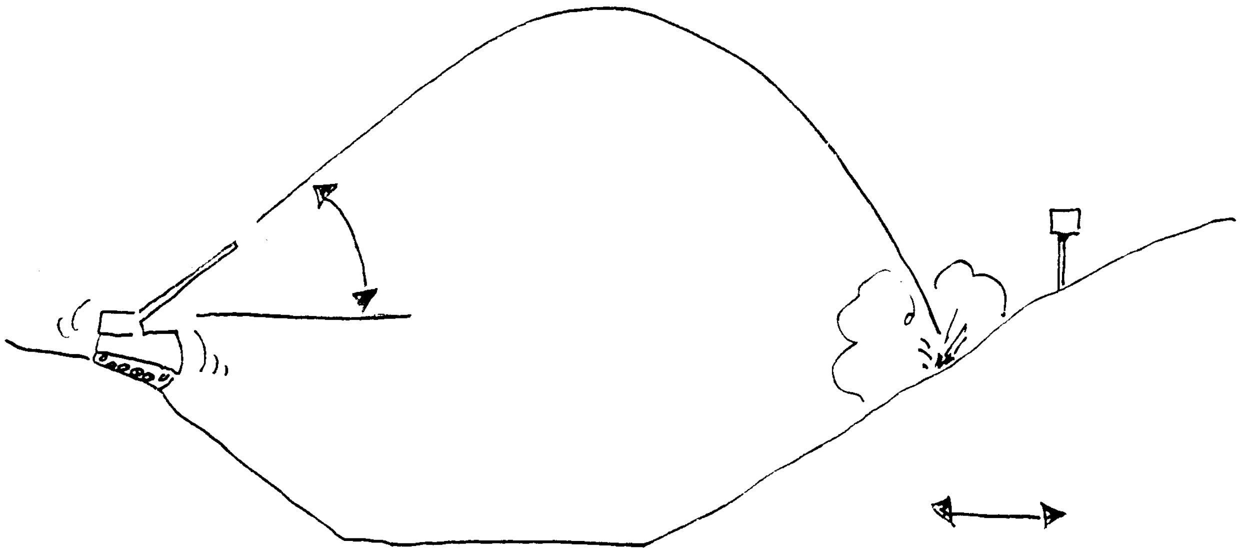


AUJOURD’HUI LA METHODE DU TIR !

Sur le front de l'Est…



A quoi servent les méthodes numériques ?



Fonction non linéaire

Trouver x tel que

$$f(x) = 0$$

Problèmes non linéaires

Suite de candidats…

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

… qui devrait converger vers une racine

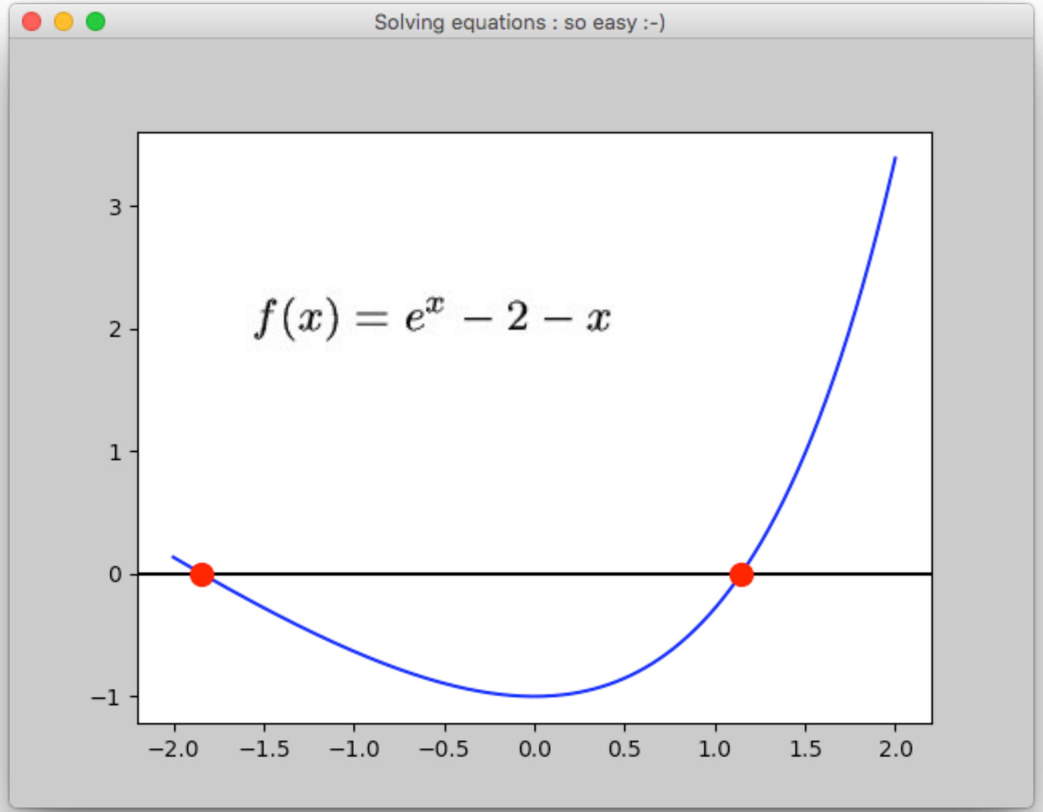
Questions

- Convergence vers une racine
- Candidat initial
- Encadrement

Méthodes numériques itératives

- Méthode de bissection
- Méthode du point fixe
- Méthode de Newton-Raphson

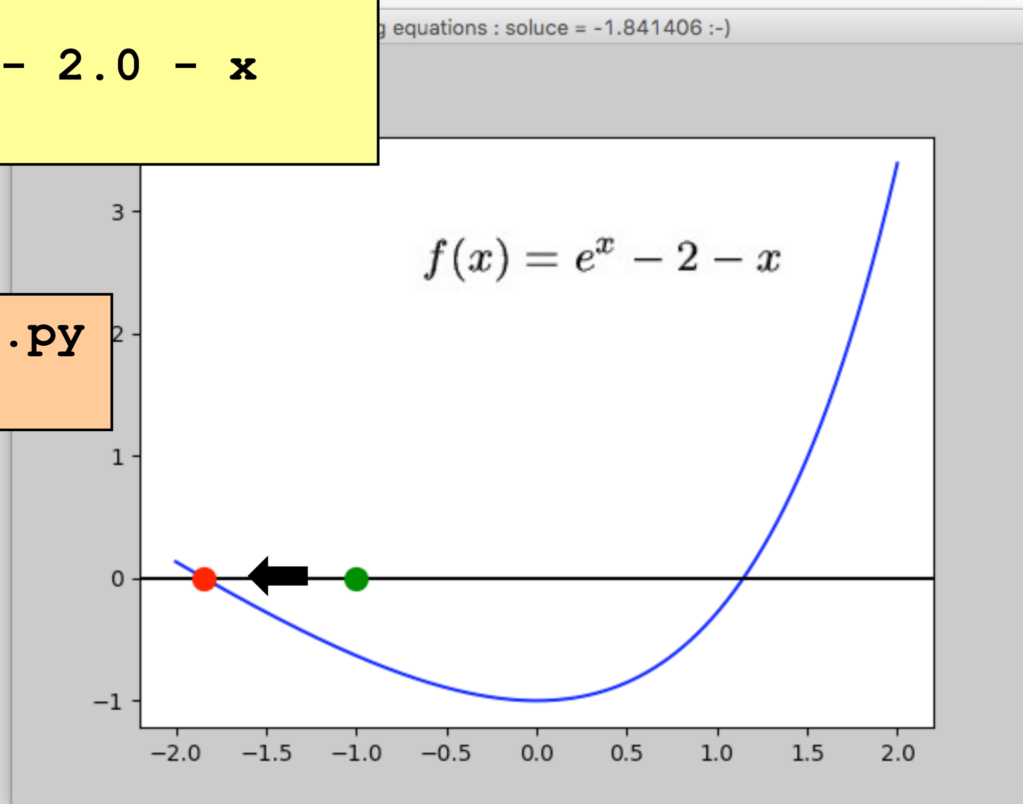
Exemple simple



Avec scipy, c'est très facile…

```
from math import exp
from scipy.optimize import fsolve

f = lambda x : exp(x) - 2.0 - x
print(fsolve(f,-1))
```

```
bash-3.2$ python solve.py
[-1.84140566]
```

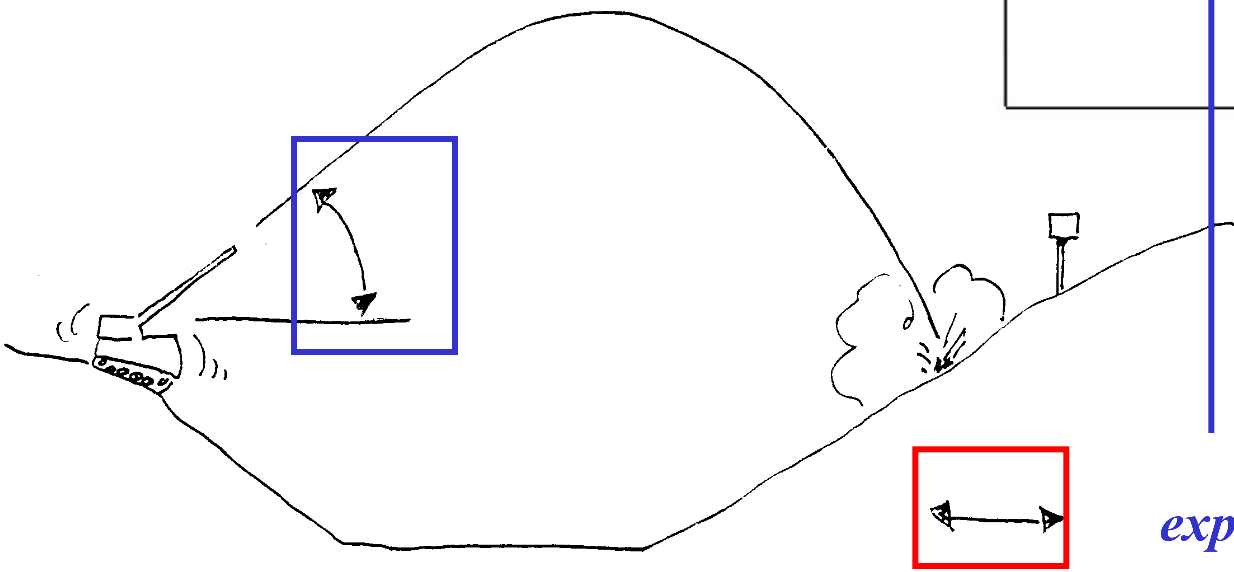


Exemple plus réaliste

Distance entre l'explosion et la cible

Trouver x tel que

$$\boxed{f(x)} = 0$$



explosif fusant charge 3
inclinaison 249
déplacement 4559

Comment prédire ou prévoir f ?

Trouver x tel que

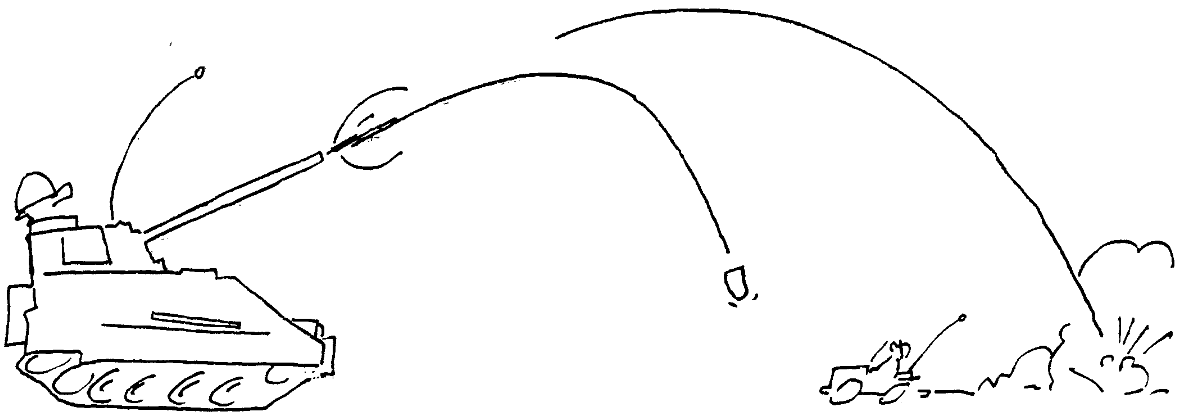
$$\boxed{f(x)} = 0$$

Trajectoire de l'obus = solution d'une équation différentielle ordinaire
Paramètres à tenir en compte :

- *Charge de poudre, type d'obus,*
- *Usure du tube (change après chaque coup !)*
- *Calibrage de l'obusier (différent pour chaque pièce !)*
- *Position calculée de la pièce d'artillerie (travail de topographie)*
- *Position estimée de la cible (observateur avancé)*
- *Vents dominants, humidité de l'air*
- *Rotation de la terre*

On obtient donc f(x) en utilisant ode45…

Evidemment entre modèle et réalité…



Méthodes itératives

C constante positive et inférieure à l'unité

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|e_i|}{|e_{i-1}|^r} = C$$

taux de convergence

$10^{-2} \rightarrow 10^{-2}/2 \rightarrow 10^{-2}/4$

$r = 1$
$C = 1/2$

CONVERGENCE LINEAIRE

CONVERGENCE QUADRATIQUE $r = 2$

$10^{-2} \rightarrow 10^{-4} \rightarrow 10^{-8} \rightarrow 10^{-16}$

$$e_i = x - x_i$$

La séquence converge si on peut trouver C et r

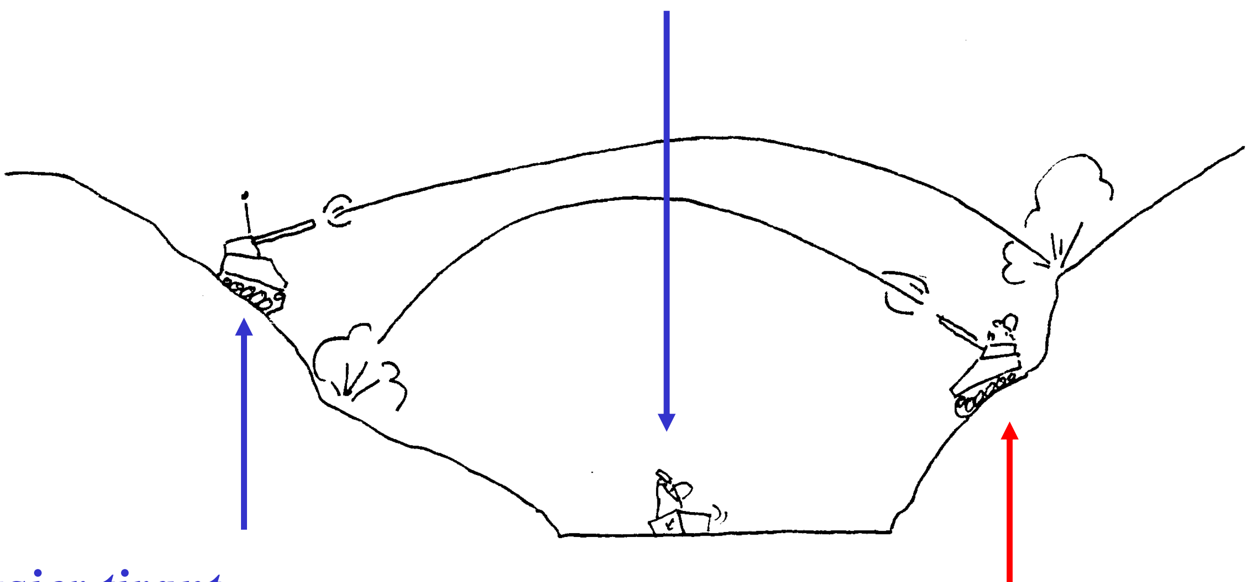
r = taux de convergence

r=1 taux de convergence linéaire

r=2 taux de convergence quadratique

Est-il important de converger rapidement ?

Observateur avancé ajustant le tir (espérance de vie très limitée en général…)



Obusier tirant sur l'obusier adverse…

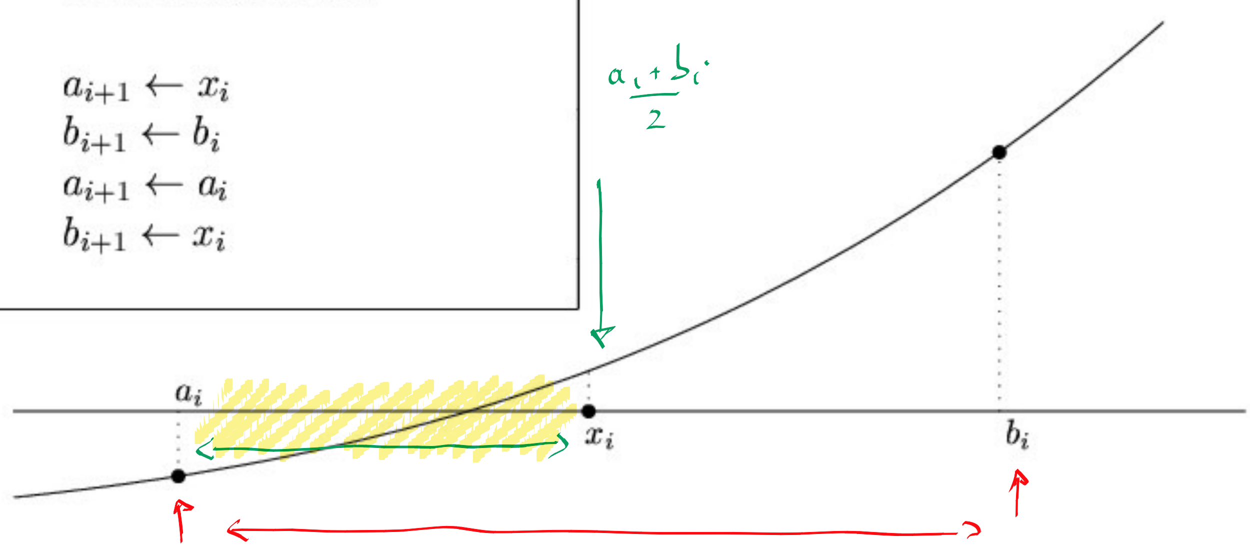
Obusier adverse tentant de vous détruire au même moment…

La technique de bissection est une méthode d'encadrement

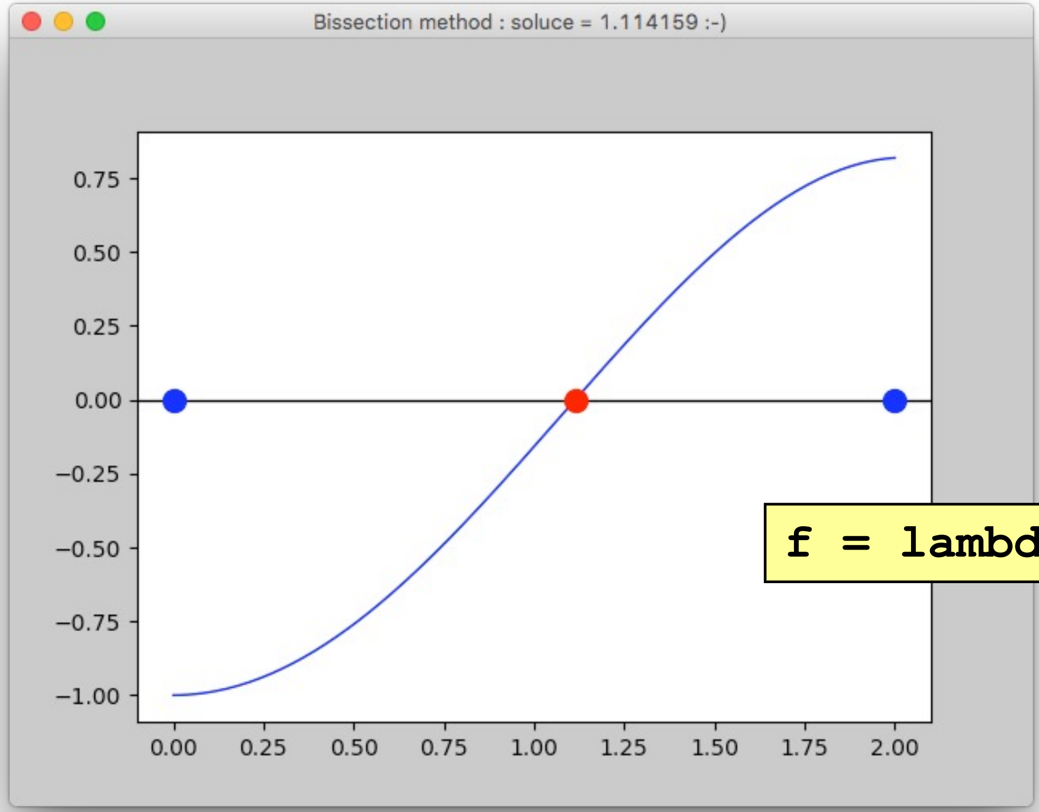
On fournit un intervalle $[a_0, b_0]$ avec $f(a_0)f(b_0) < 0$ et on calcule trois suites a_i, b_i, x_i par

$$x_i = \frac{(a_i + b_i)}{2}$$

Si $f(x_i) = 0$	On a une solution !
Si $f(x_i)f(a_i) > 0$	$a_{i+1} \leftarrow x_i$ $b_{i+1} \leftarrow b_i$
Sinon	$a_{i+1} \leftarrow a_i$ $b_{i+1} \leftarrow x_i$

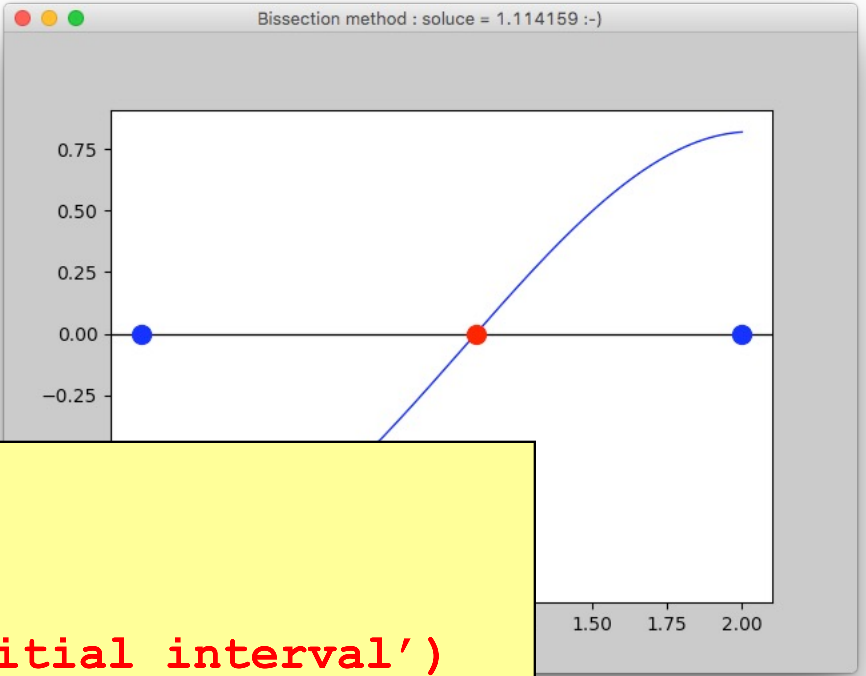


Exemple pour la méthode de bissection…




```
f = lambda x : x * sin(x) - 1
```

Programme python




```
def bissect(a,b,f,tol,nmax):
  n = 0; delta = (b-a)/2
  if (f(a)*f(b) > 0) :
    raise RuntimeError('Bad initial interval')
  while (abs(delta) >= tol and n <= nmax) :
    delta = (b-a)/2; n = n + 1;
    x = a + delta
    if (f(x)*f(a) > 0) :
      a = x
    else :
      b = x
  if (n > nmax) :
    raise RuntimeError('Too much iterations')
  return x
```

Une fioriture numérique…

```
x = a + (b-a)/2
```

```
>>> import numpy as np
>>> b = np.finfo(float).max
>>> a = b - 10**300
>>> (a+b)/2
inf
>>> a + (b-a)/2
1.797693129862315 6e+308
>>> (b-a)/2
4.999999900185599e+299
```

…ou…

```
x = (a+b)/2
```

Et le résultat…

```
x =  1.0000000e+00 (Estimated error 1.0000000e+00 at iteration 1)
x =  1.5000000e+00 (Estimated error 5.0000000e-01 at iteration 2)
x =  1.2500000e+00 (Estimated error 2.5000000e-01 at iteration 3)
x =  1.1250000e+00 (Estimated error 1.2500000e-01 at iteration 4)
x =  1.0625000e+00 (Estimated error 6.2500000e-02 at iteration 5)
x =  1.0937500e+00 (Estimated error 3.1250000e-02 at iteration 6)
x =  1.1093750e+00 (Estimated error 1.5625000e-02 at iteration 7)
x =  1.1171875e+00 (Estimated error 7.8125000e-03 at iteration 8)
x =  1.1132812e+00 (Estimated error 3.9062500e-03 at iteration 9)
x =  1.1152344e+00 (Estimated error 1.9531250e-03 at iteration 10)
x =  1.1142578e+00 (Estimated error 9.7656250e-04 at iteration 11)
x =  1.1137695e+00 (Estimated error 4.8828125e-04 at iteration 12)
x =  1.1140137e+00 (Estimated error 2.4414062e-04 at iteration 13)
x =  1.1141357e+00 (Estimated error 1.2207031e-04 at iteration 14)
x =  1.1141968e+00 (Estimated error 6.1035156e-05 at iteration 15)
x =  1.1141663e+00 (Estimated error 3.0517578e-05 at iteration 16)
x =  1.1141510e+00 (Estimated error 1.5258789e-05 at iteration 17)
x =  1.1141586e+00 (Estimated error 7.6293945e-06 at iteration 18)
```

On observe un taux de convergence linéaire…

Taux de convergence linéaire

$$|e_0| \leq \frac{b_0 - a_0}{2}$$

$\Big\downarrow$ En effectuant une nouvelle itération

$$|e_1| \leq \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

$\Big\downarrow$

$$|e_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

$$\boxed{|e_i| \leq \frac{1}{2}|e_{i-1}|}$$

Problème aux conditions aux limites

Trouver $u(x)$ tel que

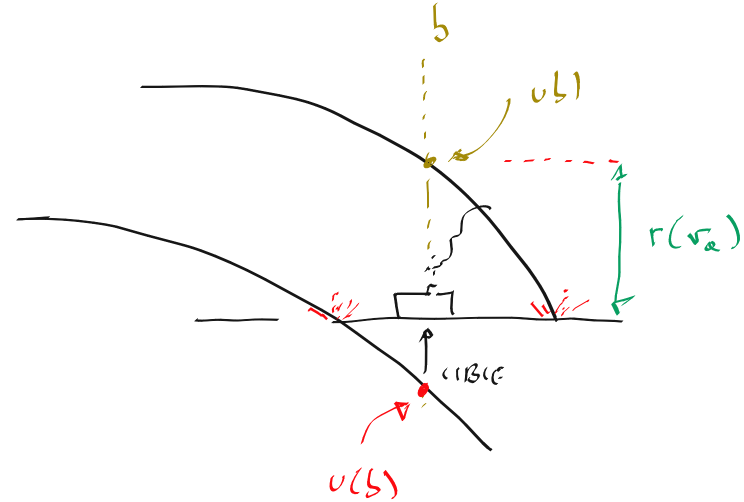
$$\left\{\begin{array}{rcll} u''(x) & = & f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ & & & \\ u(a) & = & u^a & \\ u(b) & = & u^b & \end{array}\right.$$

$m\,x''(t) = -C\,x'(t)$
$m\,y''(t) = -C\,y'(t) + mg$

Trouver $(u(x), v(x))$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'(x) & = & v(x) & \\ v'(x) & = & f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ & & & \\ u(a) & = & u^a & \\ u(b) & = & u^b & \end{array}\right.$$

Première idée : Méthode du tir



$$r(v^a) = 0$$

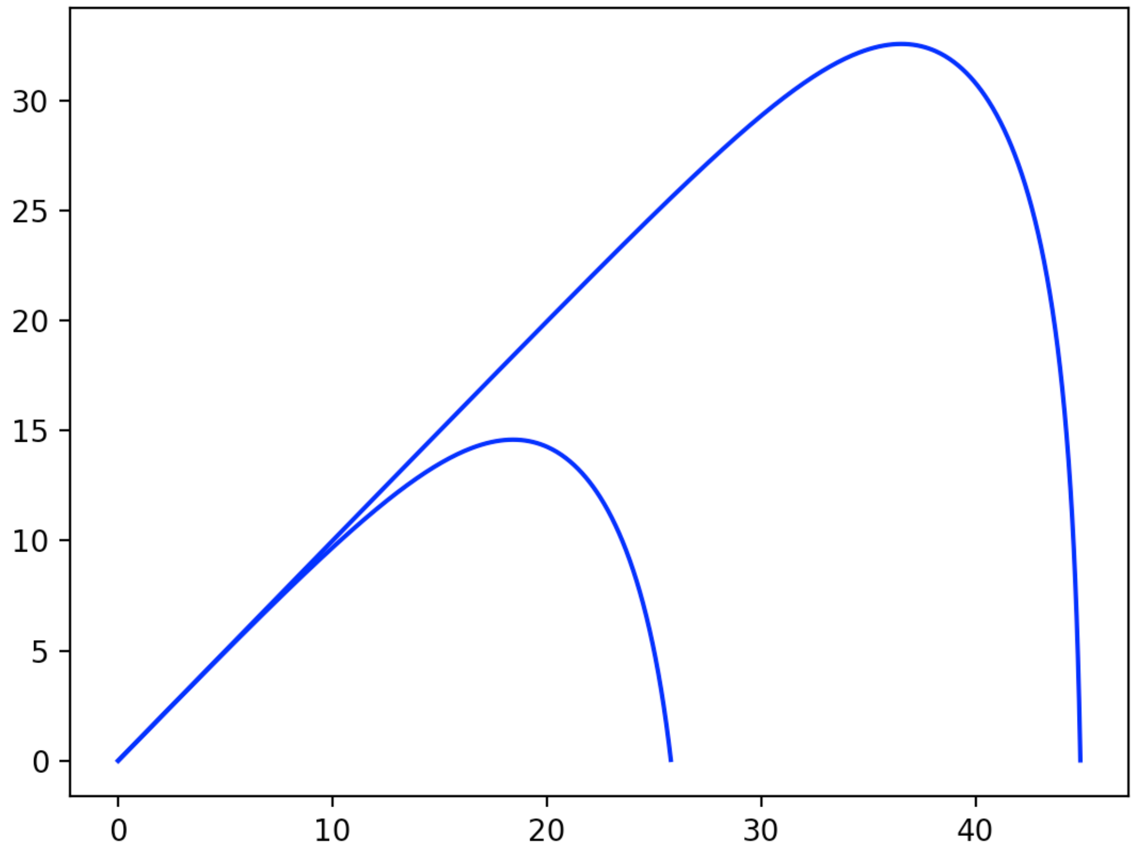
C'est la technique de l'artilleur

Technique d'ajustement
par essais et erreurs…
et une méthode d'encadrement

$$r \ : \ (v^a) \ \rightarrow \ \underbrace{u^b - u^h(b, v^a)}_{r(v_a)}$$

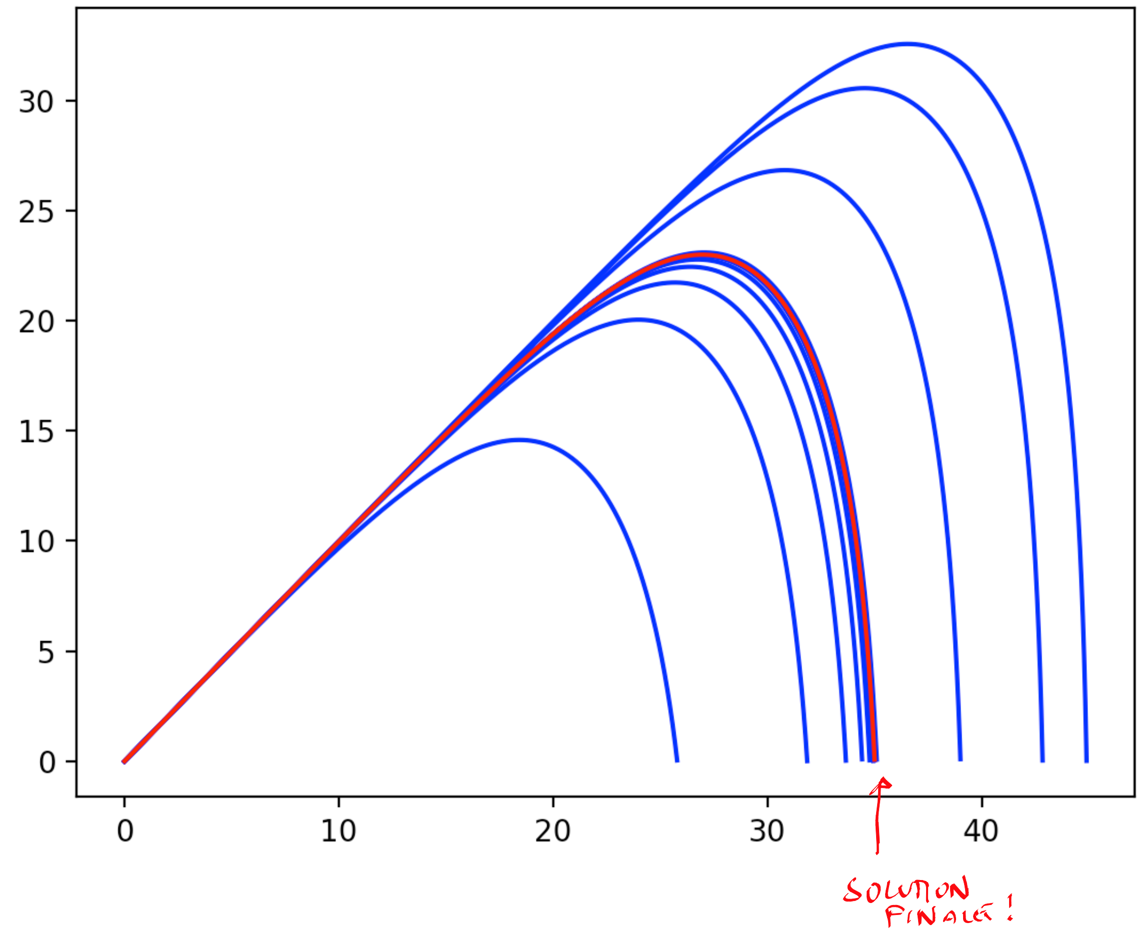
Pour la trajectoire d'un vrai obus…

```
def f(u):

  friction = 0.1 * sqrt(u[1]*u[1]+u[3]*u[3])
  mass = 1

  dxdt = u[1]
  dudt = - (friction * u[1]) / mass
  dydt = u[3]
  dvdt = - (friction * u[3]) / mass - 9.81

  return array([dxdt,dudt,dydt,dvdt])
```



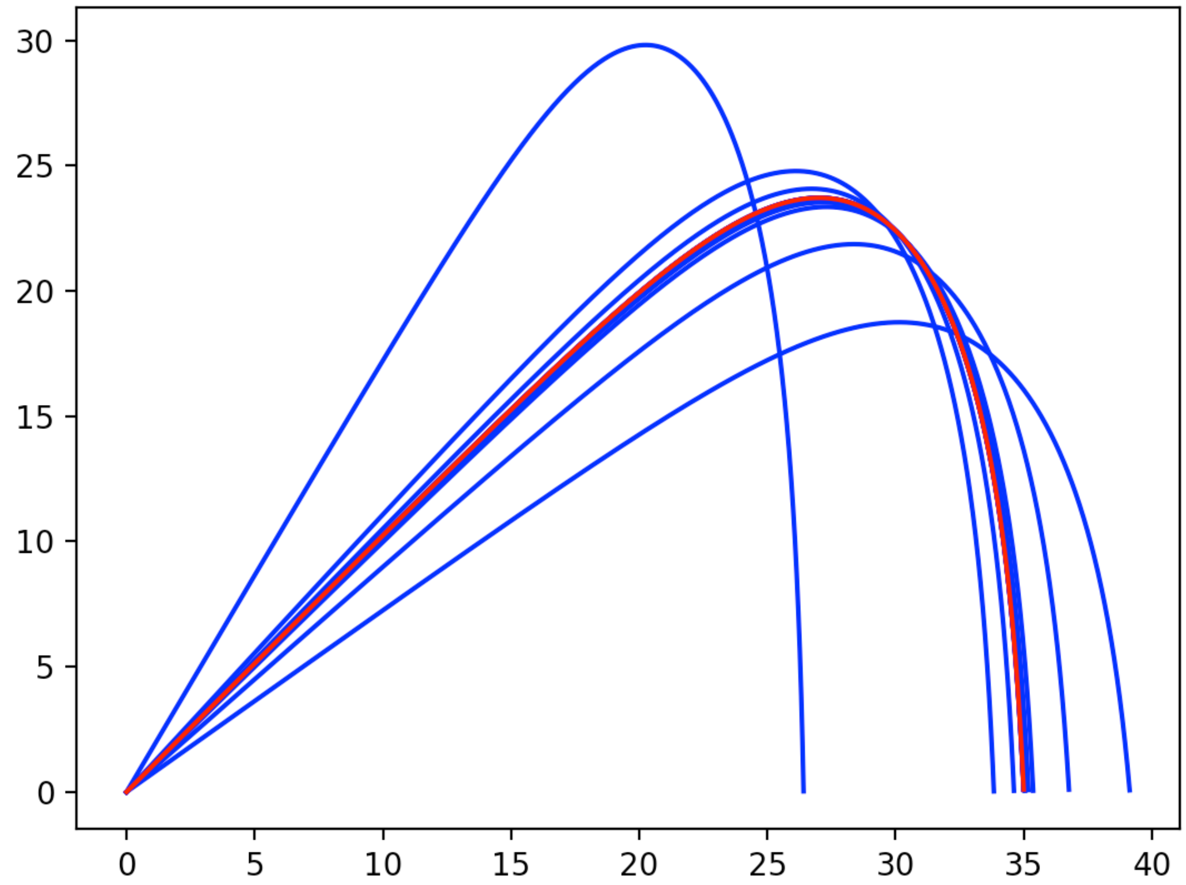
Ajustons la puissance du tir…

Utilisons la technique bissection pour ajuster la vitesse initiale de l’obus.



Ajustons la puissance du tir…

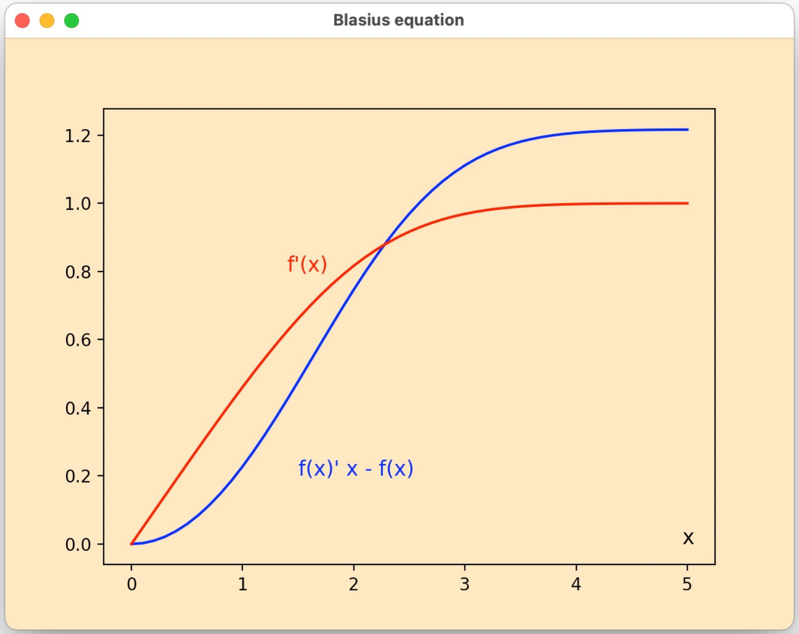
Utilisons la technique bissection pour ajuster la vitesse initiale de l'obus.



Ajustons l’angle du tir…

Utilisons la technique bissection pour ajuster l’inclinaison du tube.

$$\begin{cases} f'''(x) + f(x)f''(x) & = & 0 \\ \\ f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ \lim_{x\to\infty} f'(x) & = & 1 \end{cases}$$



Equation de Blasius

Seconde idée : Différences finies

$u'' = f(x,u)$

$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$

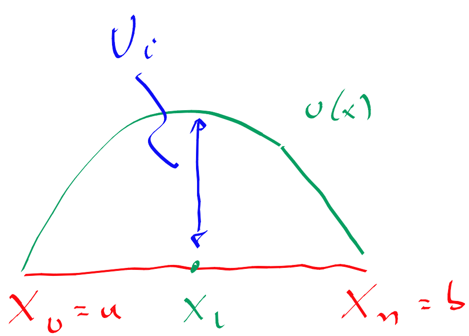
C'est la vision satellitaire

Synthèse globale des conditions limites par la résolution d'un système d'équations

$$0 = u''(X_i) - f(X_i, U_i) \approx (u^h)''(X_i) - f(X_i, U_i)$$

En utilisant une différence finie centrée d'ordre deux,

$$\approx \frac{(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})}{h^2} - f(X_i, U_i)$$



Il est alors nécessaire de résoudre un système…

$$
\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}
h^2 & 0 & & & & & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 & -2 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & -2 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & -2 & 1 & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & -2 & 1 & \\
 & & & & & & & 0 & h^2 &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_{m-2} \\ U_{m-1} \\ U_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u^a \\ f(X_1, U_1) \\ f(X_2, U_2) \\ f(X_3, U_3) \\ f(X_4, U_4) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(X_{m-1}, U_{m-1}) \\ u^b
\end{bmatrix}
$$

Système linéaire si f linéaire en u
Système non-linéaire si f non-linéaire en u

$u'' = -u$

Exemple (linéaire)

$$u''(x) = x - u(x)$$

Deux constantes à choisir pour satisfaire les deux conditions aux limites !

SOLUTION PARTICULIERE DE L'EQUATION NON HOMOGENE

$$u(x) = x + \underbrace{Acos(x) + Bsin(x)}_{\text{SOLUTIONS DE L'EQUATION HOMOGENE}}$$

Solution analytique

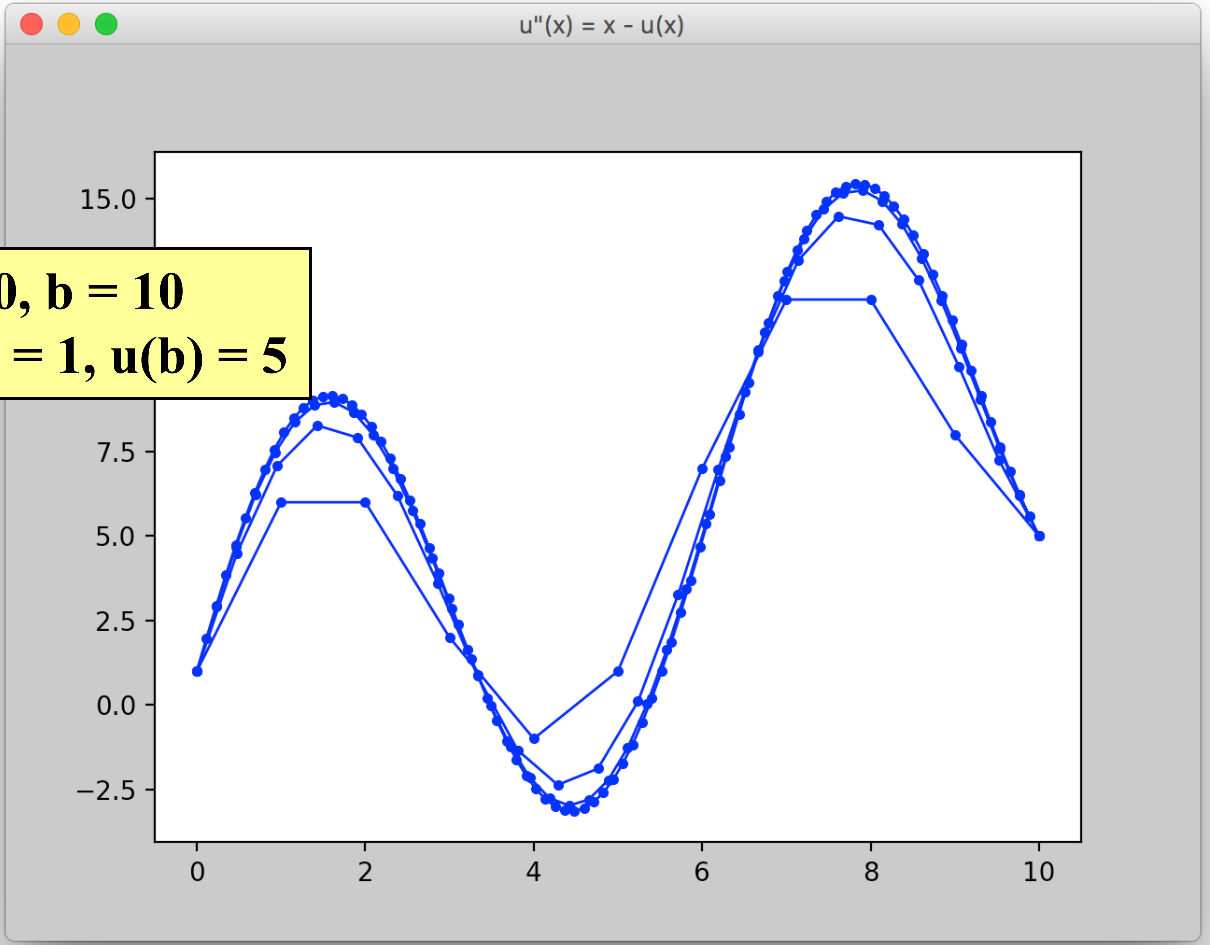
Problème numérique

$$
\frac{1}{h^2}
\begin{bmatrix}
0 & 0 & & & & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & -2 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & -2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & -2 & 1 & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & 1 & -2 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & -2 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_{m-2} \\ U_{m-1} \\ U_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u^a \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3) \\ X_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ u^b
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \\ U_{m-2} \\ U_{m-1} \\ U_m
\end{bmatrix}
$$

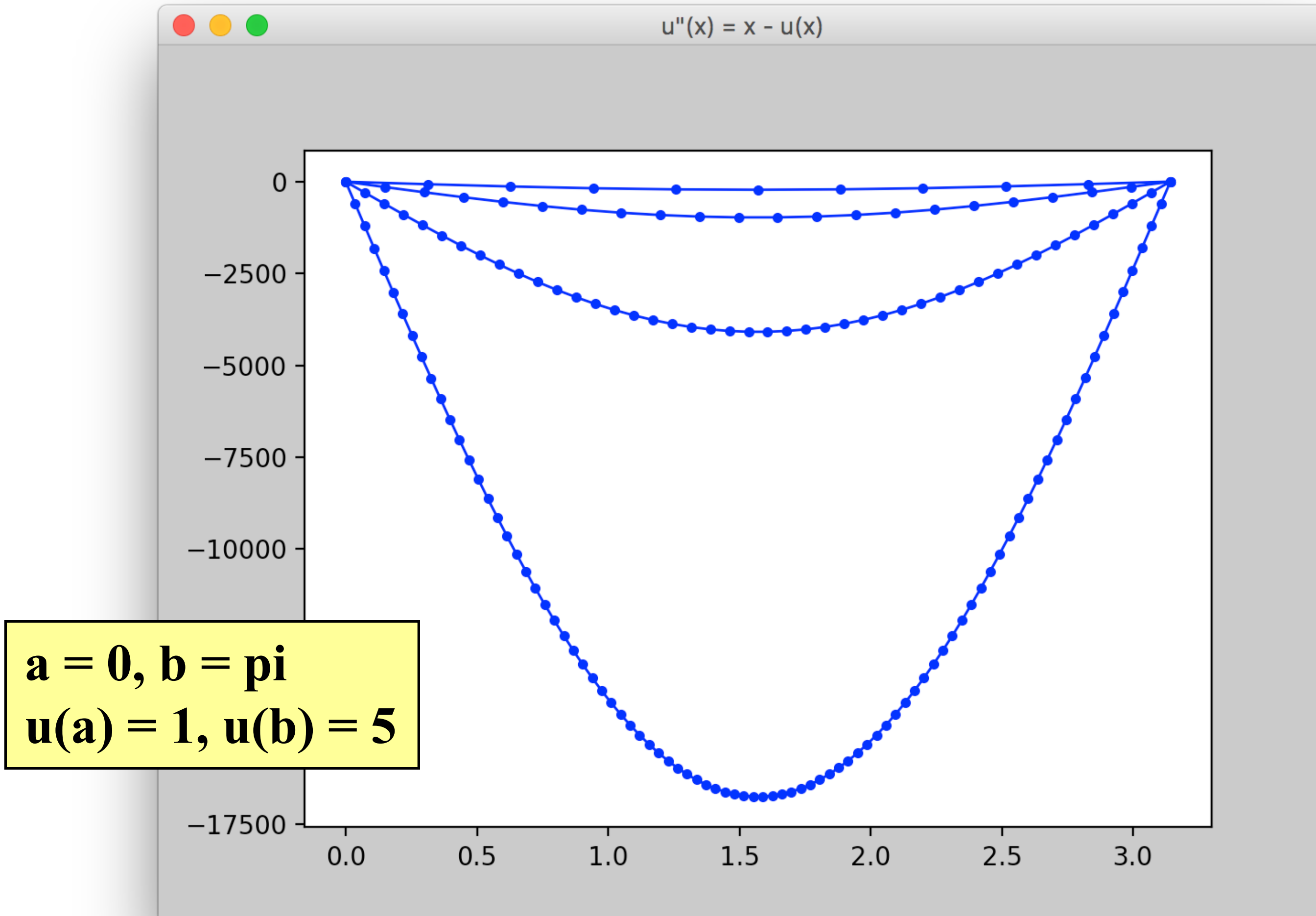
```
X = linspace(a,b,n)
h = (b-a)/(n-1)

b = array([0,*ones(n-2),0])
A = spdiags([b,-2*b,b],[-1,0,1],n,n)/(h*h)
B = copy(X); B[0] = Ua; B[-1] = Ub

U = spsolve(A.T + eye(n,n),B)
```

Et hop, un joli résultat :-)

a = 0, b = 10
u(a) = 1, u(b) = 5

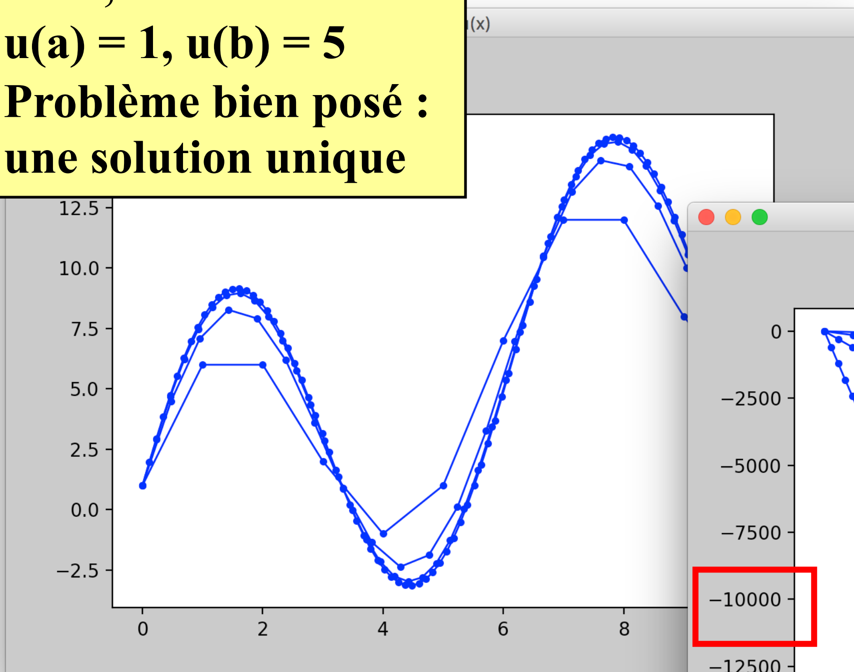


Un autre joli résultat :-(

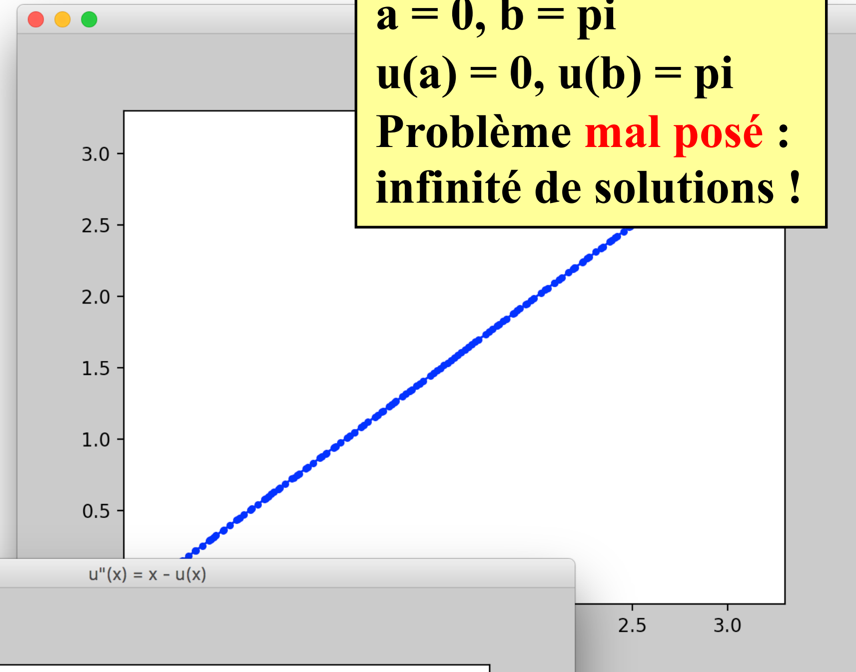


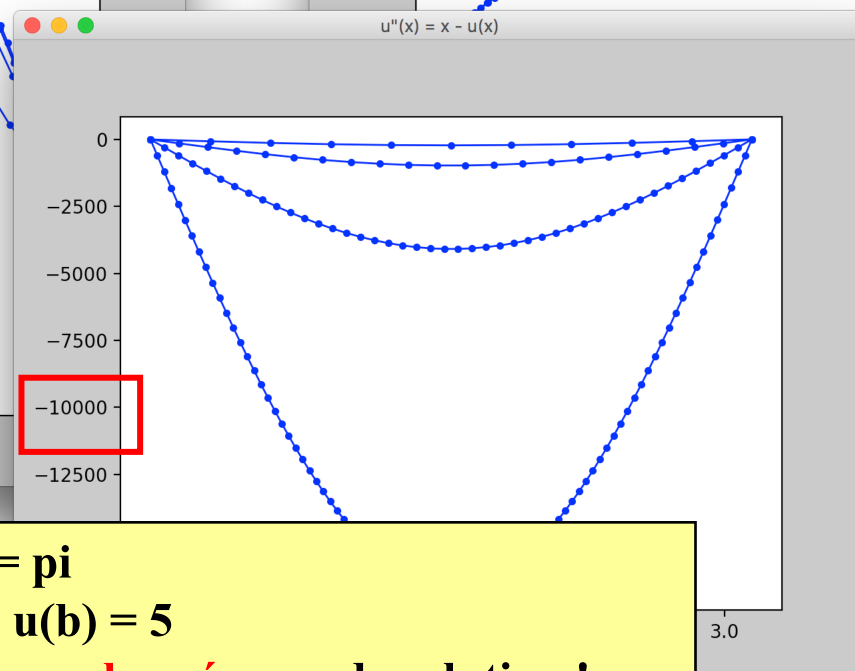
Est-ce que cela marche toujours ?

a = 0, b = 10
u(a) = 1, u(b) = 5
Problème bien posé : une solution unique



a = 0, b = pi
u(a) = 0, u(b) = pi
Problème mal posé : infinité de solutions !





a = 0, b = pi
u(a) = 1, u(b) = 5
Problème mal posé : pas de solution !
Les solutions obtenues n'ont aucun sens !

EQUATION
DE POISSON

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{sur } \Omega$$

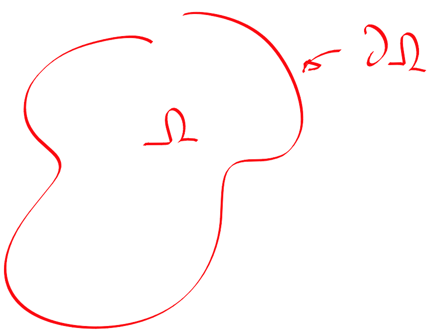
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$u'' = f$$

$$u(a) = 0$$

$$u(b) = 0$$

LE PROBLEME N'EST PAS TOUJOURS BIEN POSE !



LE PROBLEME EST TOUJOURS BIEN POSÉ !

1D et …. 2D !

Pas le même monde !

Fonction non linéaire

Trouver x tel que

$$f(x) = 0$$

Problèmes non linéaires

Suite de candidats…

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

… qui devrait converger vers une racine

Questions

- Convergence vers une racine
- Candidat initial
- Encadrement

Méthodes numériques itératives

- Méthode de bissection √
- Méthodes du point fixe
- Méthode de Newton-Raphson

Méthode du point fixe

Trouver x tel que

$$f(x) = 0$$

On reformule le problème…

Trouver x tel que

$$x = g(x)$$

Il existe plein de possibilités de choix pour g !

Méthode du point fixe

On fournit x_0

Tant que $|\Delta x| > \epsilon$, on calcule x_{i+1} à partir de x_i avec

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Si on converge, la solution x est le dernier x_{i+1} calculé

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Comment « bien » définir g à partir de f ?

Réécrivons l'équation $f(x) = 0$ sous une forme[2]

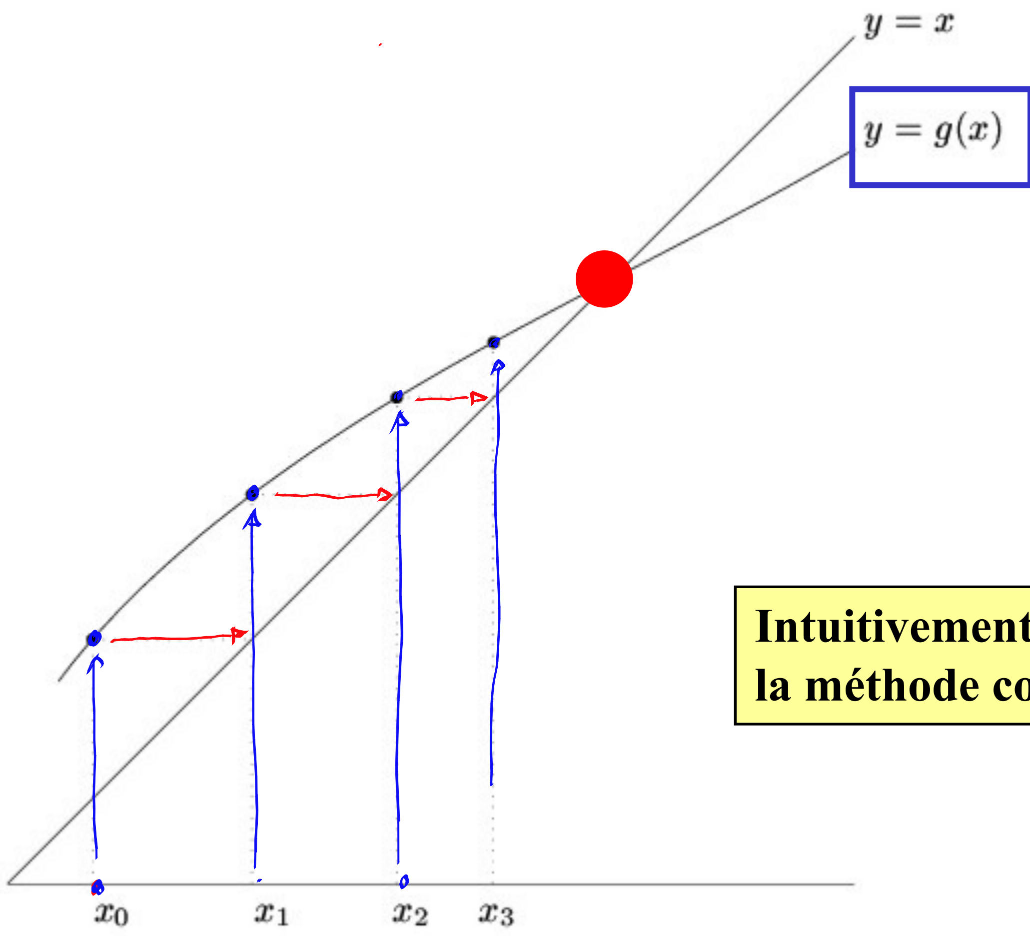
---

[2] Il existe une infinité de façons d'écrire une équation $f(x) = 0$ sous une forme $\boxed{x = g(x)}$. A titre d'exemple considérons $f(x) = x^3 - 3x + 1$

On peut ainsi écrire $x = \dfrac{(x^3+1)}{3}$, ou $x = (3x-1)^{1/3}$ ou encore $x = x - x^3 + 3x - 1 \ldots$

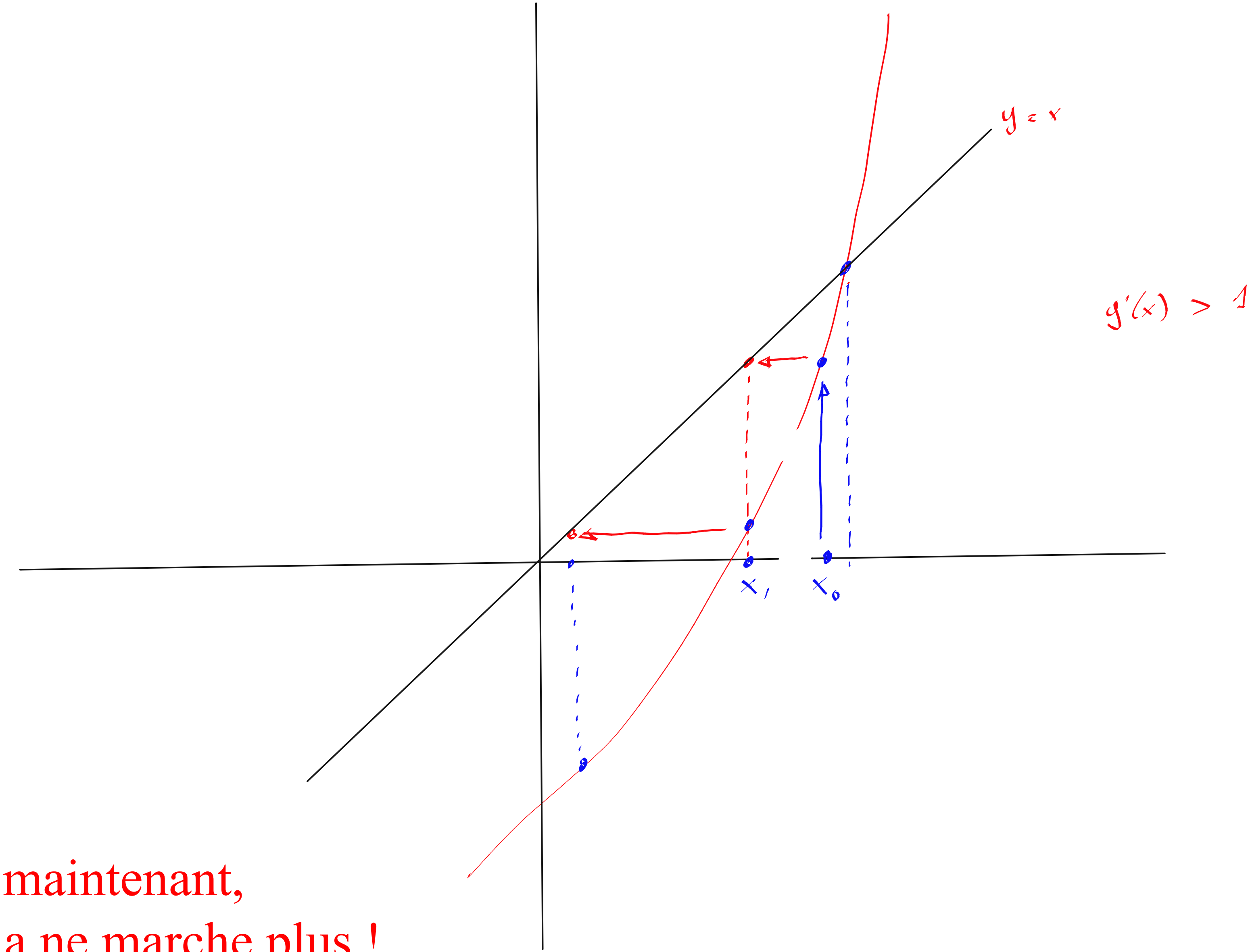
C'est une bonne question…
On va s'y intéresser d'ici peu

Interprétation géométrique



$$x_{i+1} \quad = \quad g(x_i)$$

Intuitivement, on observe que la méthode converge si |g'(x)| < 1



Et maintenant,
cela ne marche plus !

Exemple

$x = \underbrace{\frac{x^3+1}{3}}_{g(x)}$

$$\underbrace{x^3 - 3x + 1}_{f(x)} = 0$$

$x^3 - 2x + 1 = g(x)$

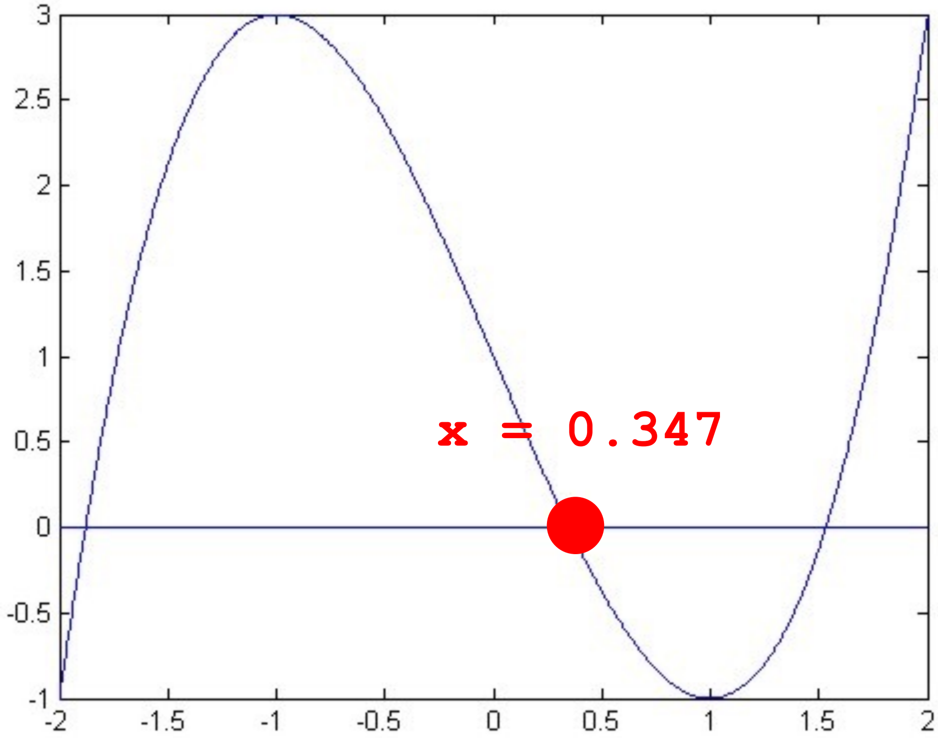
$x = \overbrace{\underbrace{x^3 - 3x + 1}_{=0} + x}$

$x = \overbrace{\underbrace{-x^3 + 3x - 1}_{=0} + x}$

$g(x) = -x^3 + 4x - 1$

$x = \underbrace{\sqrt[3]{3x-1}}_{g(x)}$

Exemple

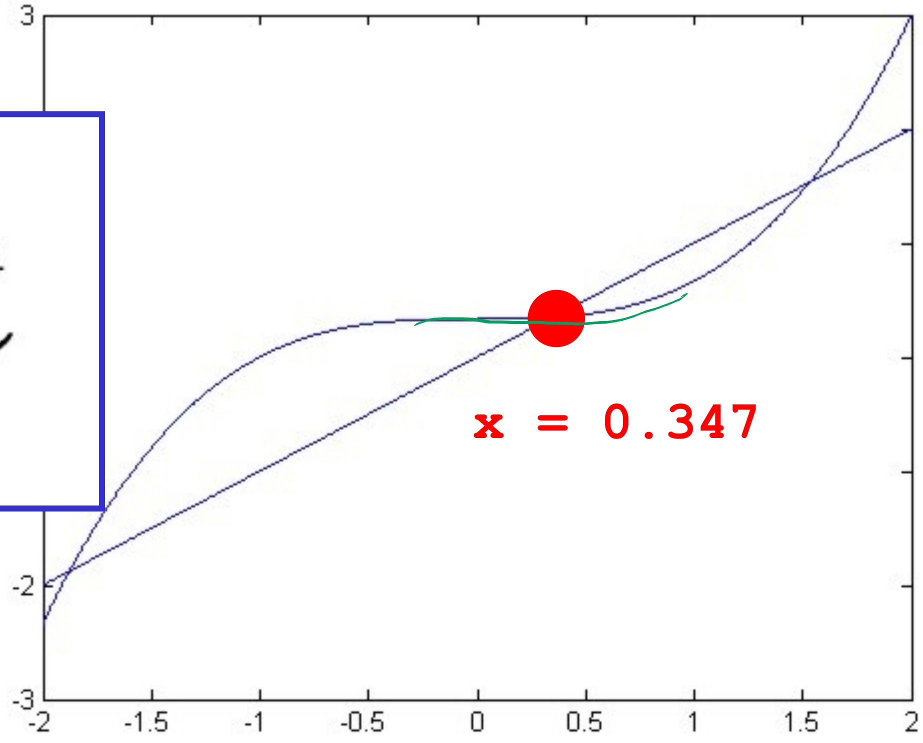


$$\underbrace{x^3 - 3x + 1}_{f(x)} = 0$$

Une itération possible…

$$\underbrace{x^3 - 3x + 1}_{f(x)} = 0$$

$$\boxed{x_{i+1} = \underbrace{\frac{x_i^3 + 1}{3}}_{g(x_i)}}$$



Une implémentation possible…

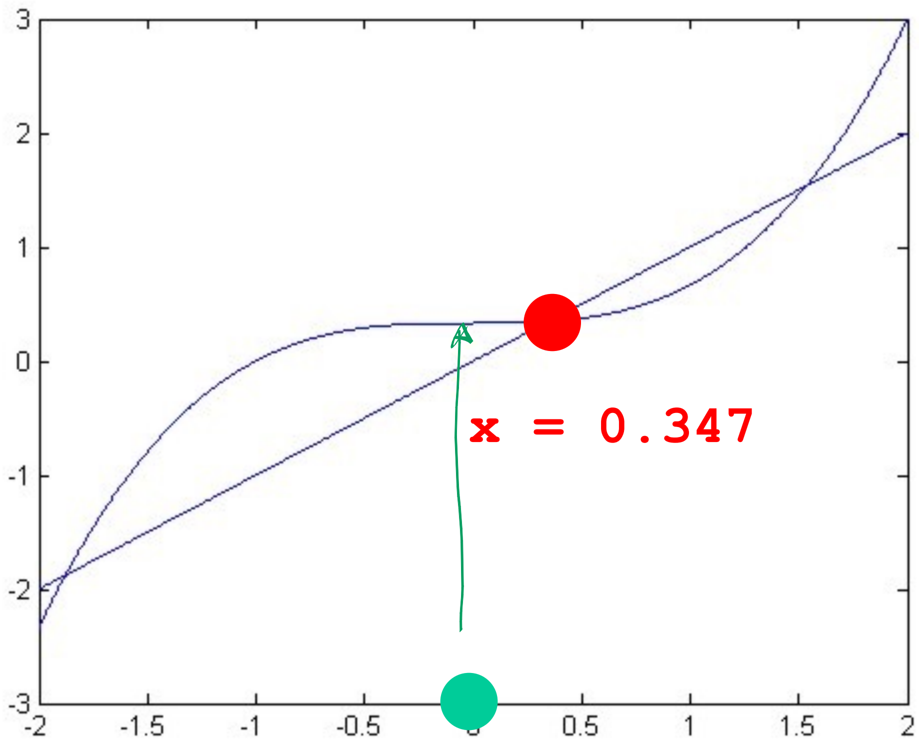
```
def iter(x,tol,nmax,g):
  n = 0; delta = float("inf")
  while abs(delta) > tol and n < nmax :
    n = n + 1
    xold = x
    x = g(x)
    delta = xold - x
    print(" x = %21.14e (%d)" % (x,n))
  return x
```

```
g = lambda x : (x**3 + 1)/3
```

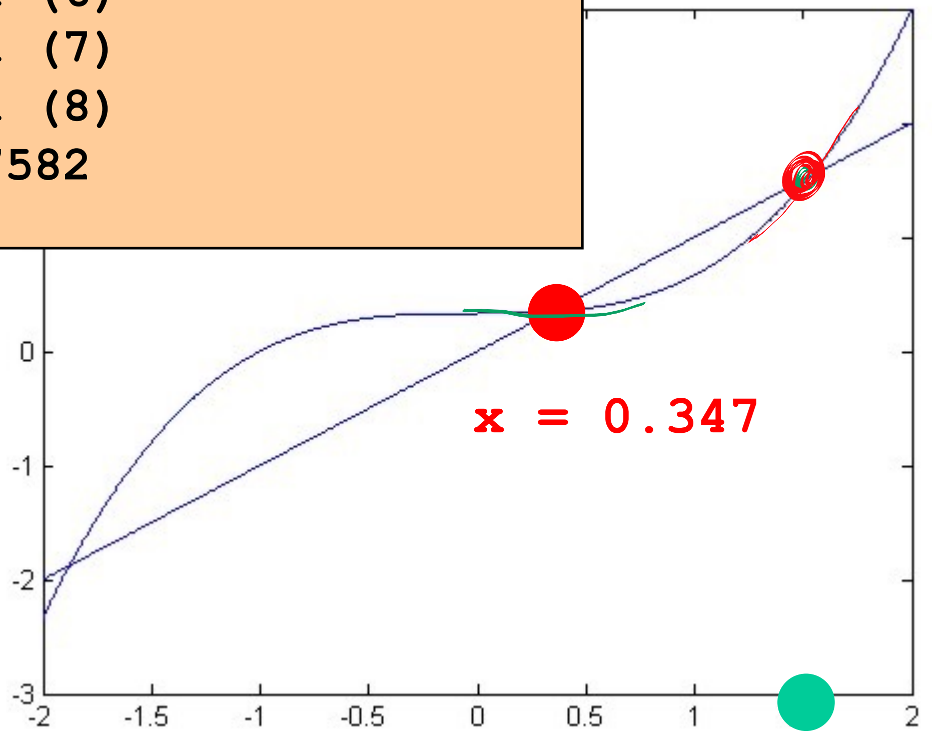
$$x_{i+1} = \underbrace{\frac{x_i^3 + 1}{3}}_{g(x_i)}$$

```
>>> print("Found x = ", iter(0.0,10e-3,50,g))
 x =  3.33333333333333e-01 (1)
 x =  3.45679012345679e-01 (2)
 x =  3.47102186947062e-01 (3)
Found x =  0.347102186947062
```

Essayons…



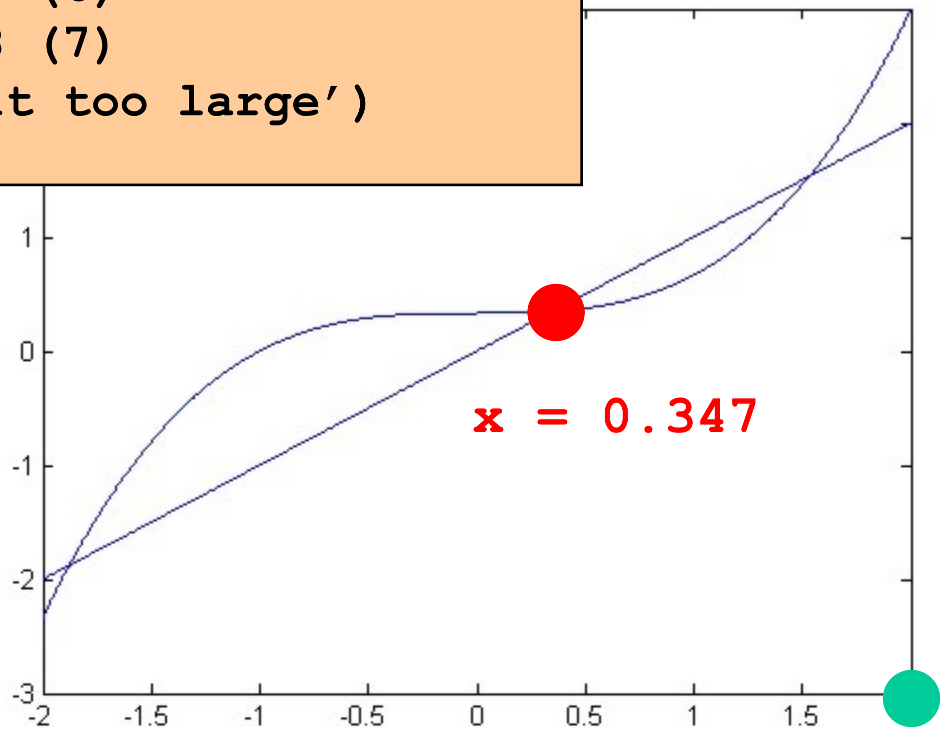
```
>>> print("Found x = ", iter(1.5,10e-3,50,g))
 x =  1.458333333333e+00 (1)
 x =  1.367163387345 68e+00 (2)
 x =  1.185137977629 71e+00 (3)
 x =  8.881959825311 11e-01 (4)
 x =  5.668969329218 2e-01 (5)
 x =  3.940616252186 4e-01 (6)
 x =  3.537305626159 67e-01 (7)
 x =  3.480868822107 58e-01 (8)
Found x =  0.348086882210 7582
```



Et en partant d’un autre point…

```
>>> print("Found x = ", iter(2.0,10e-3,50,g))
 x =  3.0000000000000e+00 (1)
 x =  9.3333333333333e+00 (2)
 x =  2.7134567901234 6e+02 (3)
 x =  6.6595900756496 7e+06 (4)
 x =  9.8451250678596 3e+19 (5)
 x =  3.1808446427601 6e+59 (6)
 x = 1.0727687634328 7e+178 (7)
OverflowError: (34, 'Result too large')
```

Et encore plus loin…



Et de manière plus rigoureuse ?

Théorème 5.1. *Supposons que $g(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$ qui contient le point fixe unique x de la fonction g. Si la valeur de départ x_0 est choisie dans cet intervalle et si la condition suivante (dite condition de Lipschitz) est satisfaite*

$$|g'(x)| \leq K < 1 \qquad \forall x \in [a, b],$$

alors l'itération $x_{i+1} = g(x_i)$ converge vers x.

Pour les fonctions lipschitziennes…

$x_{i+1} = g(x_i)$

$x = g(x)$

$\underbrace{x_{i+1} - x}_{e_{i+1}} = \underbrace{g(x_i) - g(x)}_{g'(\xi)\,(\underbrace{x_i - x}_{e_i})}$

$|g'(\xi)| \leq K < 1$

$|e_{i+1}| \leq K\,|e_i|$

$\lim_{i \to \infty} |e_{i+1}| \leq \underbrace{\lim_{i \to \infty} K^i}_{\to 0} |e_0|$

Pour les fonctions lipschitziennes…

$$\underbrace{(x_{i+1} - x)}_{e_{i+1}} = g(x_i) - g(x)$$

$\downarrow$ En vertu du théorème de la moyenne.

$$= g'(\xi)\,(x_i - x)$$

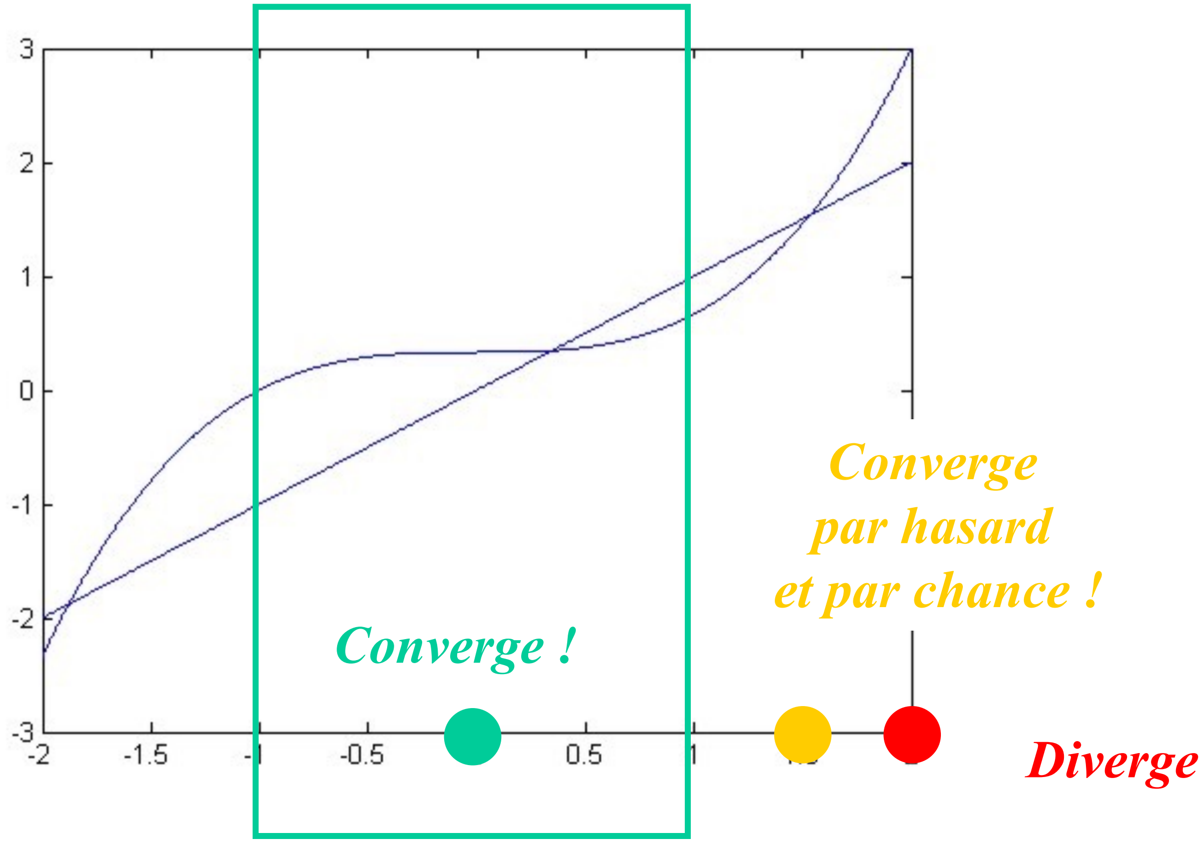
$\downarrow$ En vertu de la condition de Lipschitz.

$$|e_{i+1}| \leq K\,|e_i|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq \lim_{i\to\infty} |x_i - x| \leq \lim_{i\to\infty} K^i\,|x_0 - x| = 0}$$

Est-ce logique ?

$$x_{i+1} = \underbrace{\frac{x_i^3 + 1}{3}}_{g(x_i)}$$



Zone de convergence garantie : $g'(x) = x^2$ dans l'intervalle –1, 1 !

Méthode de Newton-Raphson

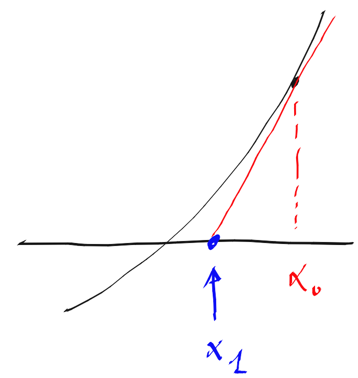
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots$$

On fournit x_0

Tant que $|\Delta x| > \epsilon$, on calcule x_{i+1} à partir de x_i avec

$$\begin{aligned} f'(x_i) \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{\Delta x} &= -f(x_i) \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \end{aligned}$$

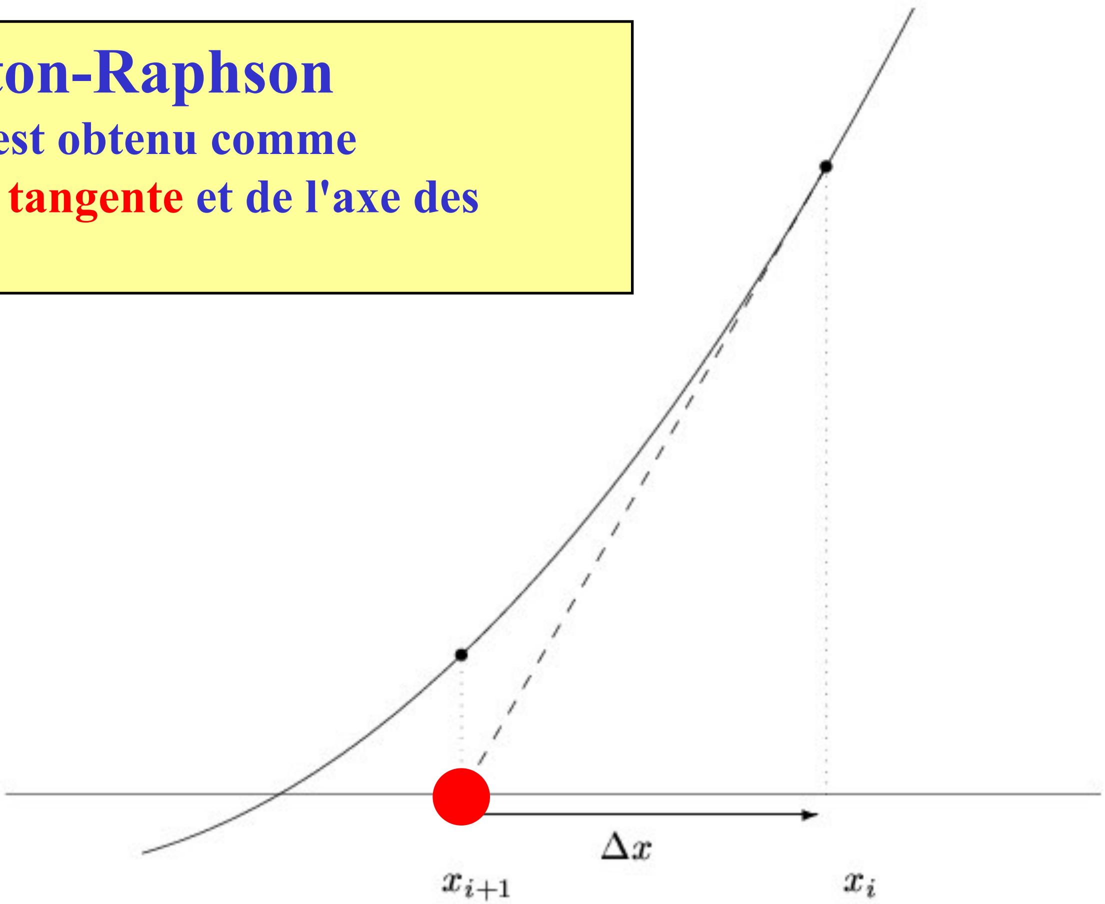
Si on converge, la solution x est le dernier x_{i+1} calculé



Interprétation géométrique

Méthode de Newton-Raphson

Le nouveau point est obtenu comme l'intersection de la tangente et de l'axe des abscisses



Taux de convergence de Newton-Raphson

$$0 = f + \underbrace{(x - x_i)}_{\Delta x} f'$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'\Delta x &= -f \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta x \end{aligned}}$$

$$\boxed{\underbrace{f(x)}_{0} = \underbrace{f(x_i)}_{f} + e_i \underbrace{f'(x_i)}_{f'} + \frac{e_i^2}{2} f''(\xi)}$$

$$f = -e_i f' - \frac{e_i^2}{2} f''$$

$$e_{i+1} = x - x_{i+1}$$

$$= \underbrace{x - \left(x_i\right.}_{e_i} - \left.\frac{f}{f'}\right)$$

$$\boxed{e_{i+1} = \frac{e_i f' + f}{f'}}$$

$$e_{i+1} = \frac{\cancel{e_i f'} - \cancel{e_i f'} - e_i^2/2\, f''}{f'}$$

$$e_{i+1} = e_i^2 \underbrace{\left[\frac{-f''}{2f'}\right]}_{C}$$

Newton-Raphson : Taux de convergence quadratique

Propagation de l'erreur dans un schéma de Newton-Raphson

$$
\begin{aligned}
e_{i+1} &= x - x_{i+1} \\
&= x - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right) \\
&= \frac{e_i f'(x_i) + f(x_i)}{f'(x_i)}
\end{aligned}
$$

$$
e_{i+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_i)}}_{C} e_i^2
$$

Développement en série de Taylor

$$
\begin{aligned}
0 &= f(x) \\
&= f(x_i) + \underbrace{(x - x_i)}_{e_i} f'(x_i) + \underbrace{(x - x_i)^2}_{e_i^2} \frac{f''(\xi)}{2}
\end{aligned}
$$

Convergence si cette constante est comprise entre [-1,1]…

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$$

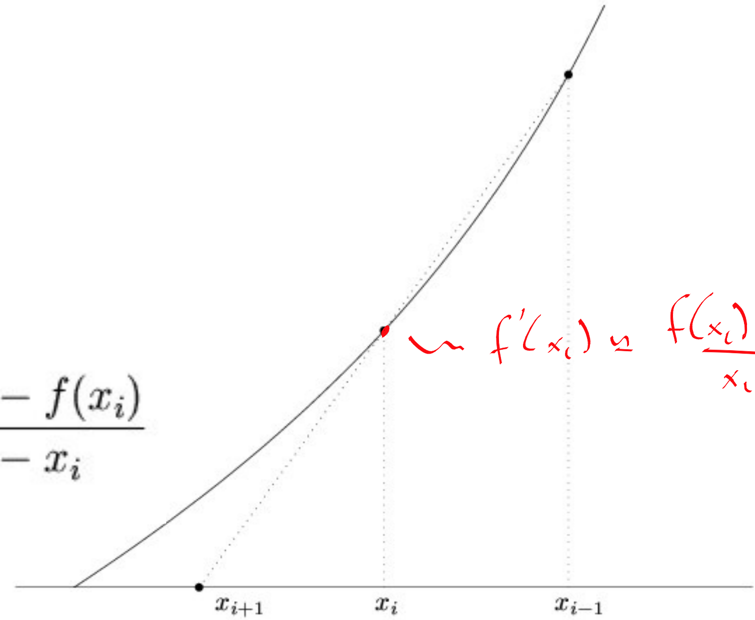
Evaluation numérique de f'

Deux estimations de f requises.
Difficulté de sélectionner h…

Une idée particulière

Une seule estimation de f requise.
Pas de paramètre à choisir !

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$



$\rightsquigarrow f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

Méthode de la sécante

$$|e_{i+1}| = C|e_i|^{1.618}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Quelle est la méthode qui converge le plus rapidement ?

$f(x_i)$ $f'(x_i)$

$f(x_i)$ $f(x_{i-1})$

Taux de convergence quadratique

$$e_{i+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_i)}}_{C} e_i^2$$

Méthode de Newton-Raphson

Taux de convergence superlinéaire mais pas quadratique !

$$|e_{i+1}| = C|e_i|^{1.618}$$

Méthode de la sécante

Quelle est la méthode qui converge le plus rapidement ?

Taux de convergence quadratique

$$e_{i+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_i)}}_{C} e_i^2$$

Méthode de Newton-Raphson
1 itération revient à calculer
1 estimation de f
1 estimation de f'

Taux de convergence superlinéaire mais pas quadratique !

$$|e_{i+1}| = C|e_i|^{1.618}$$

Méthode de la sécante
1 itération revient à calculer
1 estimation de f

$$1.618^2 = 2.6179 > 2$$

Systèmes d'équations non-linéaires

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \ldots & & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right.$$

Notation compacte :
les vecteurs sont en gras.

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0}$$

Que peut-on faire avec les systèmes ?

Robuste, converge toujours si on a un intervalle de départ !

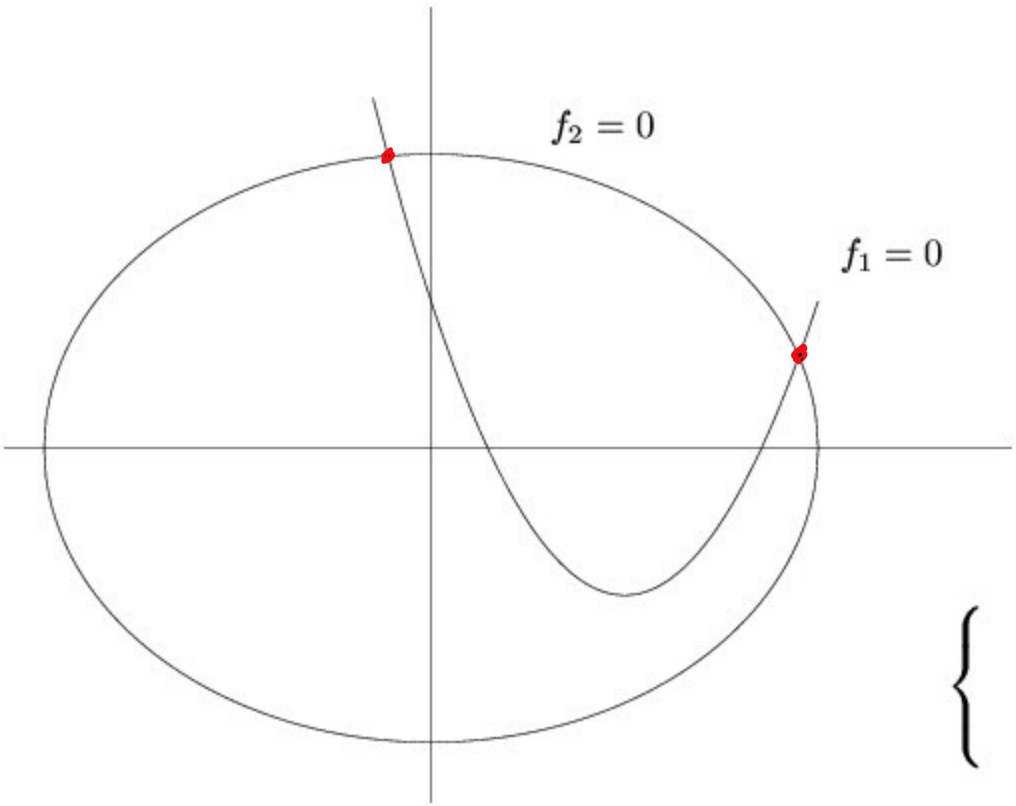
Méthodes numériques itératives

- **Méthode de bisection**
- **Méthodes du point fixe**
- **Méthode de Newton-Raphson**

Mais pas généralisable aux systèmes !

Généralisables de manière immédiate aux systèmes..
Ne convergent que sous conditions…
Nécessitent un candidat initial proche de la solution…

Trouver la solution d'un système non-linéaire est très très difficile !



$$\left\{\begin{array}{rcl} \overbrace{x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 0.5}^{f_1(x_1,x_2)} & = & 0 \\ \underbrace{x_1^2 + 4x_2^2 - 4}_{f_2(x_1,x_2)} & = & 0 \end{array}\right.$$

Méthode du point fixe

On fournit $\mathbf{x}_0$

Tant que $\| \Delta\mathbf{x} \| > \epsilon$, on calcule $\mathbf{x}_{i+1}$ à partir de $\mathbf{x}_i$ avec

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$$

Si on converge, la solution $\mathbf{x}$ est le dernier $\mathbf{x}_{i+1}$ calculé

Notation compacte :
les vecteurs sont en gras.

Condition de Lipschitz

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| < 1 \qquad j = 1 \ldots n$$

La méthode du point fixe convergera vers la racine si la condition de Lipschitz est satisfaite !

Méthode du point fixe

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_{1,i+1} & = & \dfrac{x_{1,i}^2 - x_{2,i} + 0.5}{2} \\[2ex]
x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 - 4x_{2,i}^2 + 8x_{2,i} + 4}{8}
\end{array}
\right.
$$

Itération de Paul

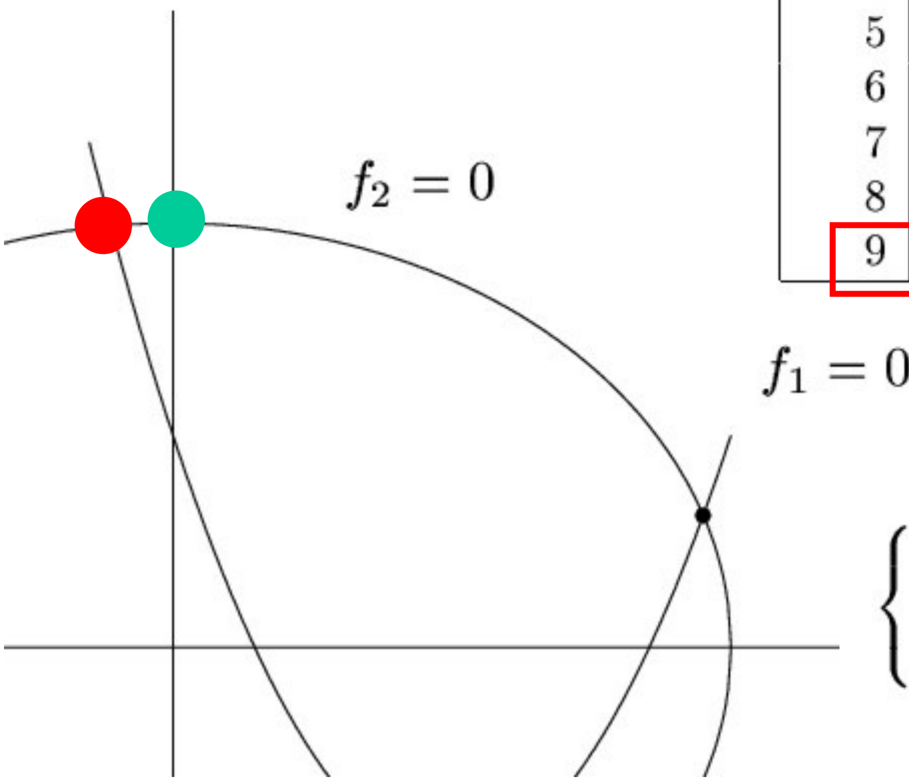
$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\overbrace{x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 0.5}^{f_1(x_1,x_2)} & = & 0 \\[2ex]
\underbrace{x_1^2 + 4x_2^2 - 4}_{f_2(x_1,x_2)} & = & 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_{1,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 + 4x_{1,i} + x_{2,i} - 0.5}{2} \\[2ex]
x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 - 4x_{2,i}^2 + 11x_{2,i} + 4}{11}
\end{array}
\right.
$$

Itération de Pierre

Parfois, cela marche…

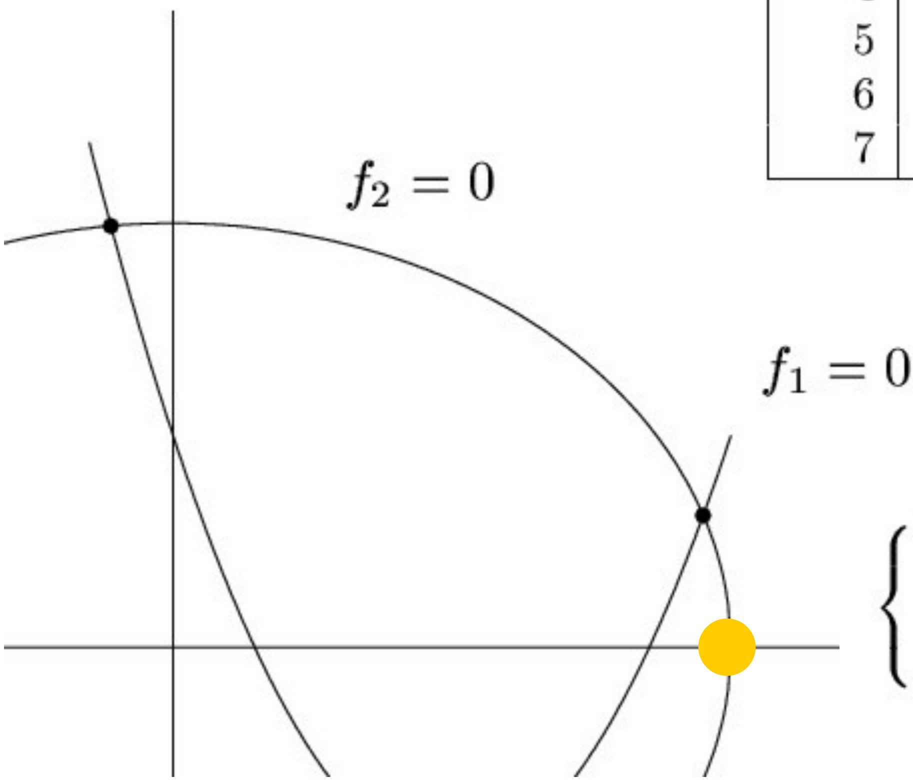
i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$
0	0.0000000	1.0000000
1	- 0.2500000	1.0000000
2	- 0.2187500	0.9921875
3	- 0.2221680	0.9939880
4	- 0.2223147	0.9938121
5	- 0.2221941	0.9938029
6	- 0.2222163	0.9938095
7	- 0.2222147	0.9938083
8	- 0.2222145	0.9938084
9	- 0.2222146	0.9938084



$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{1,i+1} & = & \dfrac{x_{1,i}^2 - x_{2,i} + 0.5}{2} \\ x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 - 4x_{2,i}^2 + 8x_{2,i} + 4}{8} \end{array} \right.$$

Parfois, cela diverge..

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$
0	2.0000000	0.0000000
1	2.2500000	0.0000000
2	2.7812500	- 0.1328125
3	4.1840820	- 0.6085510
4	9.3075467	- 2.4820360
5	44.8062311	- 15.8910907
6	1 011.9947186	- 392.6042650
7	512263.2073904	-205477.8225378

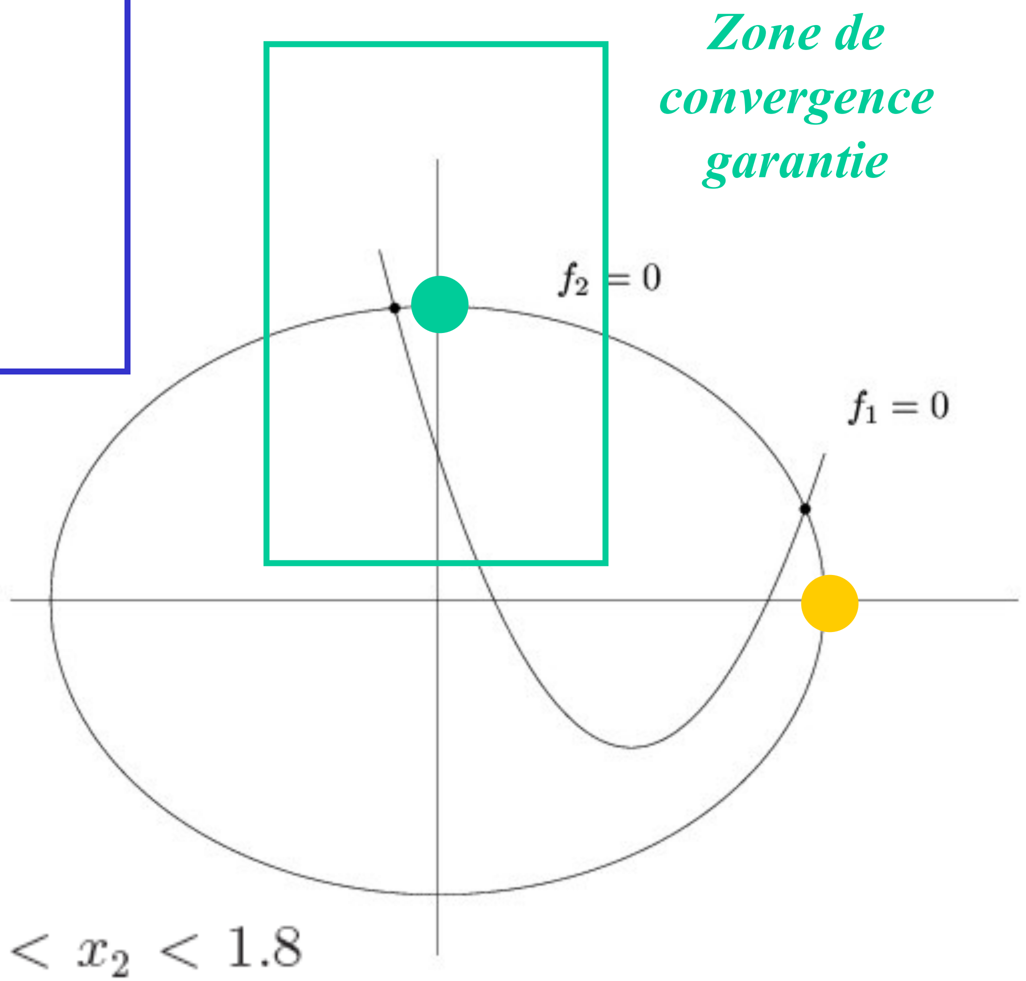


$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_{1,i+1} & = & \dfrac{x_{1,i}^2 - x_{2,i} + 0.5}{2} \\[2ex]
x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 - 4x_{2,i}^2 + 8x_{2,i} + 4}{8}
\end{array}
\right.
$$

Et la condition de Lipschitz…

$$|x_1| + |-0.5| < 1$$

$$\left|\frac{-x_1}{4}\right| + |-x_2 + 1| < 1$$

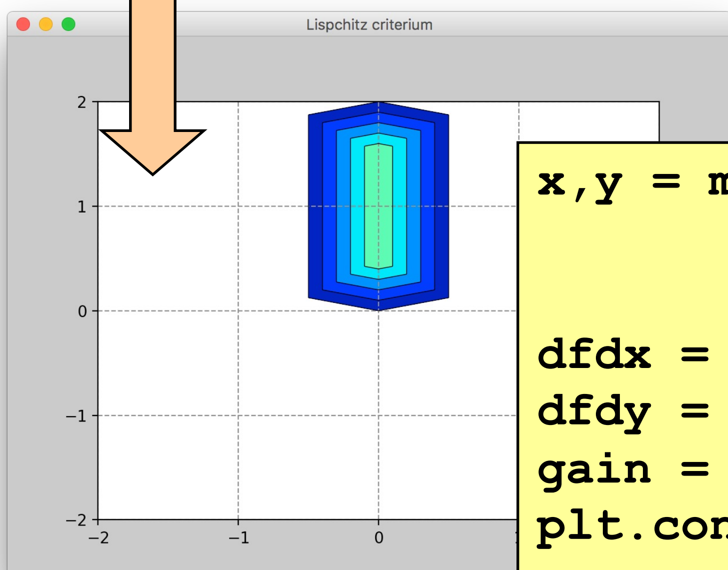


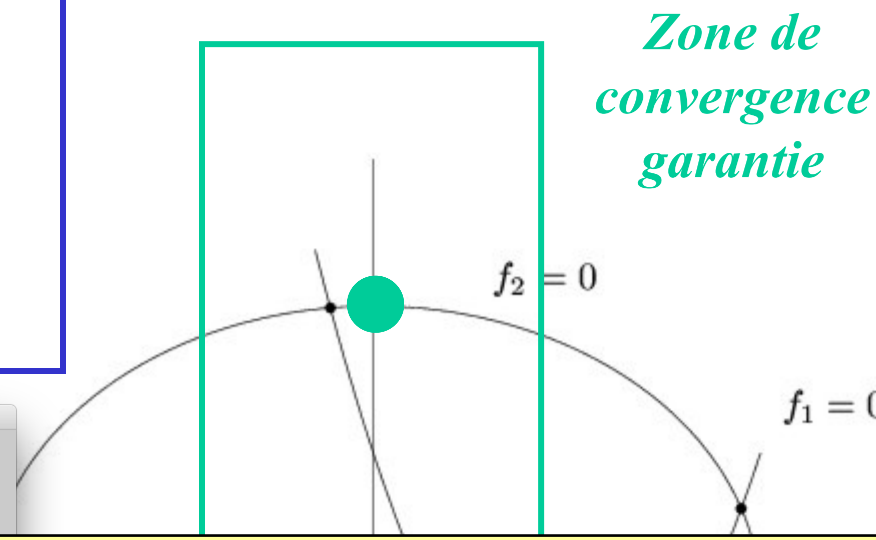
$$-0.5 < x_1 < 0.5 \text{ et } 0.2 < x_2 < 1.8$$

Et la condition de Lipschitz…

$$|x_1| + |-0.5| < 1$$

$$|\frac{-x_1}{4}| + |-x_2 + 1| < 1$$

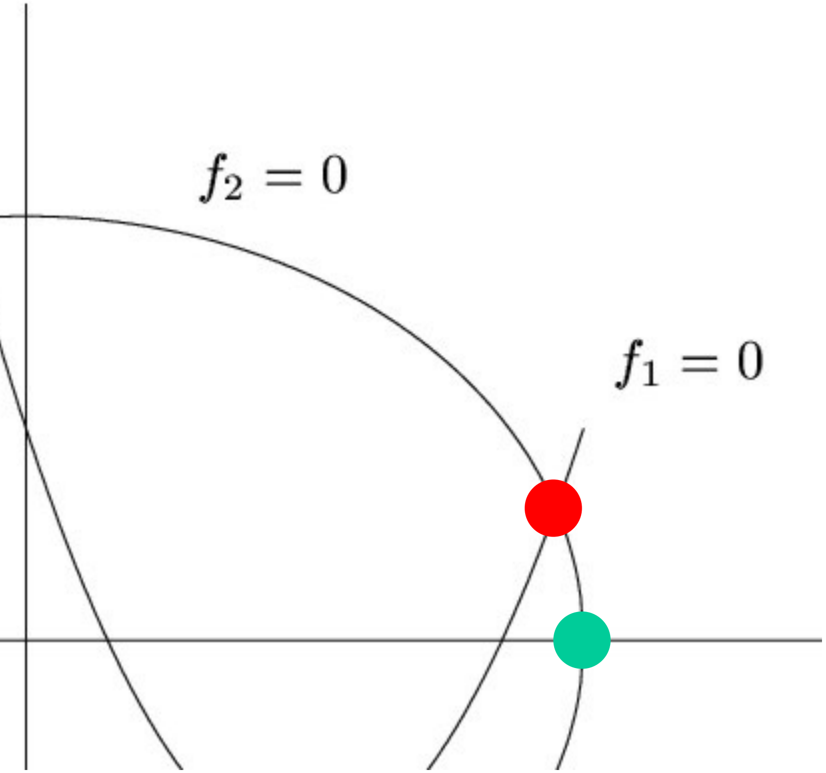





```
x,y = meshgrid(linspace(-2,2,1000),
               linspace(-2,2,1000))

dfdx = abs(x)   + 0.5
dfdy = abs(x/4) + abs(-y+1)
gain = maximum(dfdx,dfdy)
plt.contourf(x,y,gain,arange(0,1.1,0.1)
```

Une autre itération converge...

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{1,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 + 4x_{1,i} + x_{2,i} - 0.5}{2} \\ x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 - 4x_{2,i}^2 + 11x_{2,i} + 4}{11} \end{array}\right.$$



i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$
0	2.0000000	0.0000000
1	1.7500000	0.0000000
2	1.7187500	0.0852273
3	1.7530629	0.1776676
4	1.8083448	0.2504410
8	1.9035947	0.3160782
12	1.9009241	0.3112267
16	1.9006516	0.3111994
20	1.9006771	0.3112196
24	1.9006768	0.3112185

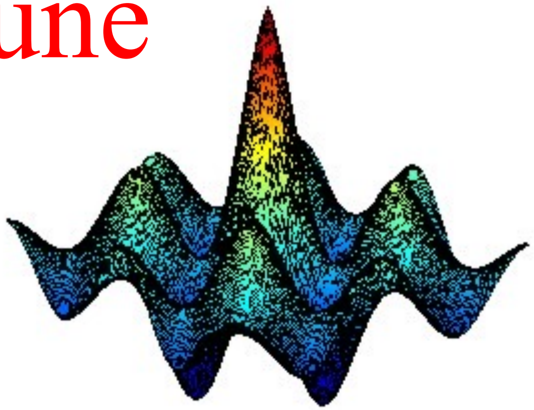
Est-il possible d'améliorer la vitesse de convergence ?

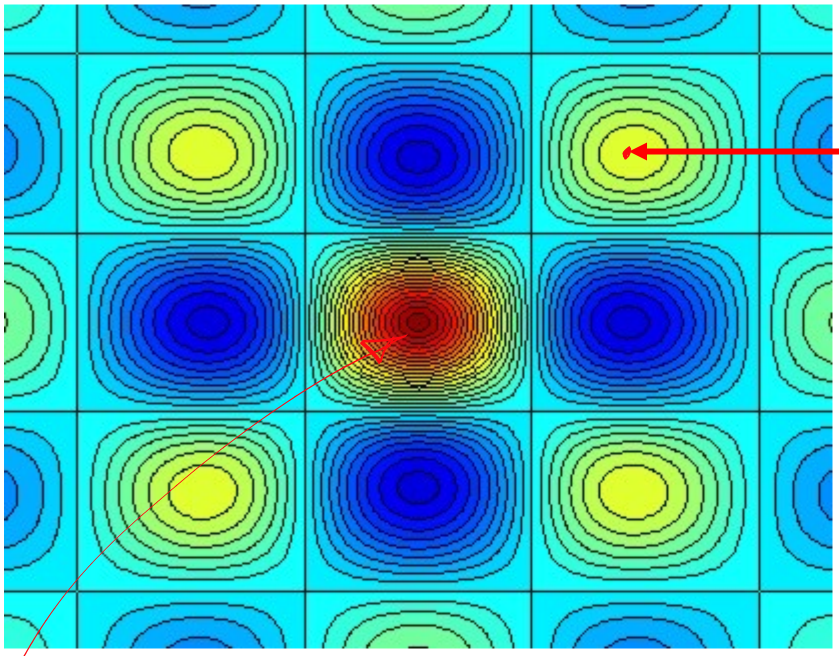
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{1,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 + 4x_{1,i} + x_{2,i} - 0.5}{2} \\ x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,\boxed{i}}^2 - 4x_{2,i}^2 + 11x_{2,i} + 4}{11} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{1,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,i}^2 + 4x_{1,i} + x_{2,i} - 0.5}{2} \\ x_{2,i+1} & = & \dfrac{-x_{1,\boxed{i+1}}^2 - 4x_{2,i}^2 + 11x_{2,i} + 4}{11} \end{array}\right.$$

Algorithme de Seidel
On utilise la dernière valeur disponible pour chaque inconnue
Parfois, cela converge plus vite,
Parfois, cela converge moins vite, parfois cela diverge…

Trouver le maximum d'une fonction non-linéaire est une tâche très très difficile…





Un maximum local ?

Comment savoir la présence ou l'absence d'une fosse plus profonde sur base d'informations locales….

Impossible ?

Minimiser une fonction non-linéaire est très très difficile !

Le message est que rien n'est su de manière sûre. Il y a des choses dont nous savons que nous les savons. Il y a des inconnues connues, c'est-à-dire des choses dont nous savons maintenant que nous ne les savons pas.

Mais, il y a aussi des inconnues inconnues. Il y a des choses dont nous savons que nous ne les savons pas …. Et chaque année, nous découvrons un peu plus de ces inconnues inconnues.

… Il y a une autre façon de dire cela, c'est que l'inexistence de preuves n'est pas une preuve d'inexistence

Secrétaire à la Défense US
à l'OTAN à Bruxelles, juin 2002 !

(Lewis Lapham)

Les méthodes numériques… existantes

Des propos dignes de l'un de ces fous énigmatiques qui hantent les forêts enchantées dans les pièces de Shakespeare