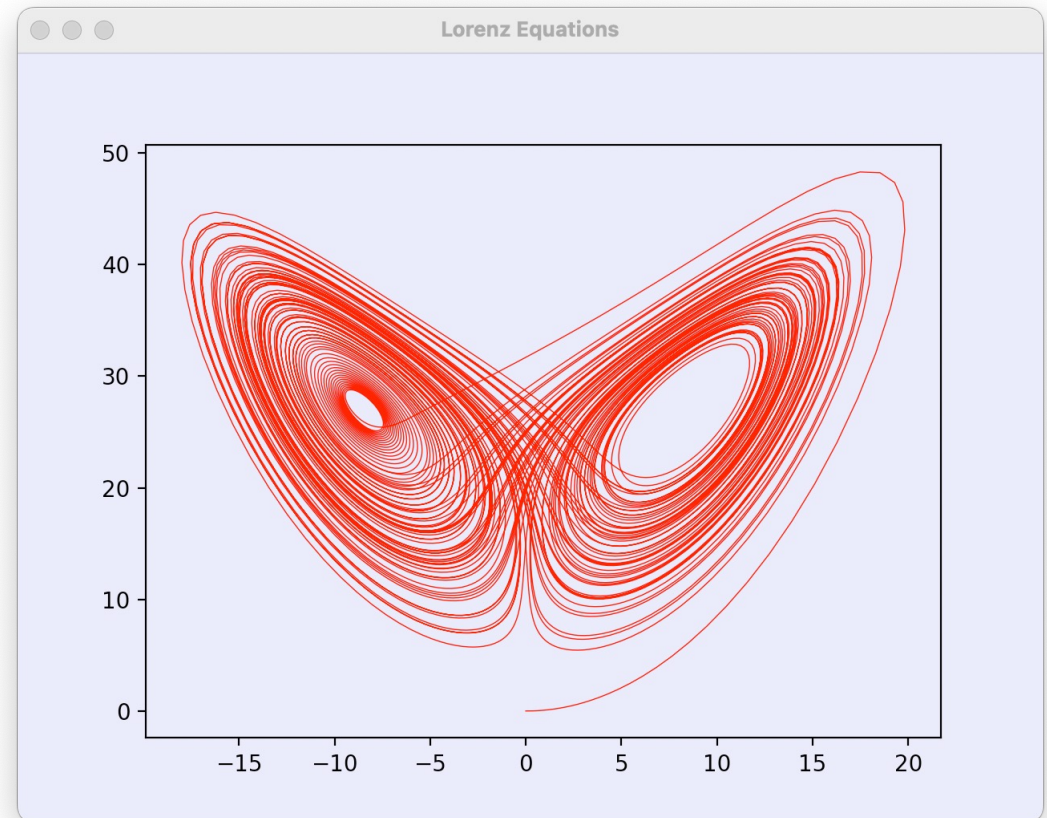


Un attracteur étrange

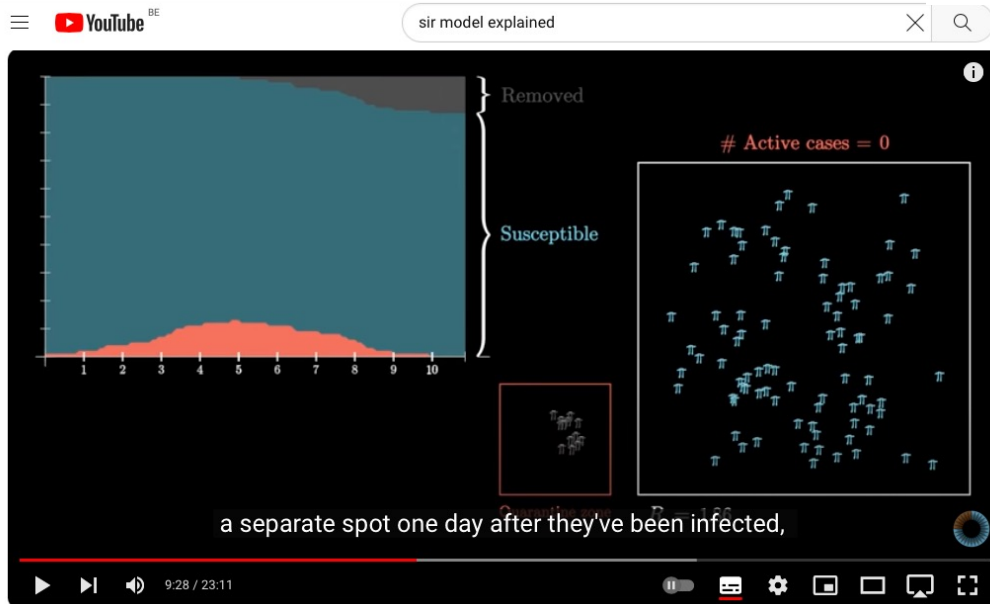
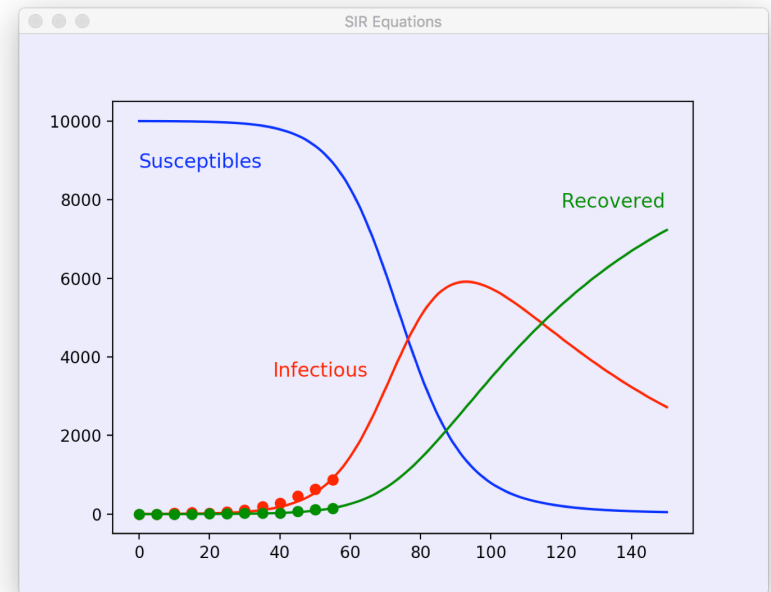


S9
S10
S11
S12
S13

COURS 9
COURS 10
12 MAI COURS 11 - PODCAST
COURS 12



Une épidémie étrange...



Problème de Cauchy

Méthodes explicites

Rien à résoudre (cool !)

Stabilité conditionnelle (embêtant !)

Méthodes implicites

Il faut résoudre un problème (dur, si non-linéaire !)

Stables (cool !) (parfois trop !)

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

Méthodes explicites de Taylor

Il faut disposer de **nombreuses dérivées de f** !

Stabilité conditionnelle

Méthodes explicites de Runge-Kutta

Il faut seulement **disposer de la fonction f**

Stabilité (théoriquement, idem que Taylor)

Valeur exacte



$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$



Approximation numérique

Méthodes explicites de Runge-Kutta

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})\end{aligned}$$

Heun (Runge-Kutta n=2)

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1) \\K_3 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2) \\K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3)\end{aligned}$$

"le classique" (Runge-Kutta n=4)

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

**Euler explicite
(Runge-Kutta n=1)**

Runge-Kutta n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Facile à mettre en oeuvre

Conditionnellement stables (comme Taylor)

Méthode de Heun

Comment choisir les paramètres ?

$$U_{i+1} = U_i + h(\omega_1 K_1 + \omega_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

Il faut la
précision
requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$u' = f(u) \quad F_1'$$

$$U_1' = f(U_1) \quad \overbrace{f'(U_1)}^{F_1'} \underbrace{\frac{du}{dx}}_{F_1} \bigg|_{U_1}$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$\beta w_2 = 1/2$$

2 EQUATIONS

3 INCONNUES

$$U_2 = U_1 + h F_1 + \frac{h^2}{2} F_1' F_1 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_2 = U_1 + h w_1 F_1 + h w_2 \underbrace{f(U_1 + \beta h F_1)}_{F_1 + \beta h F_1 F_1'} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$+ h w_2 (F_1 + \beta h F_1 F_1') + \mathcal{O}(h^3)$$



$$= U_1 + h (w_1 + w_2) F_1 + \beta w_2 h^2 F_1 F_1' + \mathcal{O}(h^3)$$

Il faut la précision requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i) + h w_2 f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$



En effectuant un développement en série de Taylor de l'expression $f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$, autour de (X_i, U_i) ,

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i)$$



$$+ h w_2 \left(f(X_i, U_i) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta h \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^2) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 + w_2) f(X_i, U_i)$$

$$+ h^2 w_2 \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Identification des termes
3 relations à satisfaire
4 paramètres à choisir

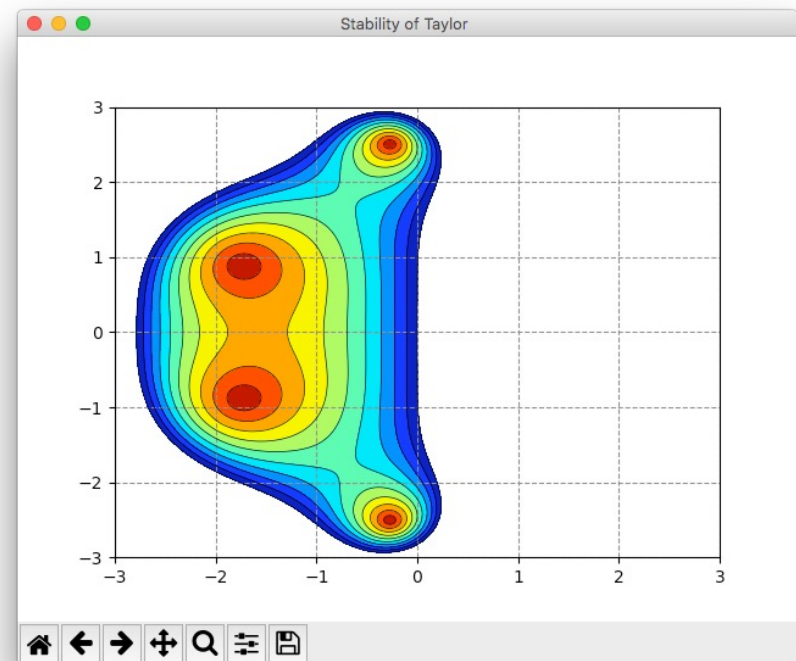
Il existe plusieurs possibilités !

Les zones de stabilité de Runge-Kutta et de Taylor sont identiques...

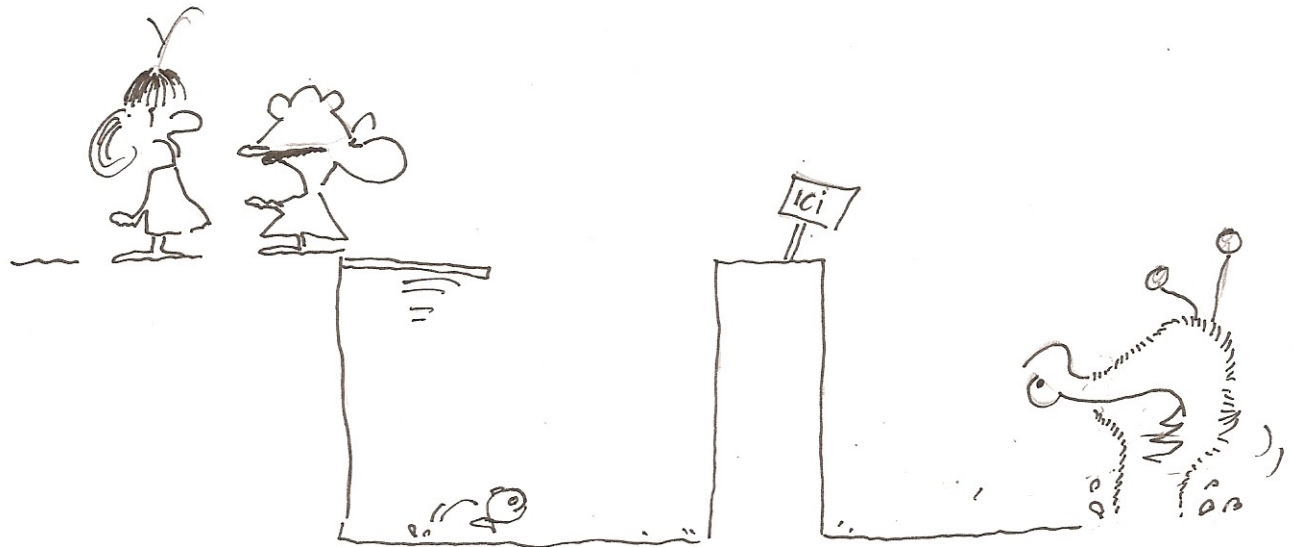
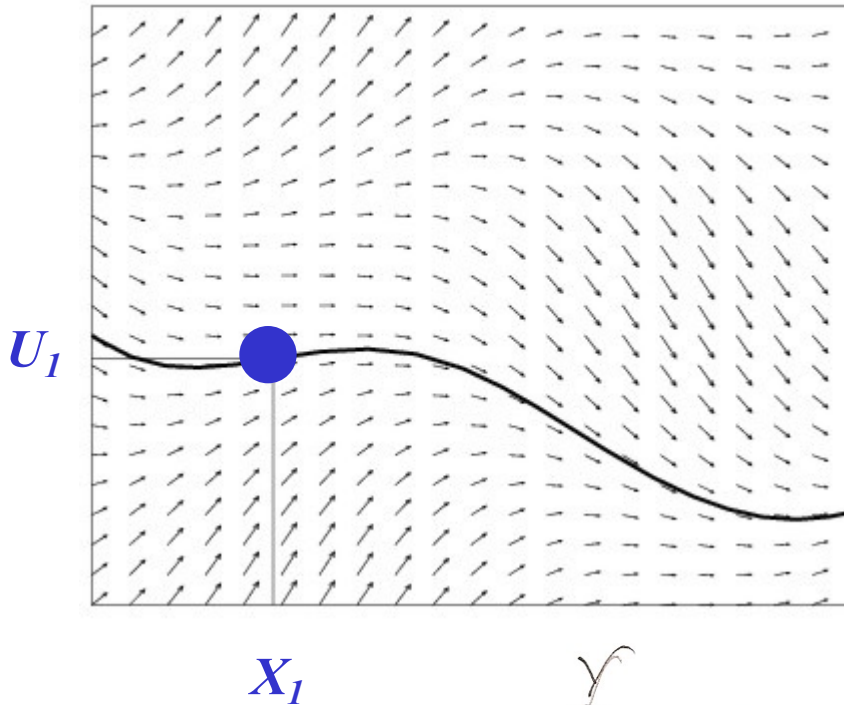
On a construit les méthodes de Runge-Kutta en identifiant les développements en série de Taylor... En conséquence, les méthodes de Runge-Kutta et de Taylor sont **IDENTIQUES** pour un problème linéaire !

Mais, elles ne sont **PAS** identiques pour des problèmes non linéaires.

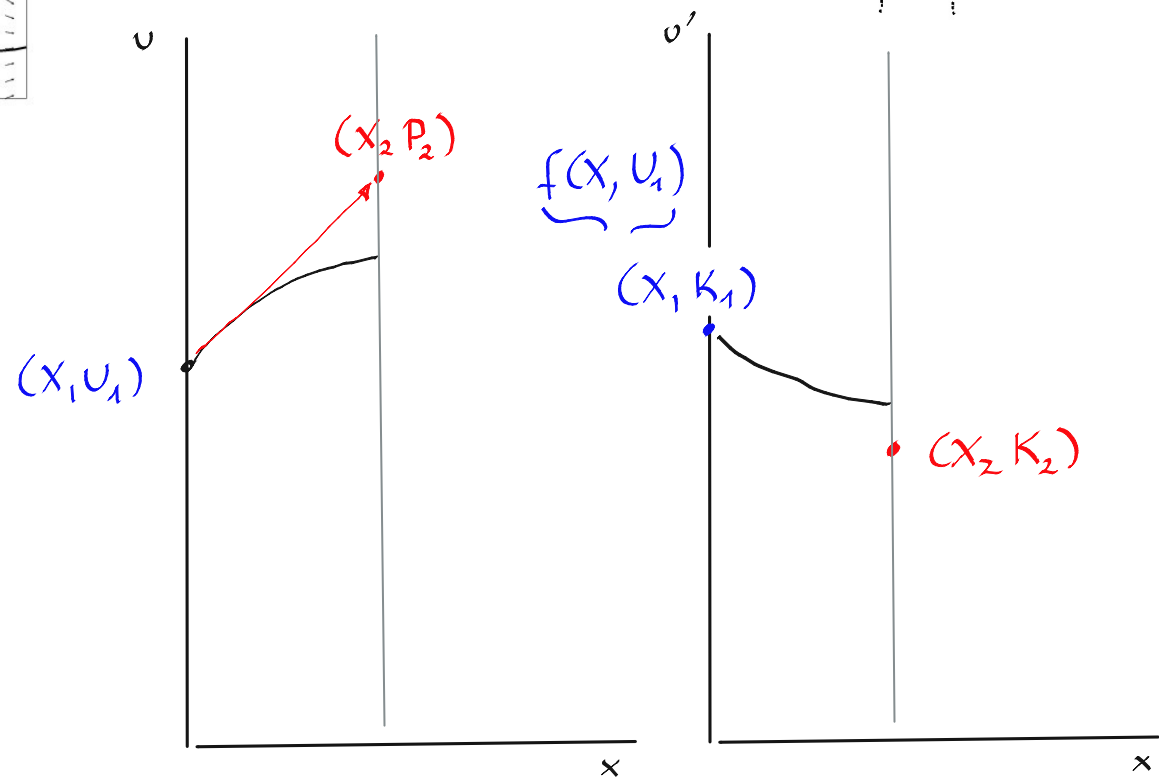
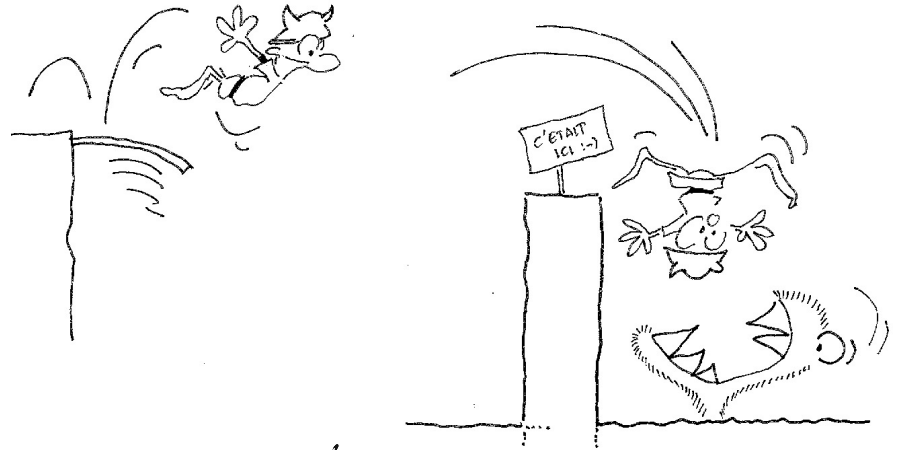
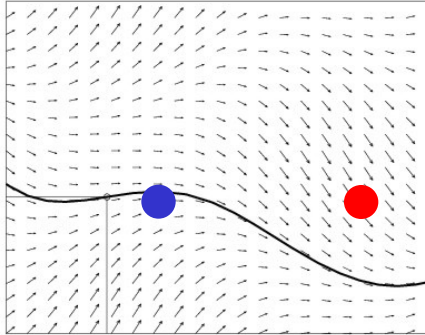
Finalement, comme l'analyse de stabilité se fait sur un problème linéaire, cette analyse fournira des résultats **IDENTIQUES**... **Vérifiez ce résultat par vous-même en reproduisant le calcul effectué pour la méthode Leapfrog :-)**



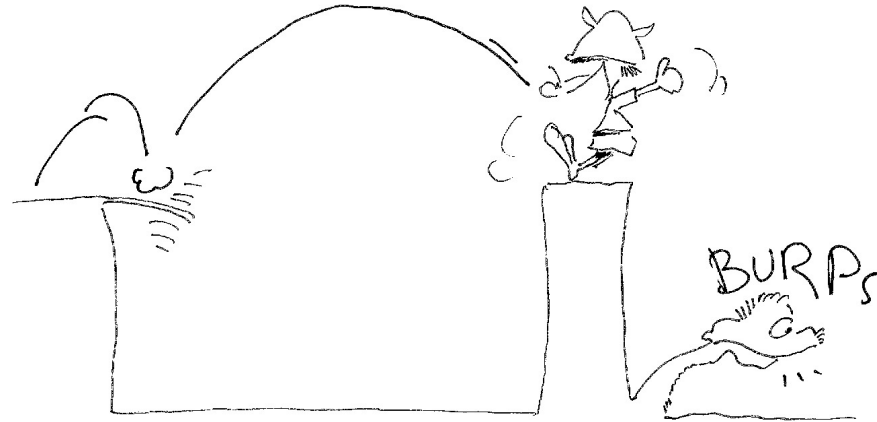
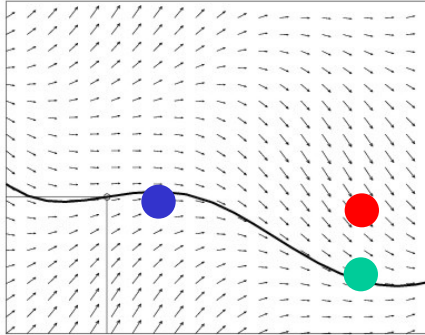
Interprétation des méthodes de Runge-Kutta



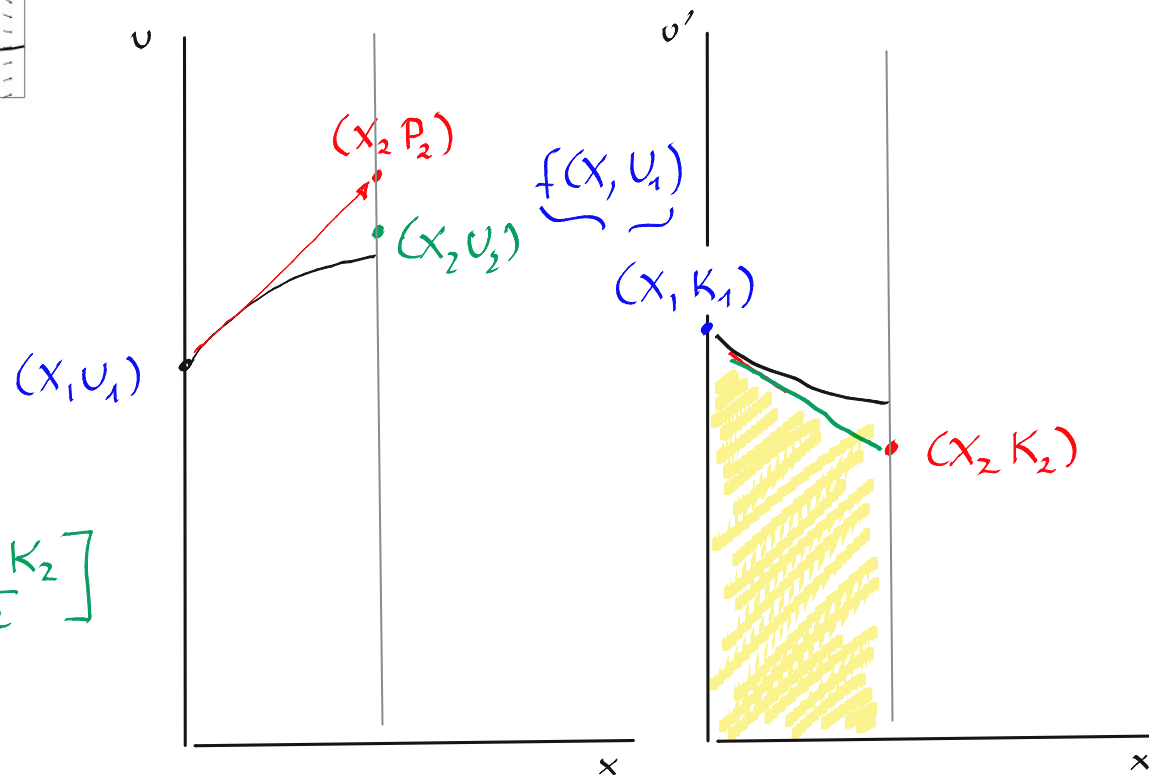
Prédiction



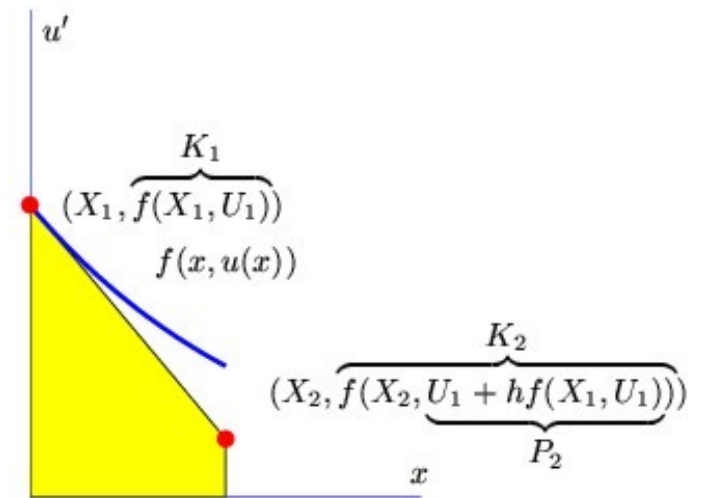
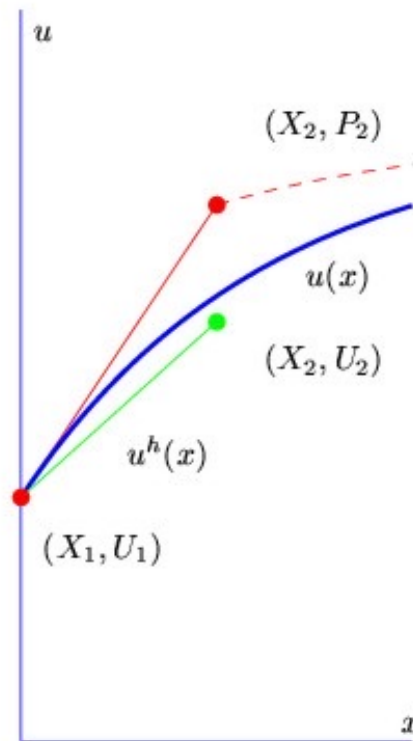
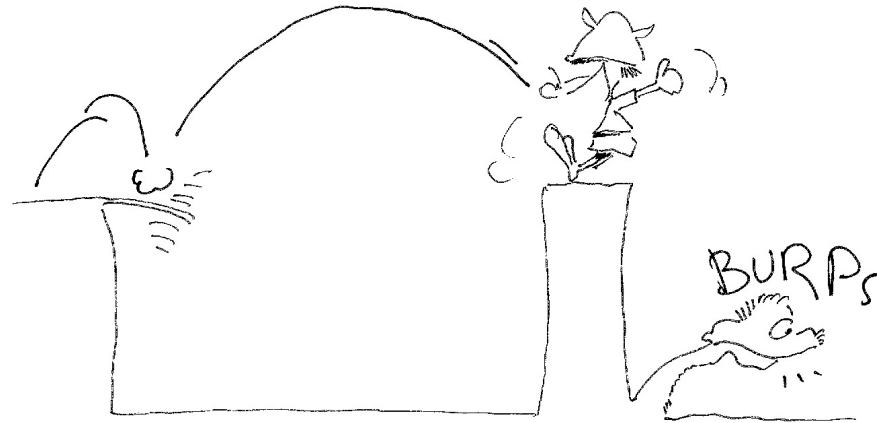
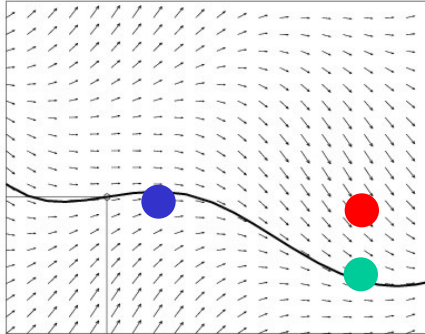
Correction



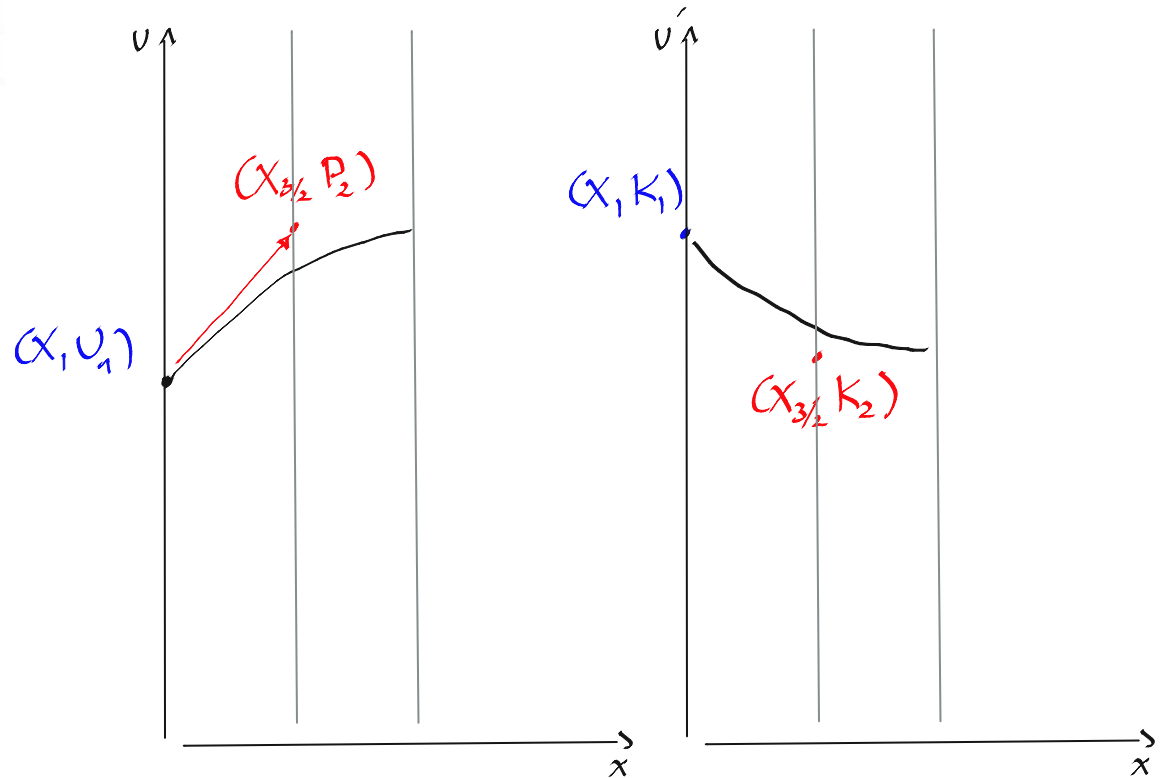
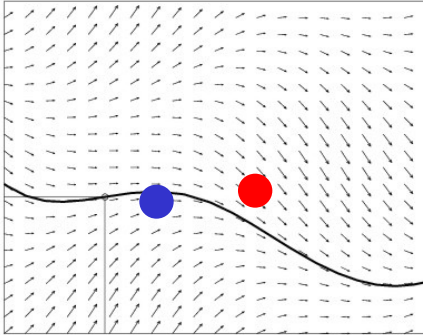
$$U_2 \approx U_1 + h \left[\frac{K_1 + K_2}{2} \right]$$



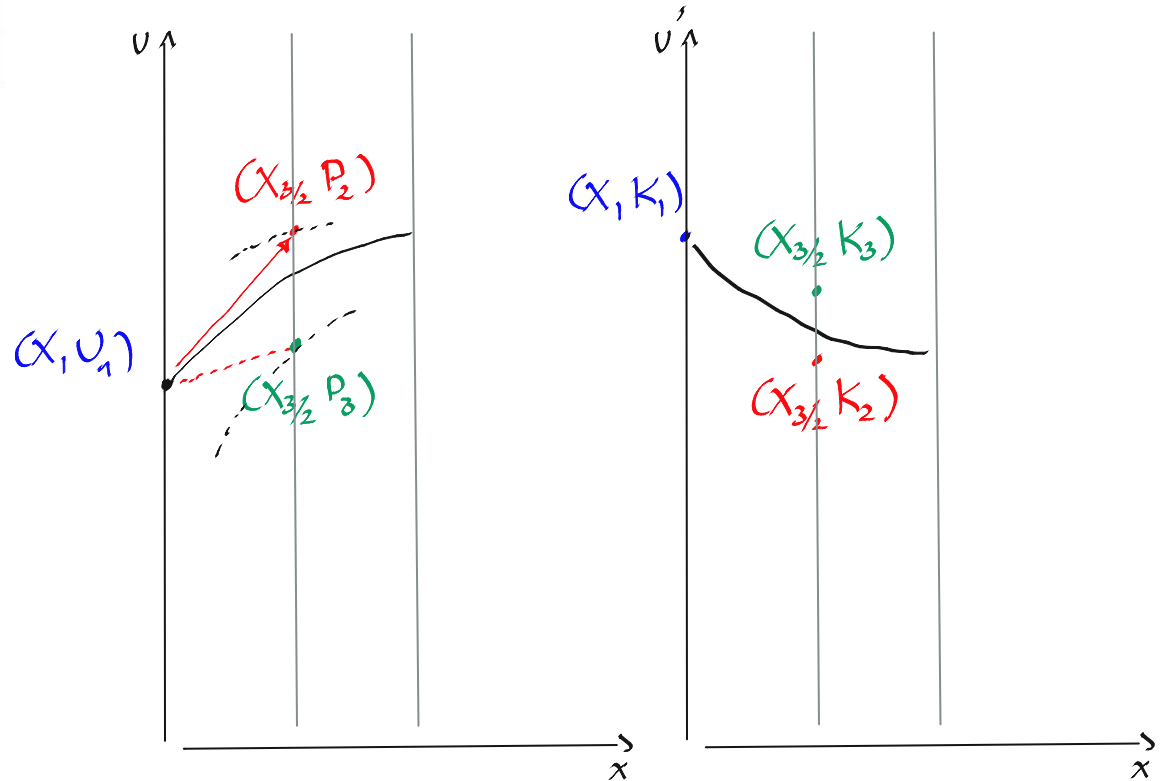
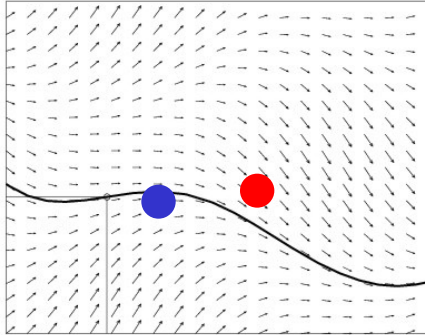
Correction



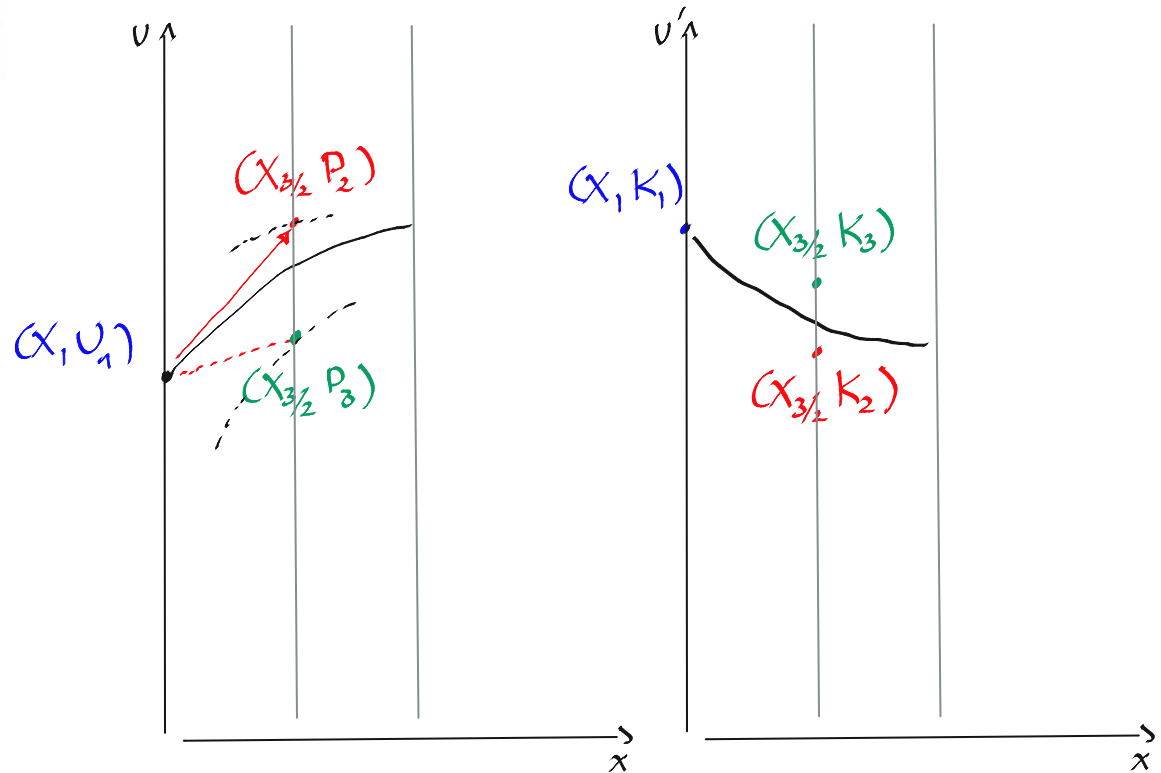
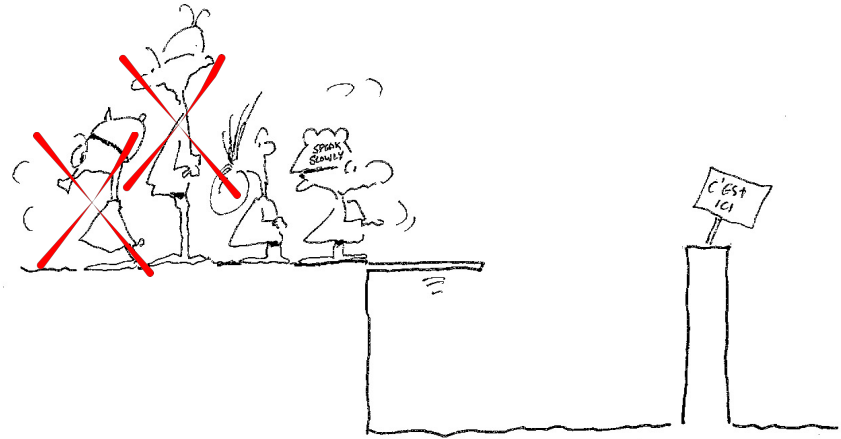
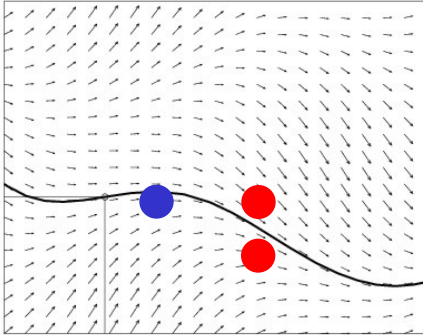
Prédiction



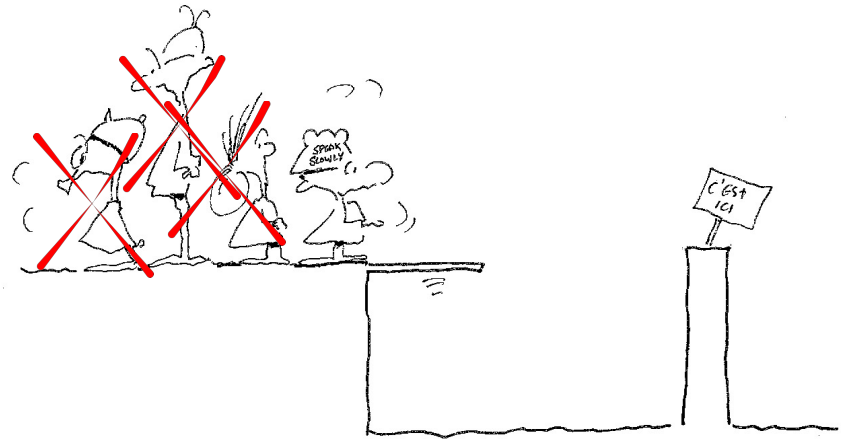
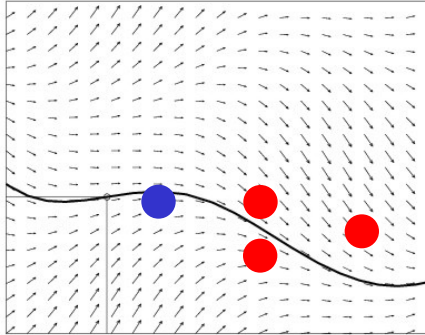
Prédiction



Prédiction

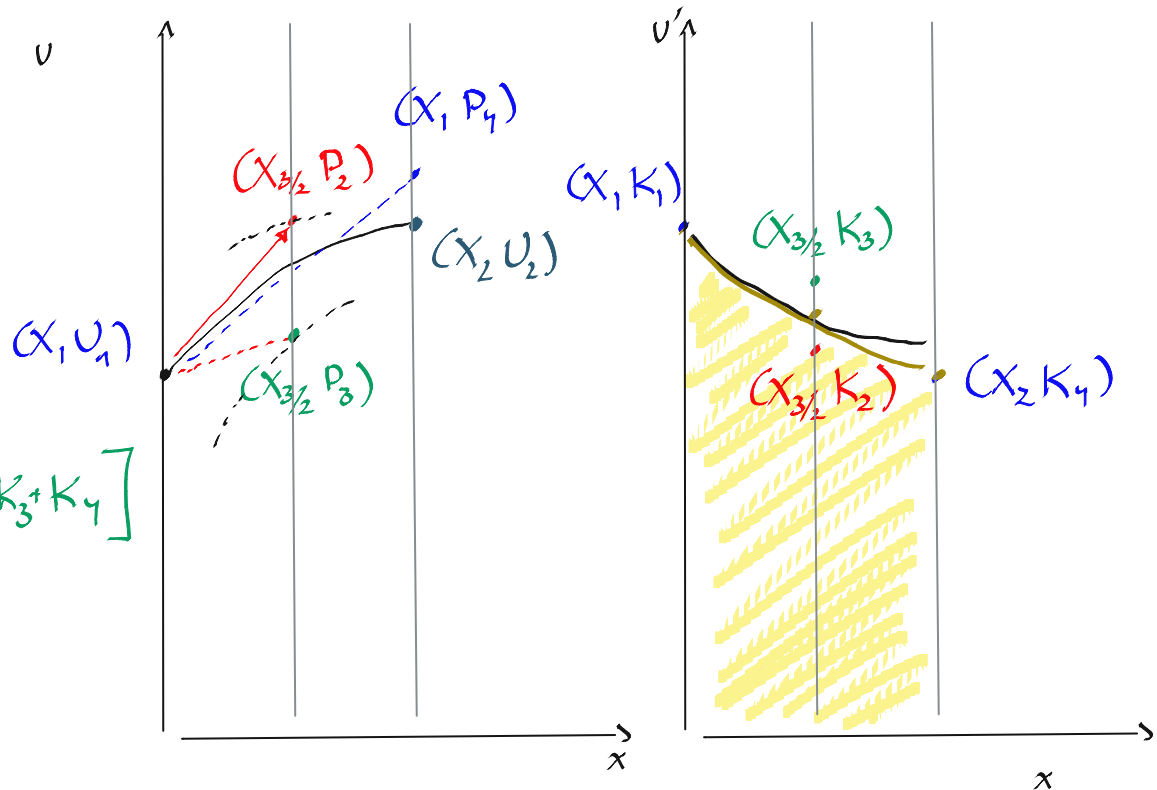


Prédiction

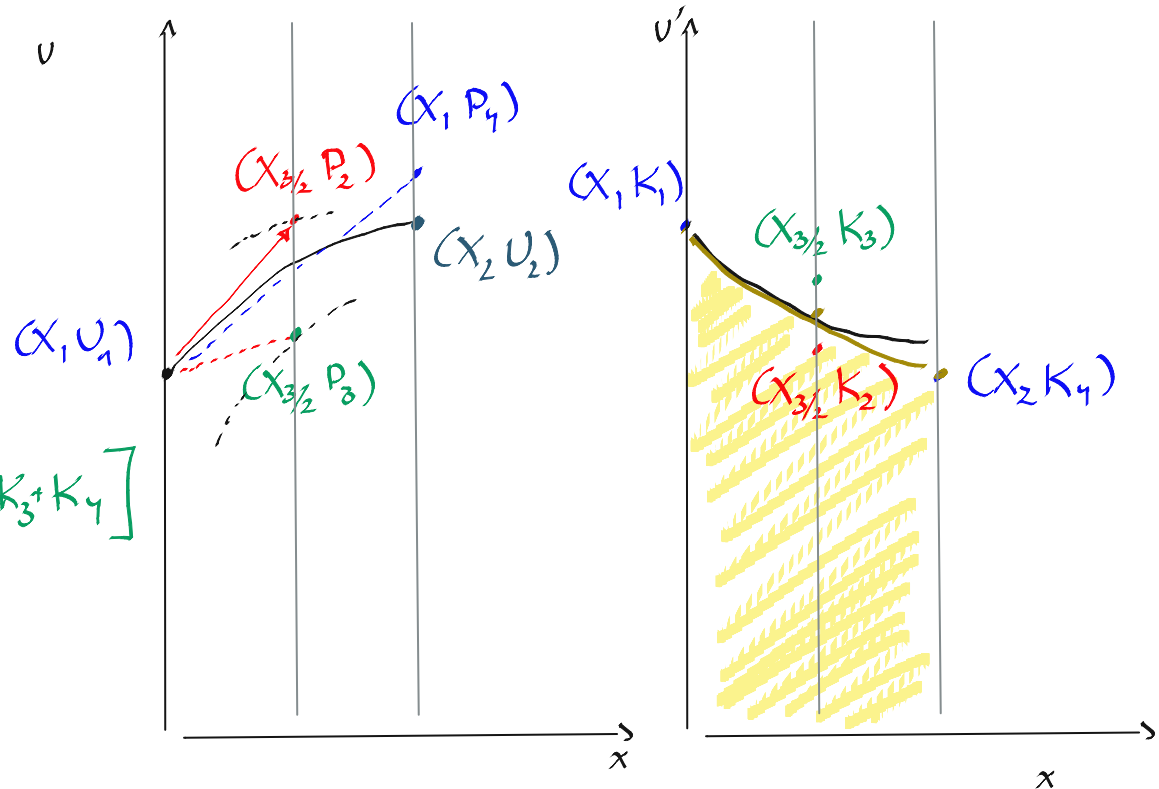
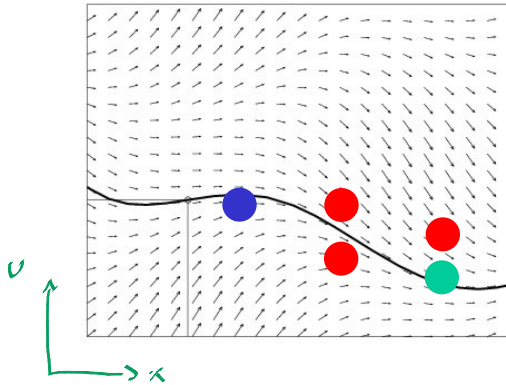
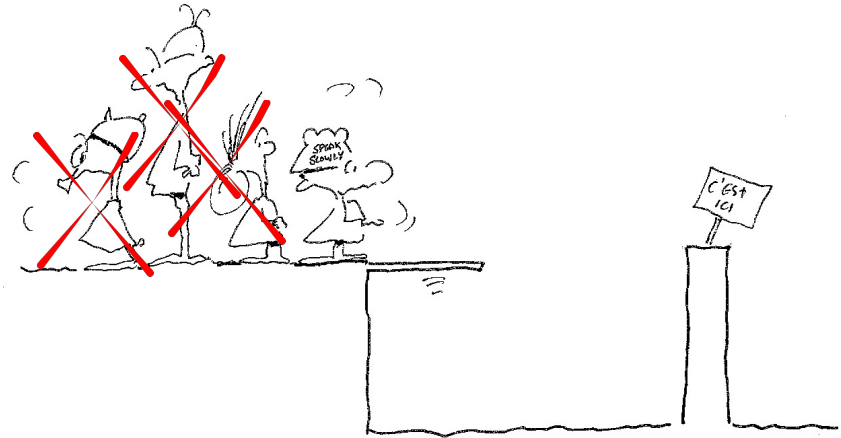


$$U_2 = U_1 + \frac{h}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

SIMPSON



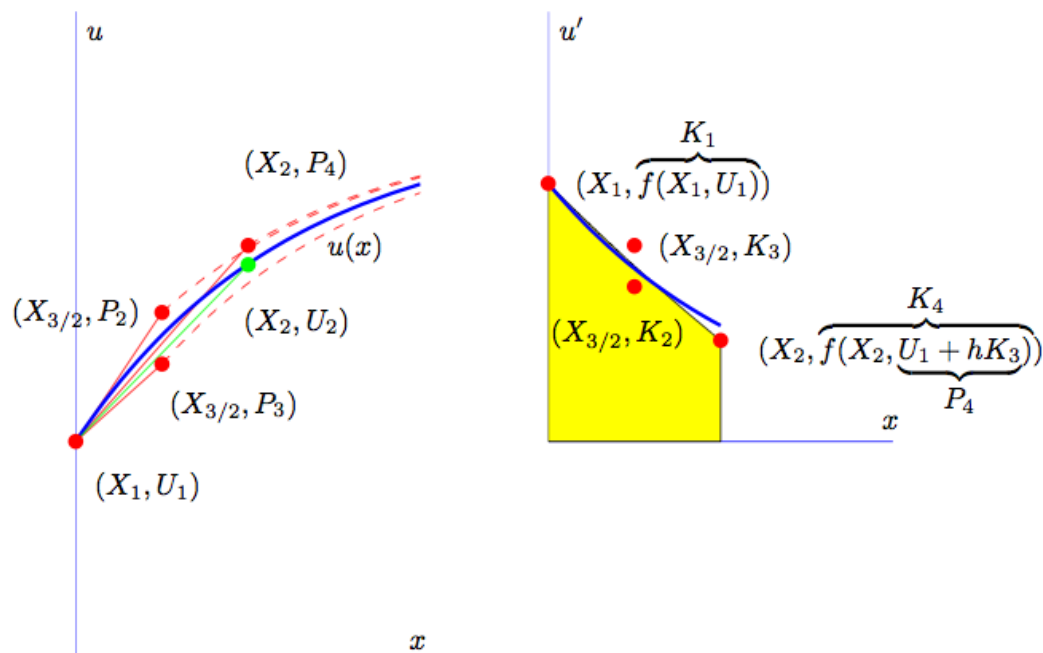
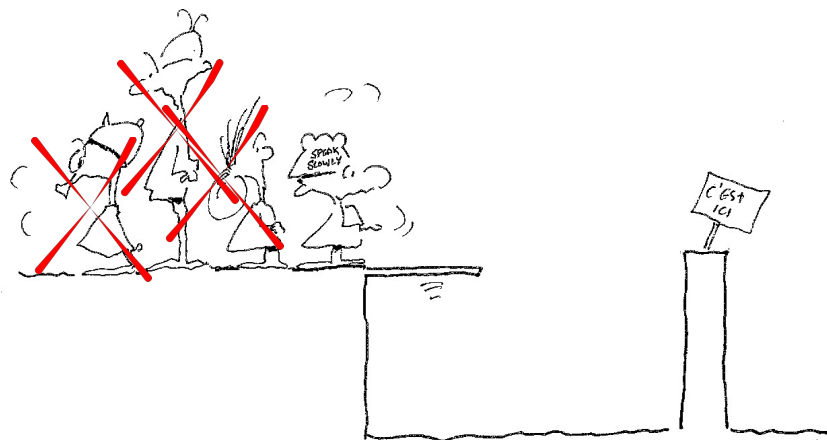
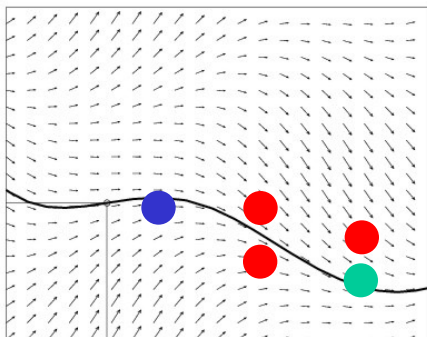
Correction



$$U_2 = U_1 + \frac{h}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

SIMPSON

Correction



Runge-Kutta-Fehlberg

$$P_{i+1} = U_i + h\left(\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5\right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h\left(\frac{16}{235}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f\left(X_i + \frac{h}{4}, U_i + \frac{h}{4}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(X_i + \frac{3h}{8}, U_i + \frac{3h}{32}K_1 + \frac{9h}{32}K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(X_i + \frac{12h}{13}, U_i + \frac{1932h}{2197}K_1 - \frac{7200h}{2197}K_2 + \frac{7296h}{2197}K_3\right)$$

$$K_5 = f\left(X_i + h, U_i + \frac{439h}{216}K_1 - 8hK_2 + \frac{3680h}{513}K_3 - \frac{845h}{4104}K_4\right)$$

$$K_6 = f\left(X_i + \frac{h}{2}, U_i - \frac{8h}{27}K_1 + 2hK_2 - \frac{3544h}{2565}K_3 - \frac{1859h}{4104}K_4 - \frac{11h}{40}K_5\right)$$

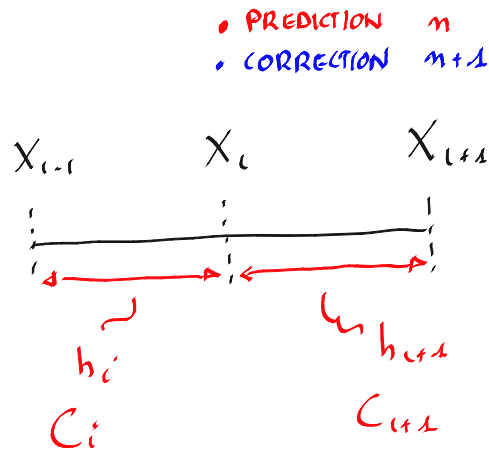
Calcul simultané et efficace de deux approximations de la valeur

P_{i+1} une approximation d'ordre 4

U_{i+1} une approximation d'ordre 5

La différence permet d'obtenir une estimation de l'erreur locale commise

Comment choisir un nouveau pas h_{i+1} ?



ESTIMATION
ERREUR
LOCALE

$$\Theta_{i+1} < \varepsilon$$

$$|U_i - P_i|$$

$$\Theta_i = C h_i^{n+1}$$

$$\Theta_{i+1} = C h_{i+1}^{n+1}$$

CE QUE
JE VEUX
OBTENIR

ERREUR
LOCALE
COMMISE
PAR
UNE
METHODE
D'ORDRE
 n

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i \left[\frac{h_{i+1}}{h_i} \right]^{n+1}$$

STRATEGIE
ADAPTATIVE
 $C_i \approx C_{i+1}$

$$h_{i+1} = h_i \left[\frac{\varepsilon}{\Theta_i} \right]^{1/(n+1)}$$

$$h_{i+1} = h_i \left[\frac{\varepsilon}{\Theta_i} \right]^{1/n_{i+1}}$$

On construit une stratégie adaptative basée sur des arguments heuristiques peu rigoureux...

Stratégie prudente ou intrépide selon votre caractère

Comment choisir un nouveau pas h_{i+1} ?

On construit une stratégie adaptative basée sur des arguments heuristiques peu rigoureux...

Stratégie **prudente** ou **intrépide** selon votre caractère

Estimation de l'erreur locale que l'on vient de commettre au pas précédent h_i

Relations heuristiques

$$\theta_i = Ch_i^{n+1}$$

$$\theta_{i+1} = Ch_{i+1}^{n+1}$$

$$\theta_{i+1} \approx \theta_i \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{n+1}$$

*Tolérance
Erreur acceptable*

$$h_{i+1} \leq h_i \left(\frac{\epsilon}{\theta_i} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Estimation de l'erreur que l'on commettra au pas suivant : elle doit satisfaire le critère

$$\theta_{i+1} \leq \epsilon$$

Stratégie adaptative

- 1 Estimation de l'erreur commise à l'étape courante i avec le pas h_i en effectuant le calcul de θ_i . On utilise la différence entre la prédiction et la correction pour effectuer cette estimation.

$$\theta_i = |U_{i+1} - P_{i+1}|$$

- 2 Est-ce que le critère d'erreur est respecté ? Si $\theta_i > \epsilon$, il faut recommencer le pas courant i avec un plus petit pas de temps. On choisira comme nouveau pas $h = h_i/2$. Il convient aussi de vérifier que le nouveau pas de temps n'est pas inférieur à une limite minimale h_{min} fixée a priori. Si cela arrive, le programme s'arrête de manière définitive avec un constat d'échec !
- 3 Estimation d'un nouveau pas optimal $\hat{h}$ à partir de l'estimation θ_i de l'erreur locale qui vient d'être commise au pas précédent.

$$\hat{h} = h_i \left(\frac{\epsilon}{\theta_i} \right)^{\frac{1}{(n+1)}}$$

- 4 Si $\hat{h} > h_i$, on choisit comme nouveau pas : $h_{i+1} = \min(\hat{h}, \frac{3}{2}h_i, h_{max})$
- 5 Si $\hat{h} < h_i$, on choisit comme nouveau pas : $h_{i+1} = \max(\hat{h}, \frac{1}{2}h_i, h_{min})$



Méthodes d'Adams

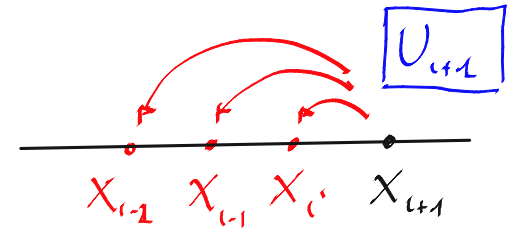
Idée 0

Méthodes à pas liés

On souhaite exploiter
la connaissance des valeurs passées.

$$U_{i+1} = U_i + h \sum_{j=-1}^n \beta_j \underbrace{f(X_{i-j}, U_{i-j})}_{F_{i-j}} \quad (i \geq n).$$

*On utilise $n+1$ valeurs précédentes :
Méthodes à pas liés*



Adams-Bashfort-Moulton n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,
Prédicteur explicite à pas liés,
Correcteur (semi-)implicite à pas liés,
Conditionnellement stables

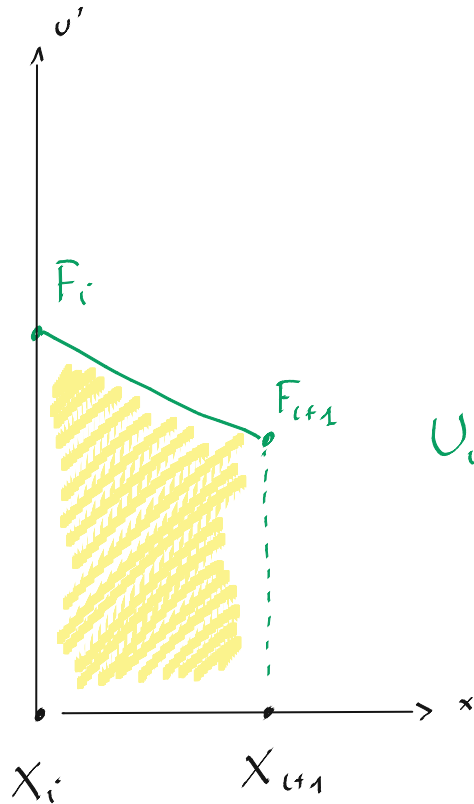
Interpolation

METHODE
D'ADAMS BASFORTH

ORDRE 2

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \left[F_i + (F_i - (F_{i-1} - F_i)) \right]$$

$3F_i - F_{i-1}$

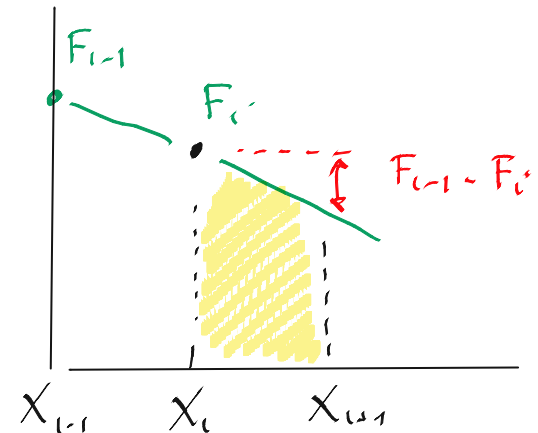


$$U_{i+1} = U_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} [F_i + F_{i+1}]$$

METHODE
D'ADAMS - MOULTON
ORDRE 2

CRANK
NICOLSON



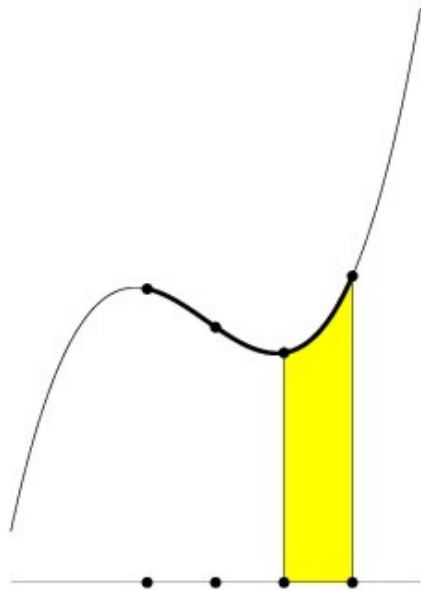
EULER
IMPLICITE

METHODE
D'ADAMS - MOULTON
ORDRE 1

$$U_{i+1} = U_i + h F_{i+1}$$

Extrapolation

Interpolation

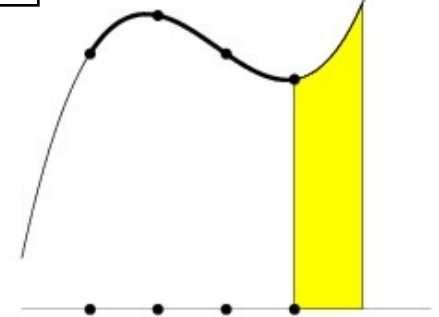


Adams-Moulton $\mathcal{O}(h^4)$

Implicite

$$U_{i+1} = U_i + \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx$$

Explicite



Adams-Bashforth $\mathcal{O}(h^4)$

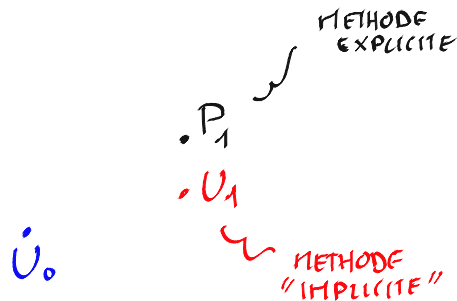
Extrapolation

Estimer l'erreur à un pas

Méthodes prédicteur-correcteur

On souhaite obtenir une estimation
de l'erreur locale.

Idée 1



$$P_1 = U_0 + \frac{h}{24} [-9 F_{-3} + 37 F_{-2} - 59 F_{-1} + 55 F_0]$$

ADAMS
BASFORTH
ORDRE 4

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{24} [$$

ADAMS
MOULTON
ORDRE 4

$$F_{-2} - 5 F_{-1} + 19 F_0 + 9 F_1]$$

$$\approx f(x, P_1)$$

Estimer le terme implicite

Méthodes prédicteur-correcteur

Obtenir une estimation de U_{i+1} pour les
formules des méthodes implicites

Idée 2

$$\boxed{P_1} = U_0 + \frac{h}{2} [3F_0 + F_1]$$

PREDICTION
ADAMS
BASHFORTH
ORDRE 2

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} \left[F_0 + \underbrace{f(P_1)}_{\approx F_1} \right]$$

LE TERME
IMPLICITE

EST ESTIMÉ AVEC $P_1 \approx U_1$

Mais est-ce encore implicite ?

Méthodes prédicteur-correcteur

Obtenir une estimation de U_{i+1} pour les formules des méthodes implicites

Idée 2

P_1

PREDICTION
ADAMS
BASHFORTH
ORDRE 2

$$= U_0 + \frac{h}{2} [3F_0 + F_1]$$

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} [F_0 + \underbrace{f(P_1)}_{\approx F_1}]$$

LE TERME
IMPLICITE

EST ESTIME
AVEC $P_1 \approx U_1$

$$u' = \lambda u$$

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} [\lambda U_0$$

$$+ \lambda \left[U_0 + \frac{h\lambda}{2} [3U_0 - U_{-1}] \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(P_1)}$

$$U_1 = U_0 + h\lambda U_0 + \frac{h^2\lambda^2}{2} [3U_0 - U_{-1}]$$

Pratiquement...

$$U_{i+1} = U_i + h F_i$$

$$|e_i| \leq \frac{C_2}{2} h^2 \quad (\text{Euler explicite - Adams-Bashforth d'ordre 1}) \quad \mathcal{O}(h)$$

$$U_{i+1} = U_i + h F_{i+1}$$

$$|e_i| \leq \frac{C_2}{2} h^2 \quad (\text{Euler implicite - Adams-Moulton d'ordre 1}) \quad \mathcal{O}(h)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \left(-F_{i-1} + 3F_i \right)$$

$$|e_i| \leq \frac{5C_3}{12} h^3 \quad (\text{Adams-Bashforth d'ordre 2}) \quad \mathcal{O}(h^2)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \left(F_i + F_{i+1} \right)$$

$$|e_i| \leq \frac{C_3}{12} h^3 \quad (\text{trapèzes - Adams-Moulton d'ordre 2}) \quad \mathcal{O}(h^2)$$

Estimer l'erreur à un pas

$$(u(X_{i+1}) - U_{i+1})^2 \approx \underbrace{\left(\frac{-19}{270} (U_{i+1} - P_{i+1}) \right)^2}_{\theta_{i+1}^2}$$

$$P_{i+1} = U_i + \frac{h}{24} \left(-9f(X_{i-3}, U_{i-3}) + 37f(X_{i-2}, U_{i-2}) - 59f(X_{i-1}, U_{i-1}) + 55f(X_i, U_i) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{24} \left(f(X_{i-2}, U_{i-2}) - 5f(X_{i-1}, U_{i-1}) + 19f(X_i, U_i) + 9f(X_{i+1}, P_{i+1}) \right)$$

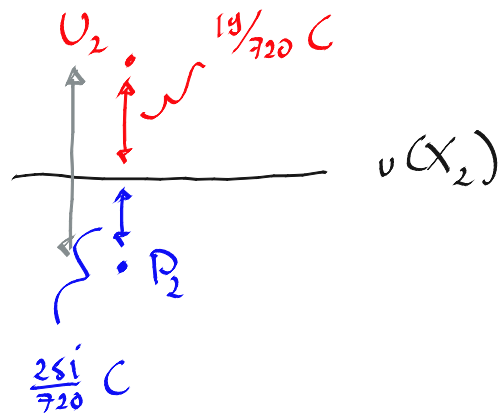
$$u(X_{i+1}) - P_{i+1} = \frac{251h^5}{720} u^{(5)}(\xi_{i+1}),$$

$$u(X_{i+1}) - U_{i+1} = \frac{-19h^5}{720} u^{(5)}(\zeta_{i+1}).$$

Estimer l'erreur à un pas

$$\frac{-19}{720} C = \frac{-19}{720} \frac{720}{270} (U_2 - P_2)$$

$$(u(X_{i+1}) - U_{i+1})^2 \approx \underbrace{\left(\frac{-19}{270} (U_{i+1} - P_{i+1}) \right)^2}_{\theta_{i+1}^2}$$



$$u(X_2) - U_2 = \frac{-19}{720} C$$

$$- [u(X_2) - P_2 = \frac{251}{720} C]$$

$$P_2 - U_2 = \left(\frac{-251}{720} - \frac{19}{720} \right) C$$

C

$$u(X_{i+1}) - P_{i+1} = \frac{251h^5}{720} \overbrace{u^{(5)}(\xi_{i+1})},$$

$$u(X_{i+1}) - U_{i+1} = \frac{-19h^5}{720} \overbrace{u^{(5)}(\xi_{i+1})}.$$

Méthodes de Gear

$$u_{i+1}^h(x) = \sum_{j=0}^n U_{i+1-j} \phi_j(x)$$

$$\begin{aligned} u'(X_{i+1}) &= \underbrace{f(X_{i+1}, \overbrace{u(X_{i+1})}^{U_{i+1}})}_{F_{i+1}} \\ &\downarrow \\ (u_{i+1}^h)'(X_{i+1}) &\approx F_{i+1} \\ &\downarrow \\ \sum_{j=0}^n U_{i+1-j} \phi_j'(X_{i+1}) &\approx F_{i+1} \\ &\downarrow \\ U_{i+1} &\approx \frac{1}{\phi_0'(X_{i+1})} \left(- \sum_{j=1}^n U_{i+1-j} \phi_j'(X_{i+1}) + F_{i+1} \right) \end{aligned}$$

Gear n quelconque

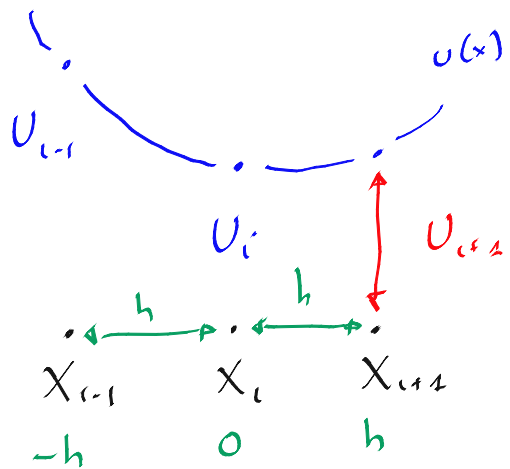
Ordre de précision arbitrairement élevé,

Implicites à pas liés

Très stables sur l'axe réel (ok pour problèmes réels raides)

Calcul des coefficients

$$u(x) = U_{i+1} \underbrace{\text{[diagram: line from } x_{i+1} \text{ to } x_i \text{ with a curve]}}_{\frac{(x+h)x}{2h^2}} + U_i \underbrace{\text{[diagram: arc from } x_{i+1} \text{ to } x_{i-1} \text{]}}_{\frac{(x+h)(x-h)}{-h^2}} + U_{i-1} \underbrace{\text{[diagram: line from } x_{i-1} \text{ to } x_i \text{ with a curve]}}_{\frac{(x-h)x}{2h^2}} + \mathcal{O}(h^3)$$



$$u'(x) \Big|_{x=x_{i+1}} = U_{i+1} \underbrace{\frac{2x+h}{2h^2}}_{\frac{3h}{h^2}} + U_i \underbrace{\frac{2x}{-h^2}}_{\frac{2h}{-h^2}} + U_{i-1} \underbrace{\frac{2x-h}{2h^2}}_{\frac{h}{2h^2}} + \mathcal{O}(h^2)$$

F_{i+1}

$$h F_{i+1} = \frac{3}{2} U_{i+1} - 2 U_i + \frac{1}{2} U_{i-1} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i-1} + \frac{2h}{3} F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

Gear-2

$$u_{i+1}^h(x) = U_{i+1} \phi_0(x) + U_i \phi_1(x) + U_{i-1} \phi_2(x)$$

$$= U_{i+1} \frac{(x - X_i)(x - X_{i-1})}{2h^2}$$

$$+ U_i \frac{(x - X_{i+1})(x - X_{i-1})}{-h^2} + U_{i-1} \frac{(x - X_{i+1})(x - X_i)}{2h^2}$$



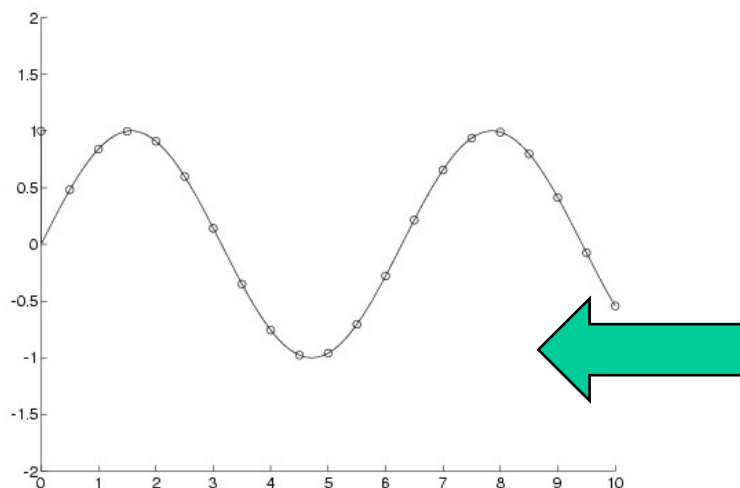
$$(u_{i+1}^h)'(x) = U_{i+1} \frac{(2x - X_i - X_{i-1})}{2h^2}$$

$$+ U_i \frac{(2x - X_{i+1} - X_{i-1})}{-h^2} + U_{i-1} \frac{(2x - X_{i+1} - X_i)}{2h^2}$$



$$(u_{i+1}^h)'(X_{i+1}) = U_{i+1} \left(\frac{3h}{2h^2} \right) + U_i \left(\frac{-2h}{h^2} \right) + U_{i-1} \left(\frac{h}{2h^2} \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}U_{i+1} - 2U_i + \frac{1}{2}U_{i-1} \right)$$



$$U_{i+1} = \frac{4}{3}U_i - \frac{1}{3}U_{i-1} + \frac{2h}{3}F_{i+1}.$$

Précision ?

ERREUR
LOCALE

$$\mathcal{O}(h^3)$$

ERREUR
GLOBALE

$$\mathcal{O}(h^2)$$

METHODE
ORDRE 2

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i-1} + \frac{2h}{3} F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

Stabilité ?

$$U_{i+1} = \alpha U_i$$

$$U' = \lambda U$$

$$\cancel{\alpha^{i+1} U_0} = \frac{4}{3} \cancel{\alpha^i U_0} - \frac{1}{3} \cancel{\alpha^{i-1} U_0} + \overbrace{\frac{2h\lambda}{3} \alpha^{i+1} U_0}^{F_{i+1}}$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{3} \alpha - \frac{1}{3} + \frac{2h\lambda}{3} \alpha^2$$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' \\ \alpha'' \end{array} \right\} \rightarrow \max(|\alpha'|, |\alpha''|)$

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i-1} + \frac{2h}{3} F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

