

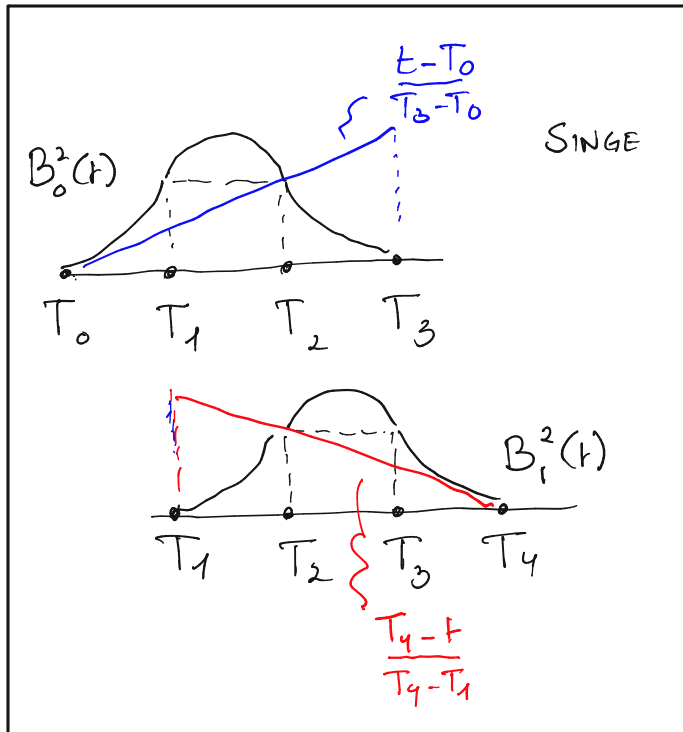
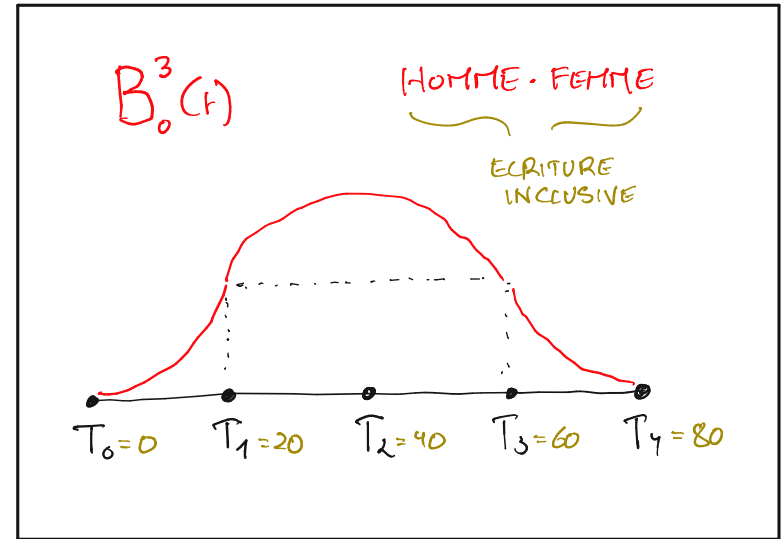
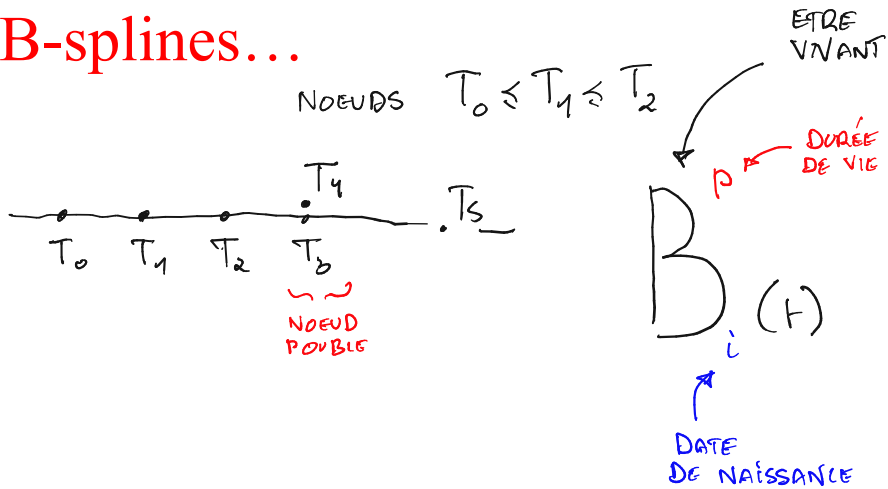
Introduction aux NURBS

The Art of 3D Computer Modeling



www.pixar.com

B-splines...



Soit les $n+1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$.
Les B-splines de degré p sont les $n-p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[T_i, T_{i+p}]$ où elle est définie par la relation de récurrence :

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

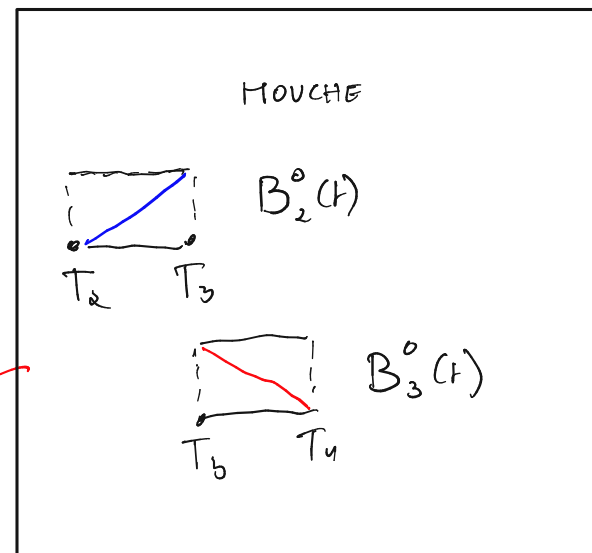
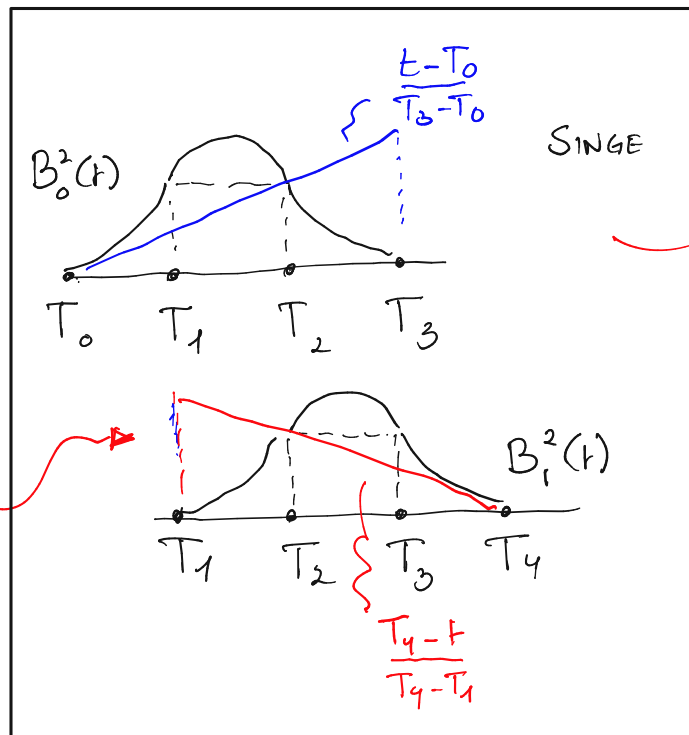
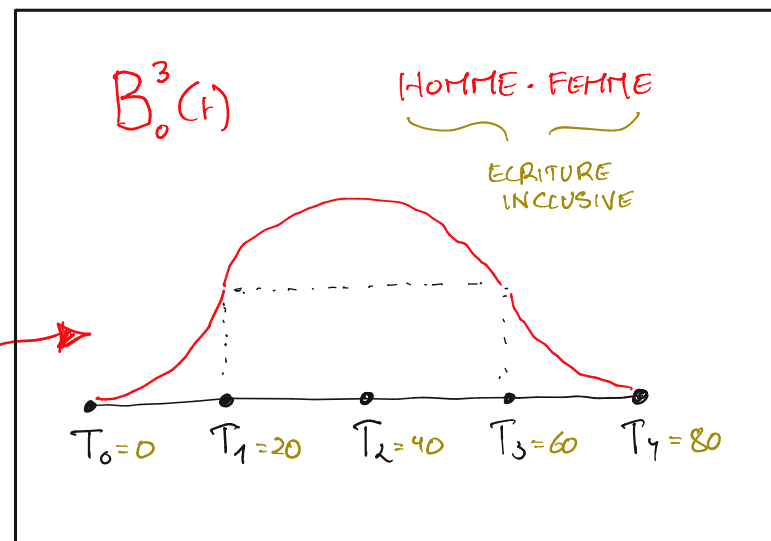
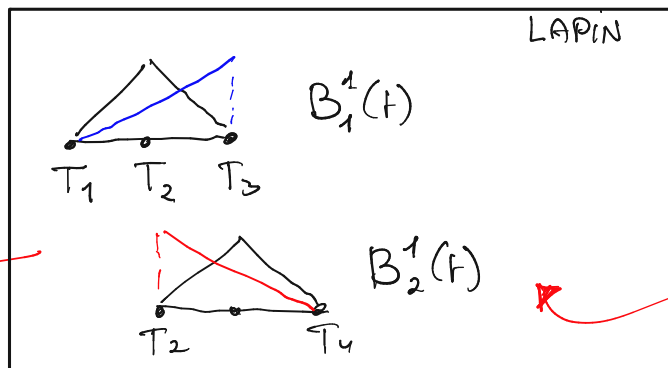
Définition 1.4.

avec $i = 0, \dots, n-p-1$ et en partant de :

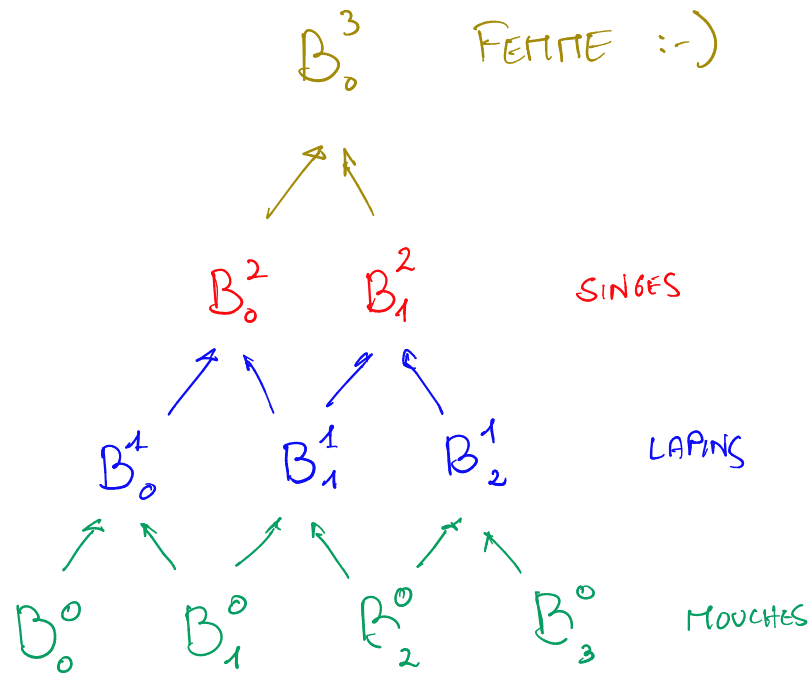
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

Un peu de génétique...



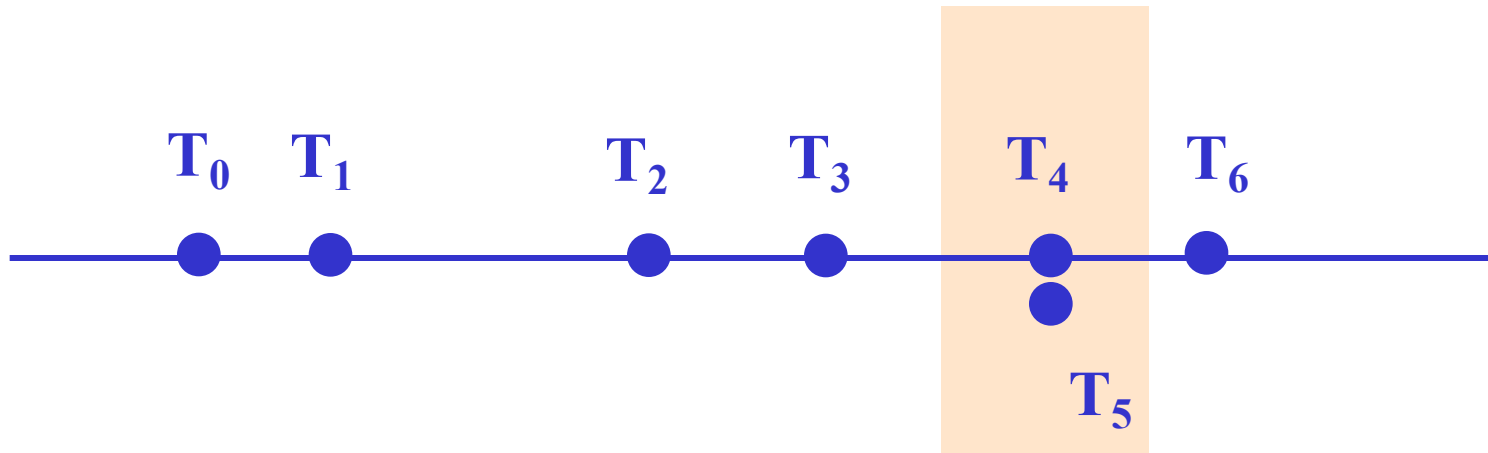
Au sommet
de l'évolution...



...l'humain

Des nœuds...

$$T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n,$$



*Un nœud est de multiplicité m
s'il est répété m fois*

Fonctions B-splines

Soit les $n + 1$ noeuds $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$.

Les B-splines de degré p sont les $n - p$ fonctions $B_i^p(t)$. Une fonction B_i^p est nulle sauf dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1+p}]$ où elle est définie par la relation de récurrence :

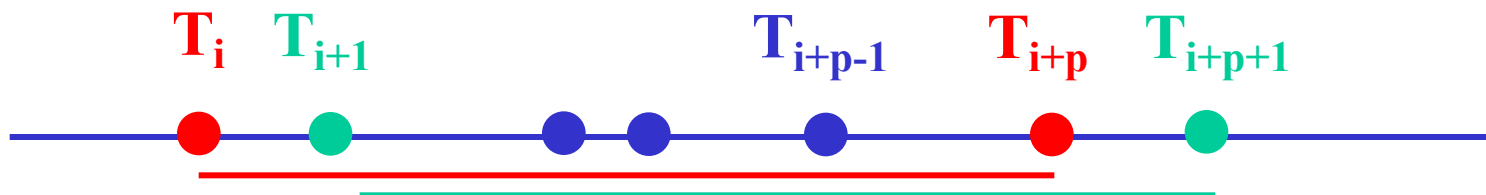
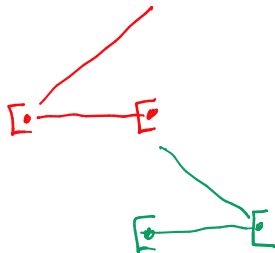
$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

avec $i = 0, \dots, n - p - 1$ et en partant de :

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [T_i, T_{i+1}] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

Définition 1.4.

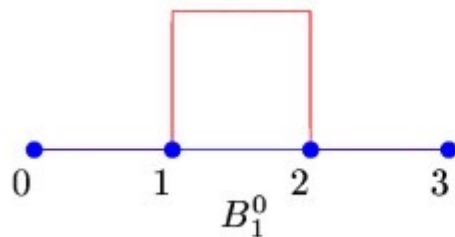


Les B-splines ou fonctions de mélange

$$B_i^p(t) = \boxed{\frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)}} B_i^{p-1}(t) + \boxed{\frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})}} B_{i+1}^{p-1}(t)$$



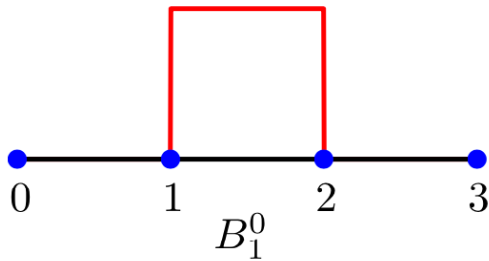
Commençons la récurrence...



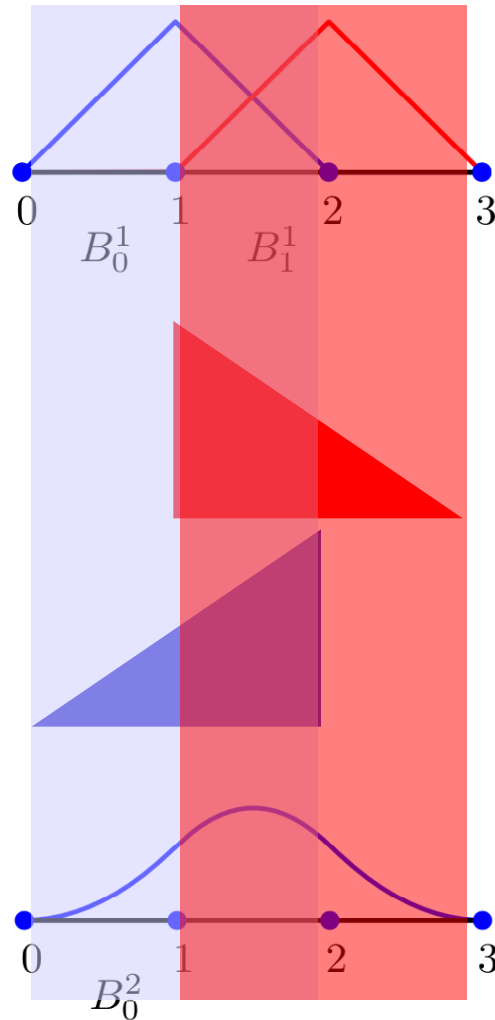
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [T_i, T_{i+1}[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

$$B_i^p(t) = \boxed{\frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)}} B_i^{p-1}(t) + \boxed{\frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})}} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

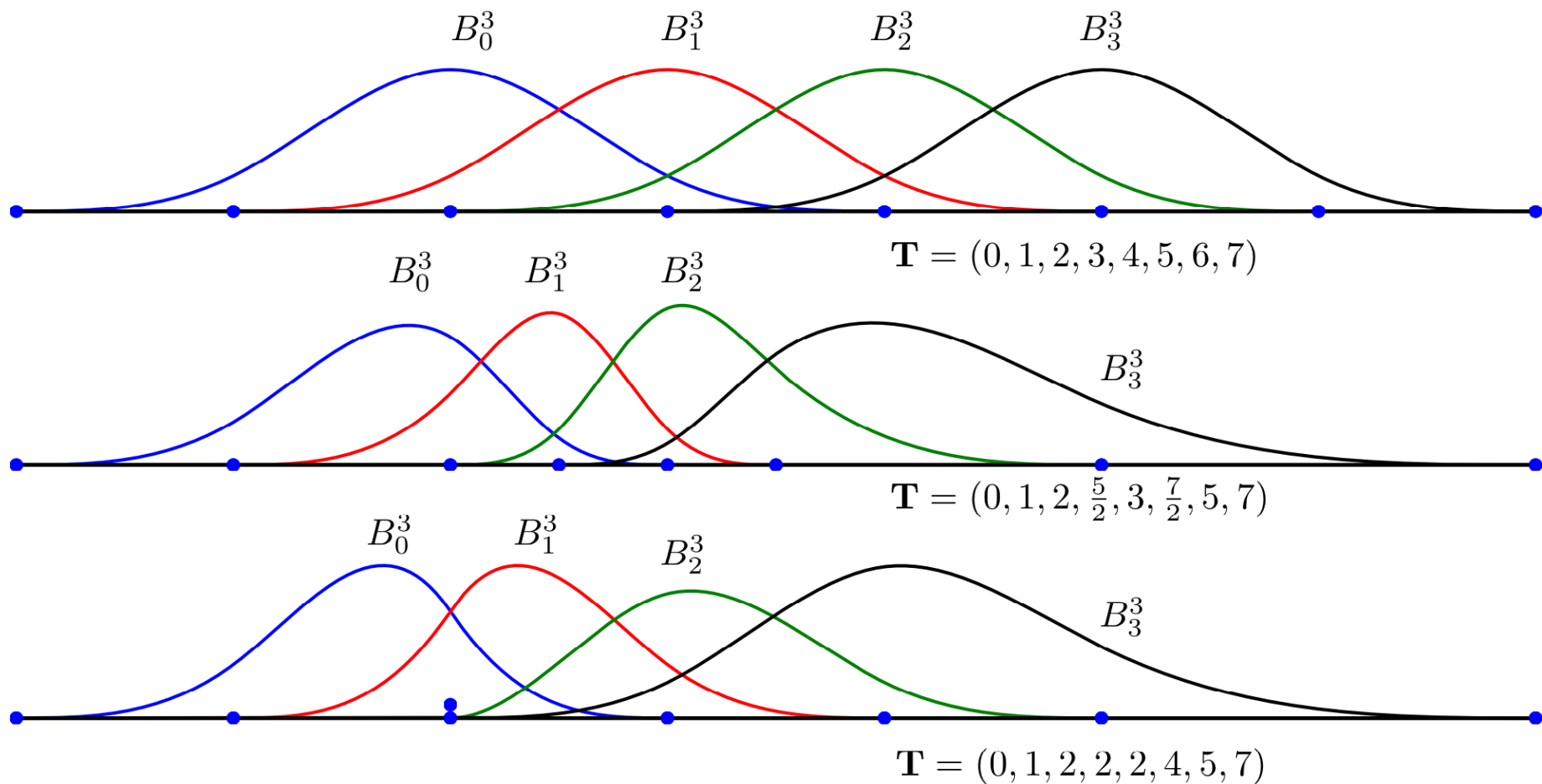


Exemple
facile...

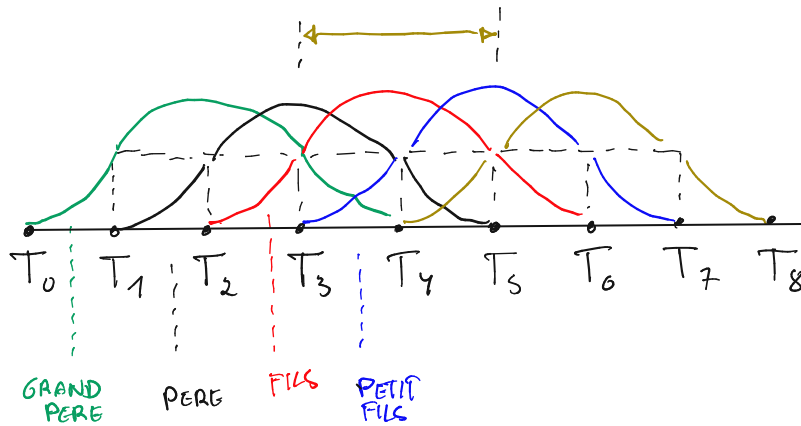


*On peut observer que
la fonction
B-spline est toujours
comprise entre 0 et 1*

Modifions les noeuds...



Toutes les
générations...



T_3 T_4

4 GENERATIONS
PRESENTES
SUR UN INTERVALLE

PROPRIETE 2

$$\sum B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 = 1$$

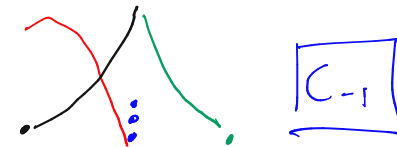
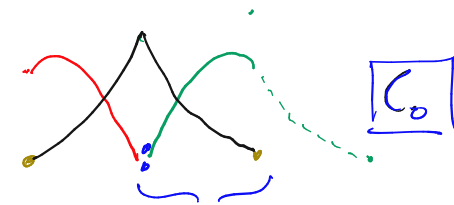
sur $[T_3 T_4]$

PARTITION
DE L'UNITE

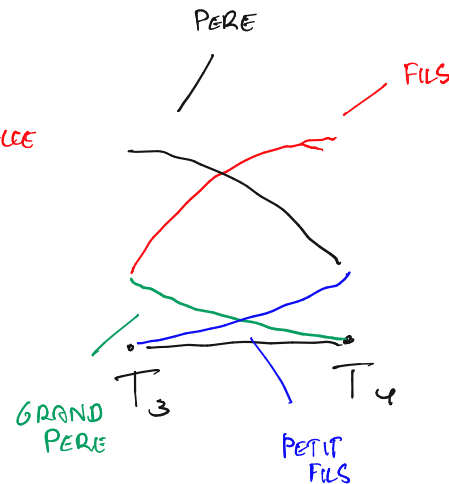
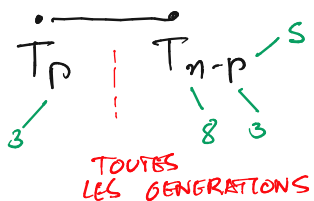
PROPRIETE 3

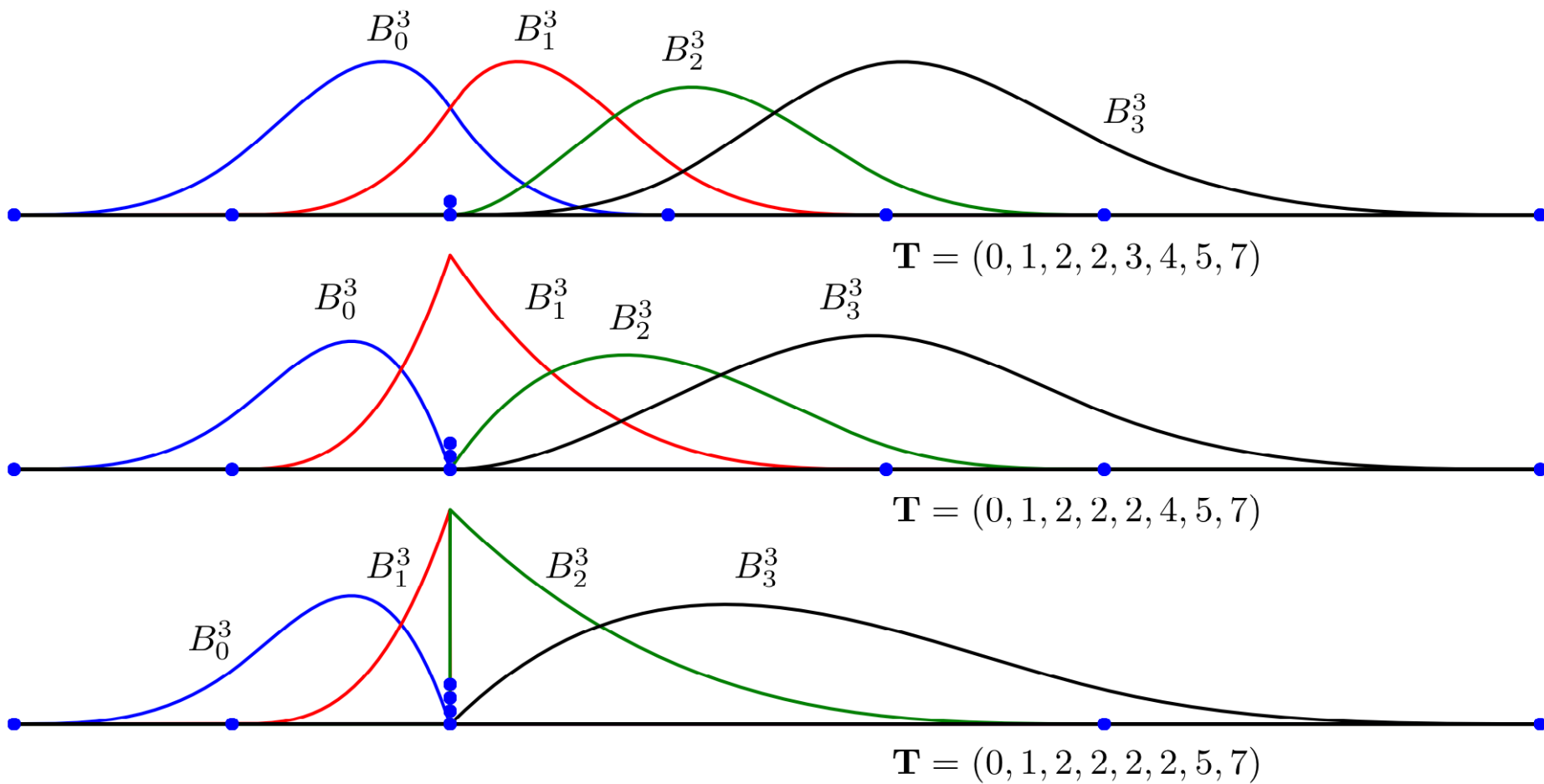
$$C^2 = C^{\frac{p-m}{3}}$$

MULTIPLICITE
= 1



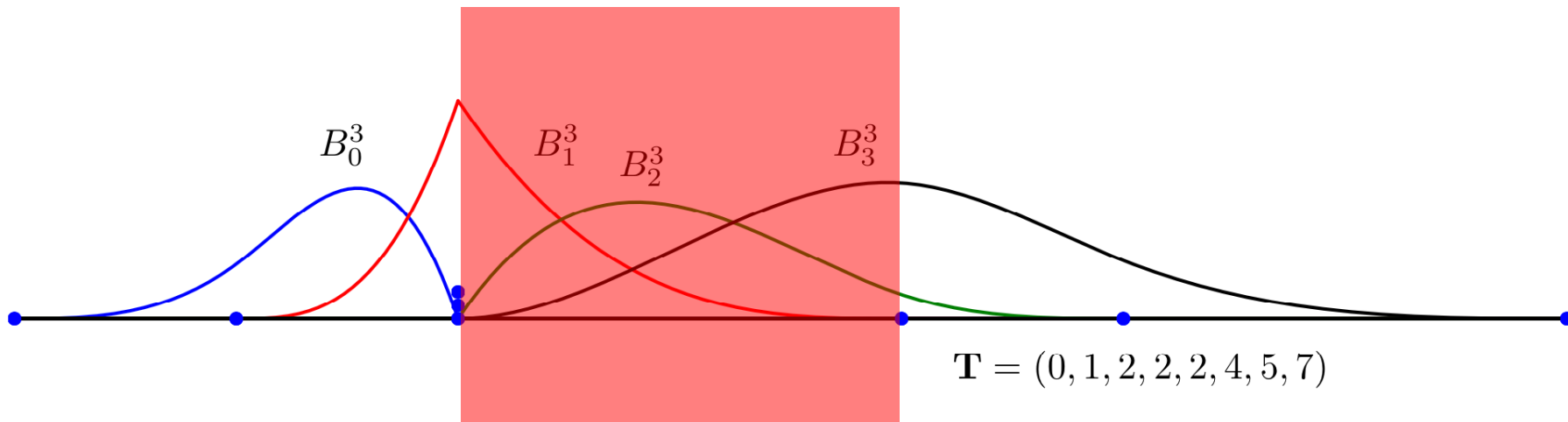
PROPRIETE 1





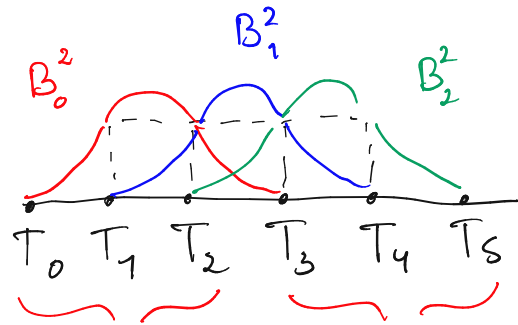
Nœuds
doubles, triples...

Observons



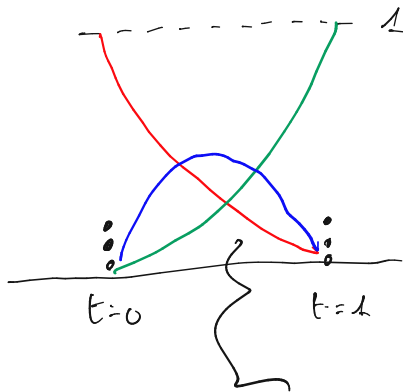
- Dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, seules les splines $B_{i-p}^p(t), \dots, B_i^p(t)$ sont non nulles.
- Une spline $B_i^p(t)$ ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à p .

Les courbes de Bézier...



$$I = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$$

$$I = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$$

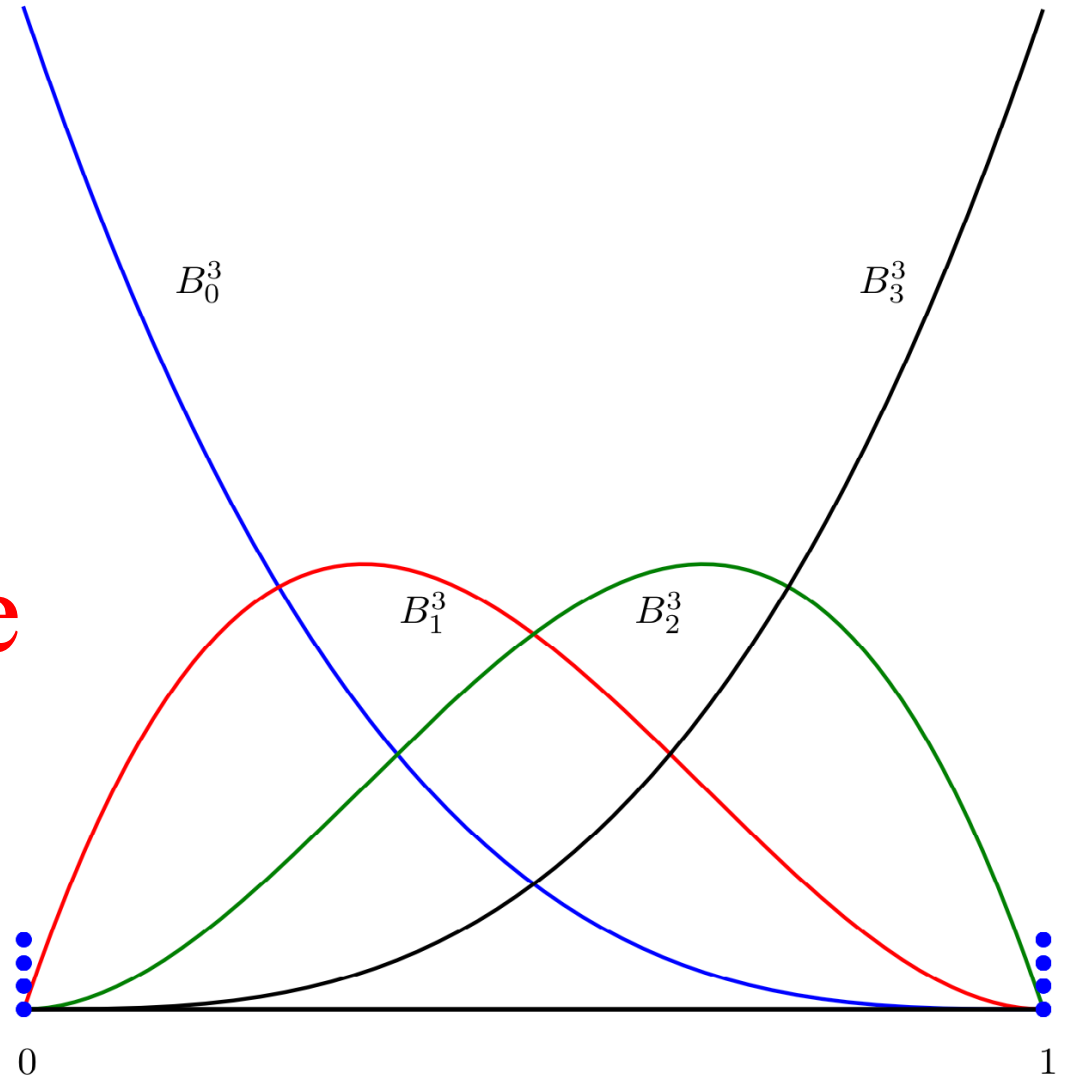


COURBES
DE BEZIER

POLYNOMES
DE BERNSTEIN



Quand les NURBS
deviennent
des splines
de Bézier
qui sont des
polynômes de
Bernstein



Pierre Bézier

Né le 1er septembre 1910 à Paris

Décédé le 25 janvier 1999

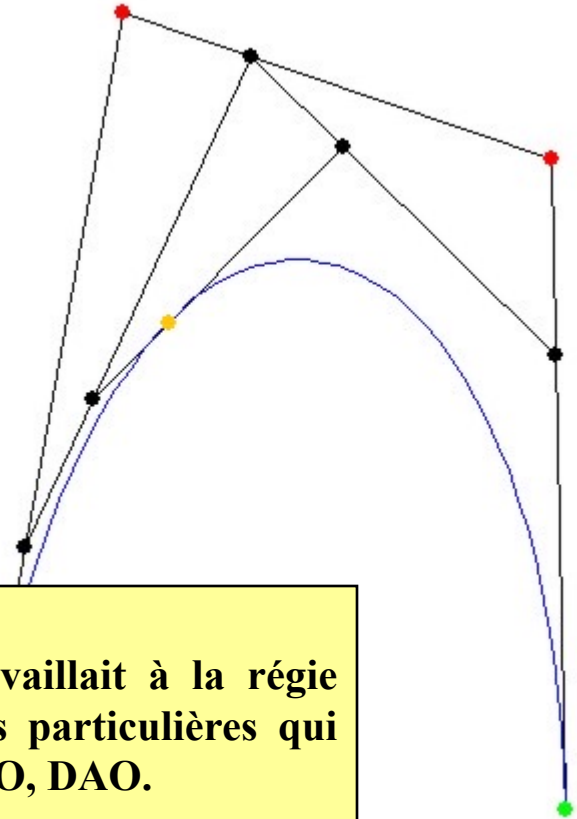
In 1933, Bezier entered **Renault** and worked for this company for 42 years. In 1948, as Director of Production Engineering he was responsible for the design of the transfer lines producing most of the 4 CV mechanical parts. In 1957, he became Director of Machine Tool Division and was responsible for the automatic assembly of mechanical components, and for the design and production of an NC drilling and milling machine.

Bezier started his research in **CAD/CAM** in 1960 when he devoted a substantial amount of his time working on his UNISURF system. His system was launched in 1968.



*A la mémoire de
mon grand-père, ingénieur mécanicien,
mon père, ingénieur mécanicien,
ma sœur, ingénieur chimiste, docteur ès sciences,
P.B.*

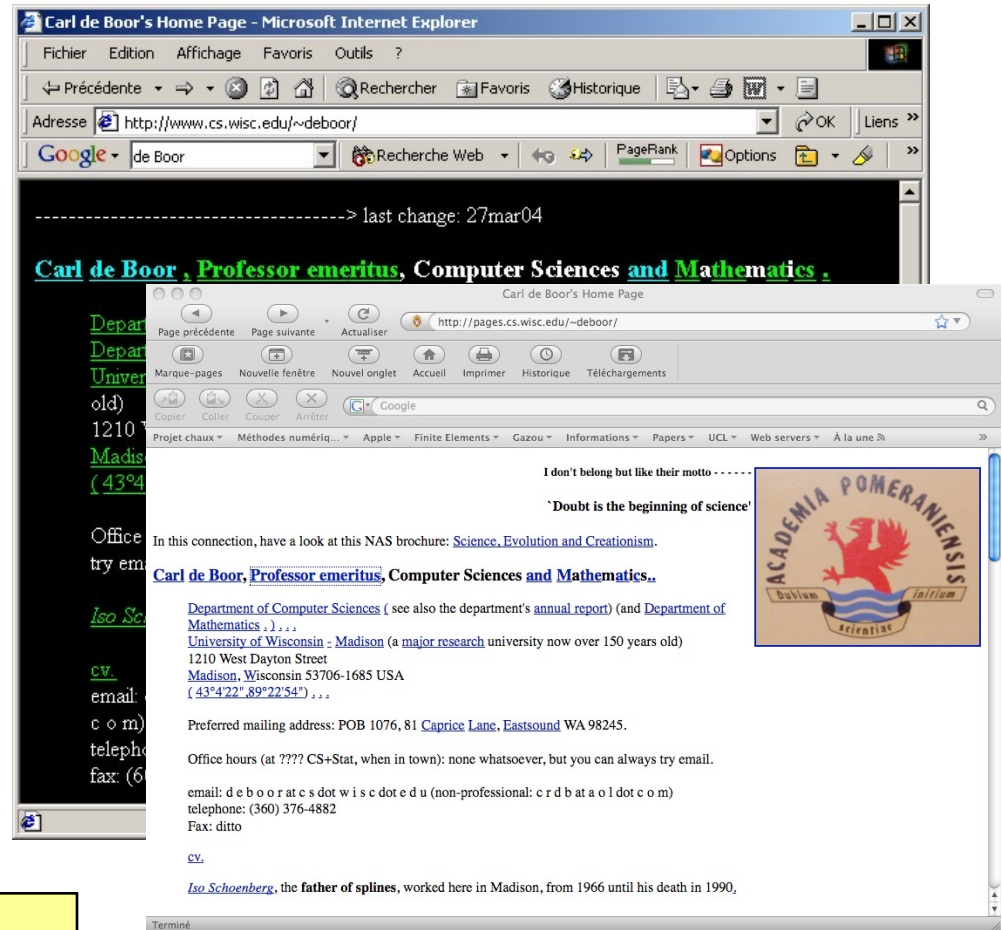
Paul Faget de Casteljaud



Pierre Bezier, ingénieur des Arts et Métiers, travaillait à la régie **Renault**, quand il "inventa" en 1970 des courbes particulières qui portent maintenant son nom. Ce fut le début de CAO, DAO.

Au départ, il devait trouver un moyen simple pour reproduire sur ordinateur des courbes tracées à main-levée par des dessinateurs. Il retravailla certaines études de **Paul Faget de Casteljaud**, ingénieur travaillant chez Citroën, c'est pourquoi on utilise "l'algorithme de Casteljaud" pour les tracer. Aujourd'hui ses courbes sont utilisées dans le monde entier sans vraiment savoir d'où vient cette appellation.

Carl de Boor



**Généralisation de l'algorithme de
Casteljau pour des NURBS :**

Algorithme de Carl de Boor

<http://www.cs.wisc.edu/~deboor/>

A l'exclusion des p premiers et p derniers intervalles, la somme des B-splines vaut l'unité.

$$\sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) = 1$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

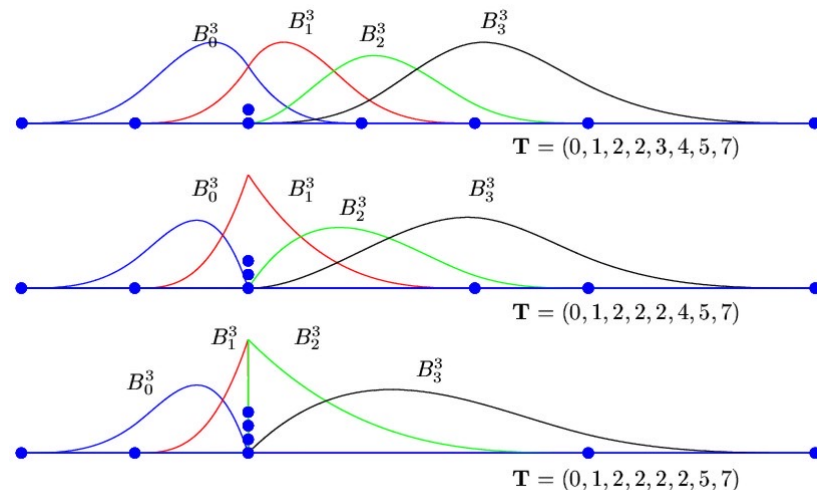
Les B-splines forment une partition unité

- Une spline $B_i^p(t)$ est toujours comprise entre 0 et 1.
- Une spline $B_i^p(t)$ est non nulle que dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1+p}[$.
- Dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, seules les splines $B_{i-p}^p(t), \dots, B_i^p(t)$ sont non nulles.
- Une spline $B_i^p(t)$ ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à p .

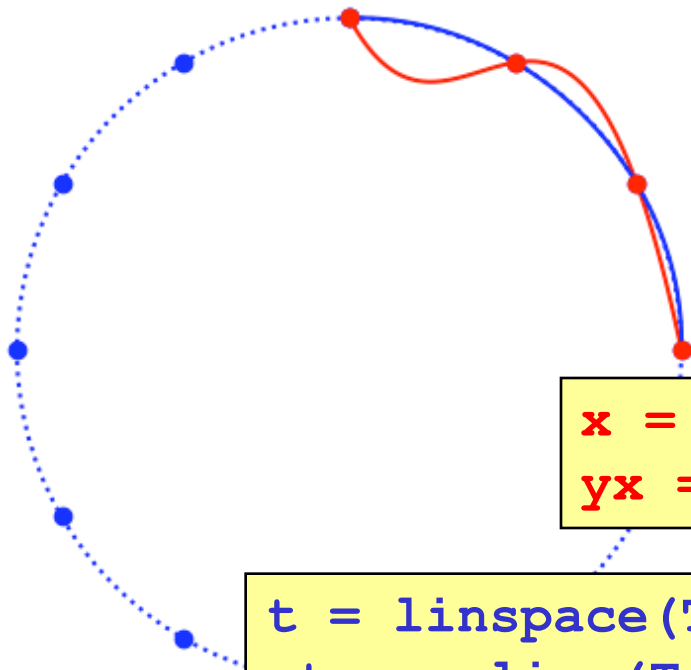
Continuité des B-splines

Théorème 1.4.

Si le vecteur des noeuds est constitué uniquement de points de multiplicité un, les splines de base B_i^p sont $(p - 1)$ -fois dérivables. On dit que l'ordre de continuité est $p - 1$. Par contre, à un point de multiplicité m , l'ordre de continuité n'y sera localement que de $p - m$.



Courbes splines paramétrées



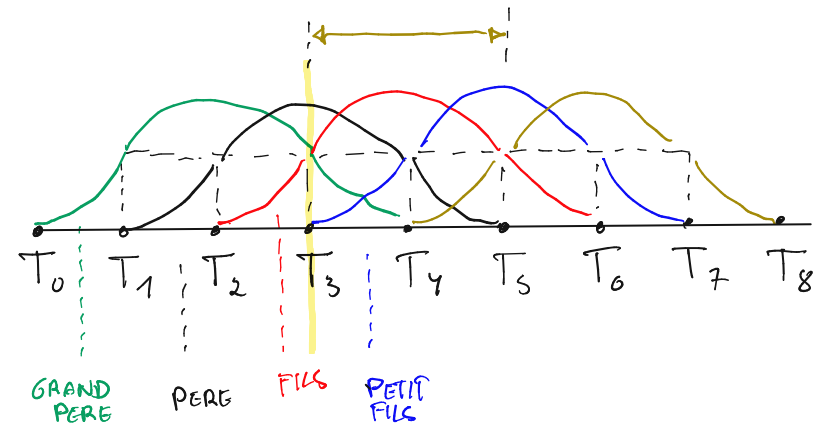
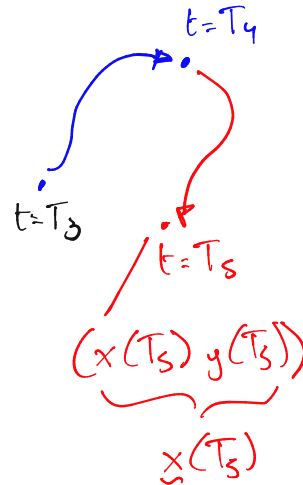
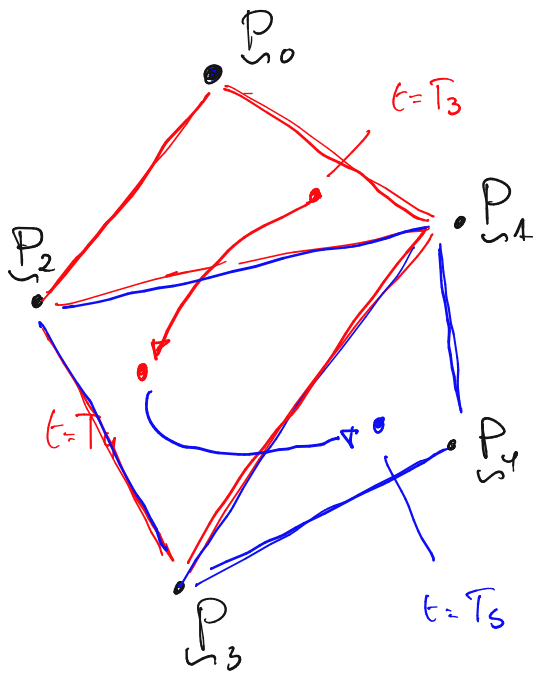
```
T = pi * arange(0,4) / 6  
X = sin(T)  
Y = cos(T)
```

```
x = linspace(X[0],X[-1],100)  
yx = spline(X,Y)(x)
```

```
t = linspace(T[0],T[-1],100)  
xt = spline(T,X)(t)  
yt = spline(T,Y)(t)
```

Courbes paramétrées composées de splines

$$x(t) = \sum \phi_i(t) \underbrace{P_i}_{\substack{\text{POLE} \\ \text{ASSOCIÉ À } T_i}}$$

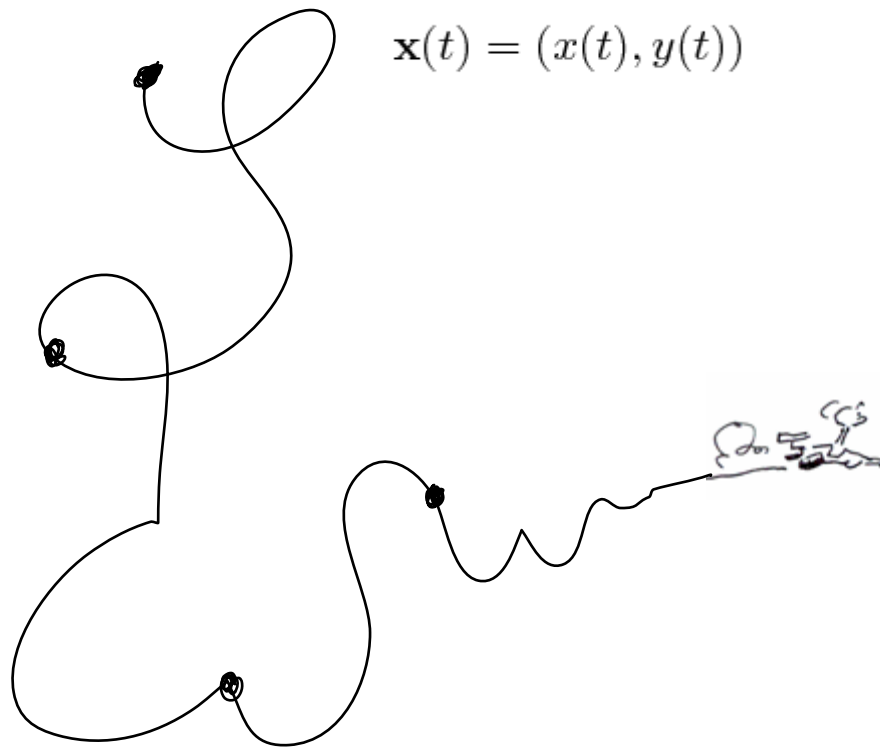


$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-p-1} P_i B_i^p(t)$$

$t \in [T_p, T_{m-p}]$

5 POINTS
 2 INTERVALS

Courbes paramétriques composées de « splines »



$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$$

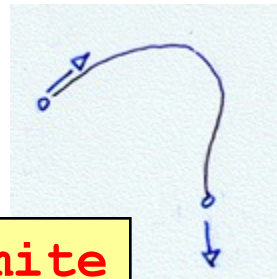
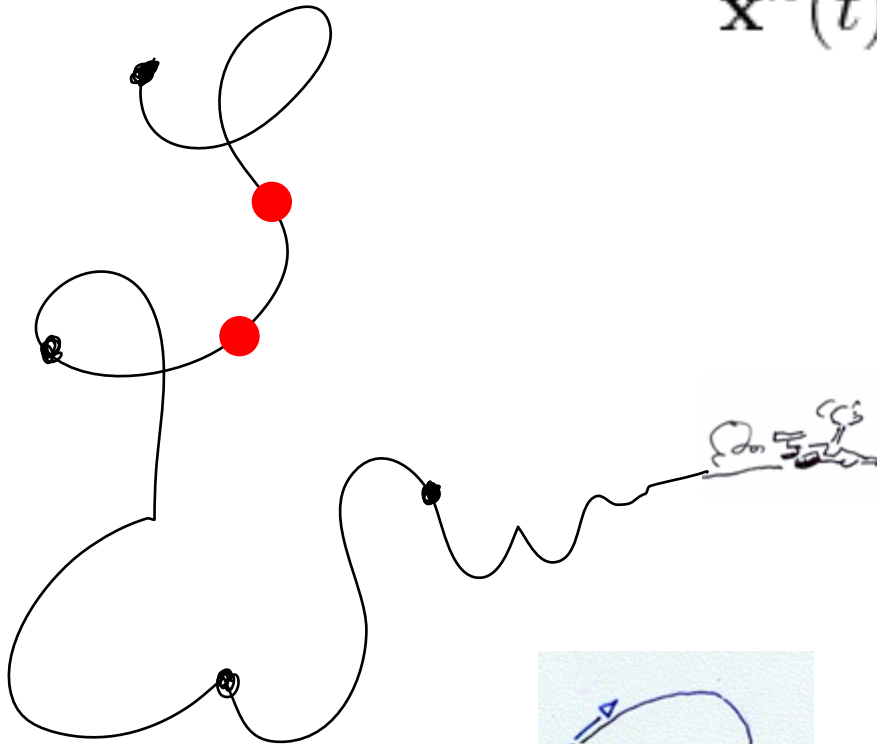
$$(X_i, Y_i) = (x(T_i), y(T_i))$$

Une spline est une forme à pôles

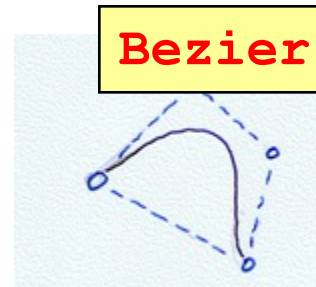
Fonctions de base

$$\mathbf{x}^h(t) = \sum_i \boxed{\phi_i(t)} \boxed{\mathbf{P}_i}$$

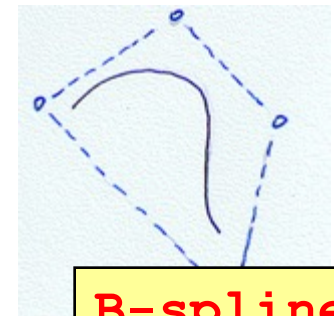
Pôles :
Points de passage
Directions tangentes
Vitesses
Points de contrôle



Hermite



Bezier



B-splines

Courbes composées de B-splines... ce sont des approximations !

$$\left\{ \begin{array}{l} x^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) X_i \\ y^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) Y_i \end{array} \right. \quad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

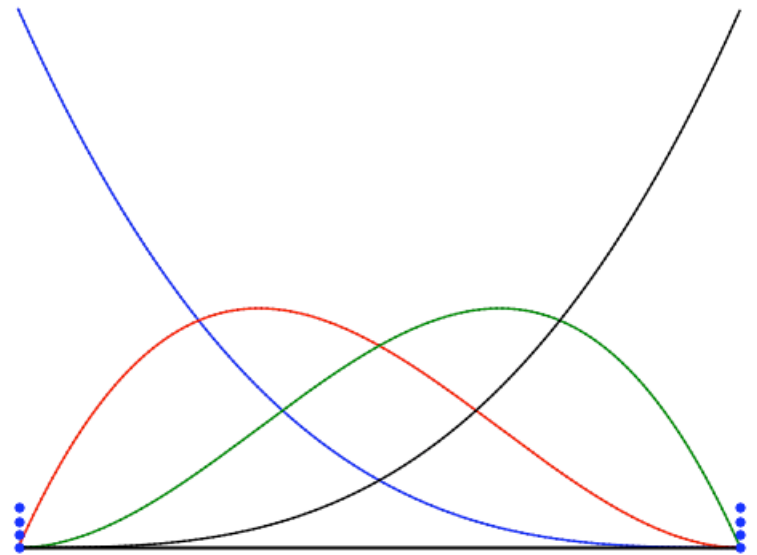
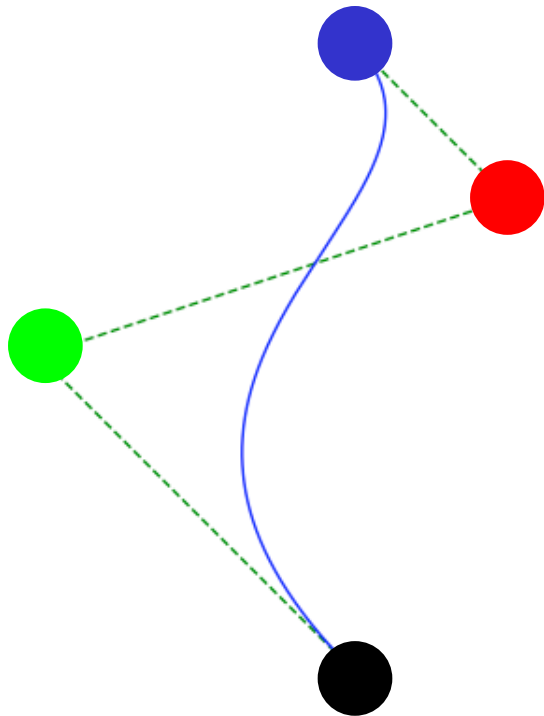
Coordonnées des points de contrôle

La courbe s'approche des points de contrôle, mais ne passe, en général, pas par ceux-ci !

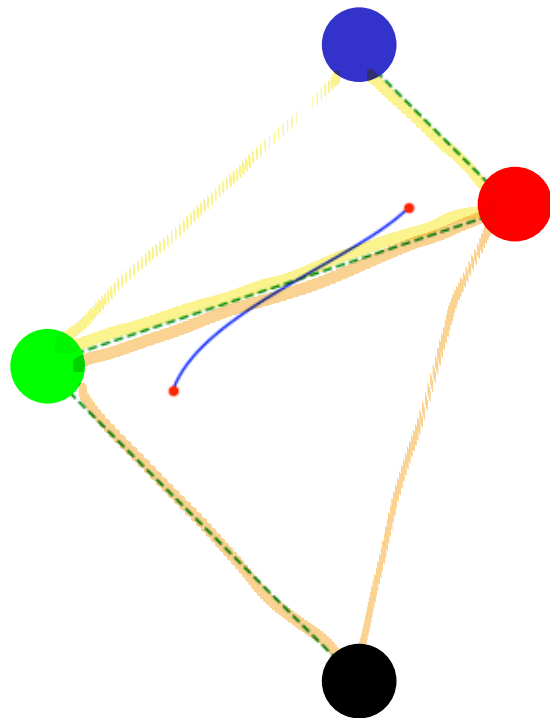
*Il s'agit d'une **approximation**, pas d'une interpolation.*

*Par contre, il n'y a **aucun système d'équations à résoudre** !*

Courbe de Bezier

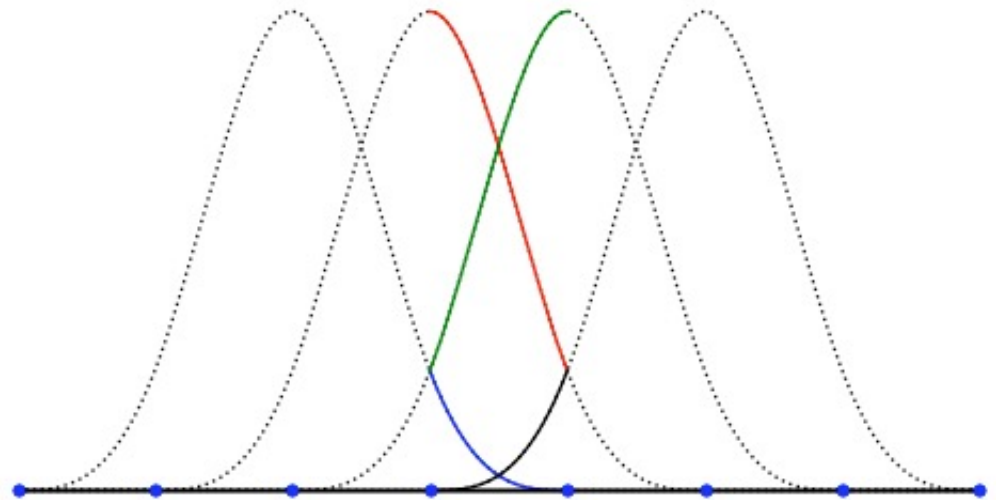


Courbe B-spline



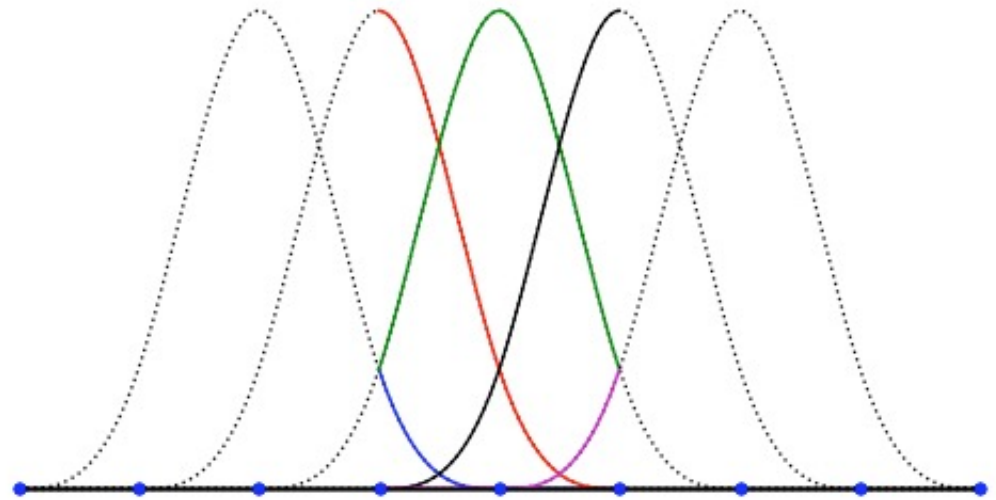
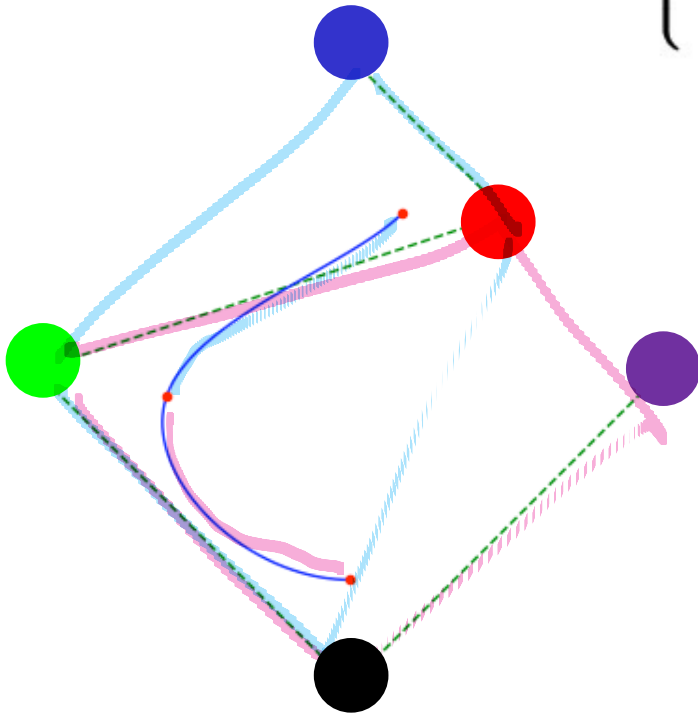
$$\begin{cases} x^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) X_i \\ y^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) Y_i \end{cases}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$



Courbe B-spline

$$\begin{cases} x^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) X_i \\ y^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) Y_i \end{cases} \quad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

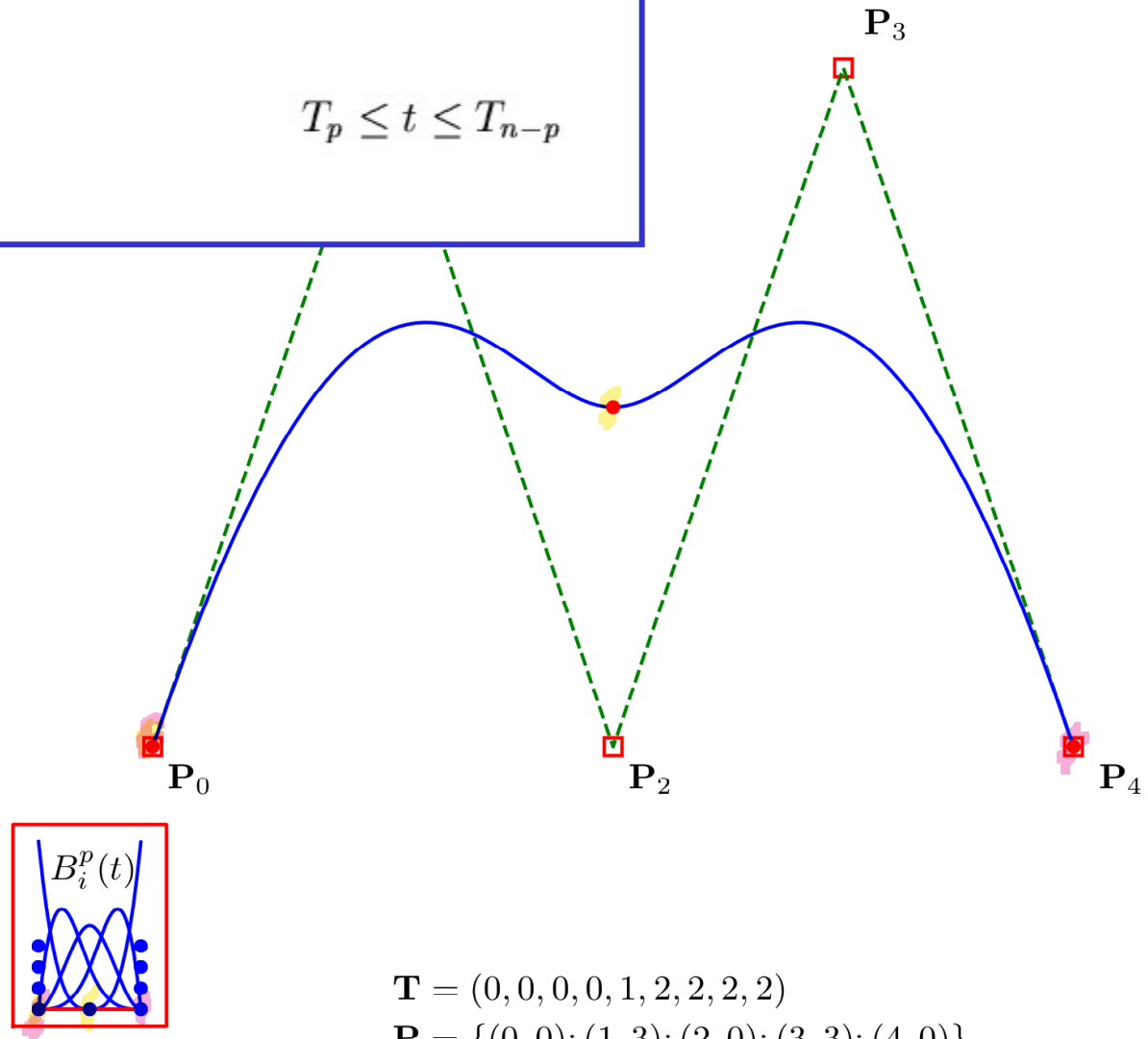


En posant $\mathbf{u}^h(t) = (x^h(t), y^h(t))$ et $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i)$,

$$\mathbf{u}^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) \mathbf{P}_i$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

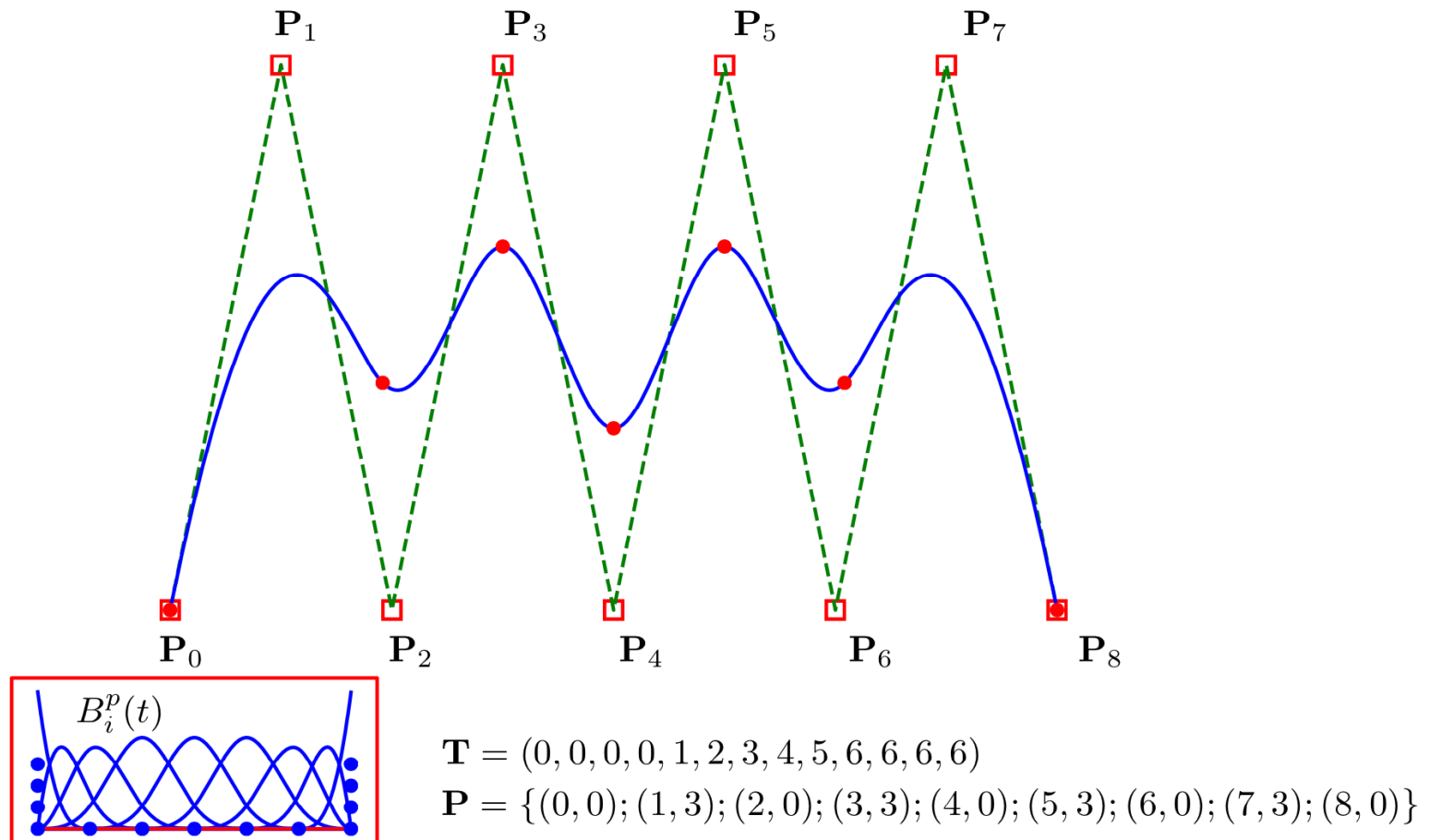
B-splines



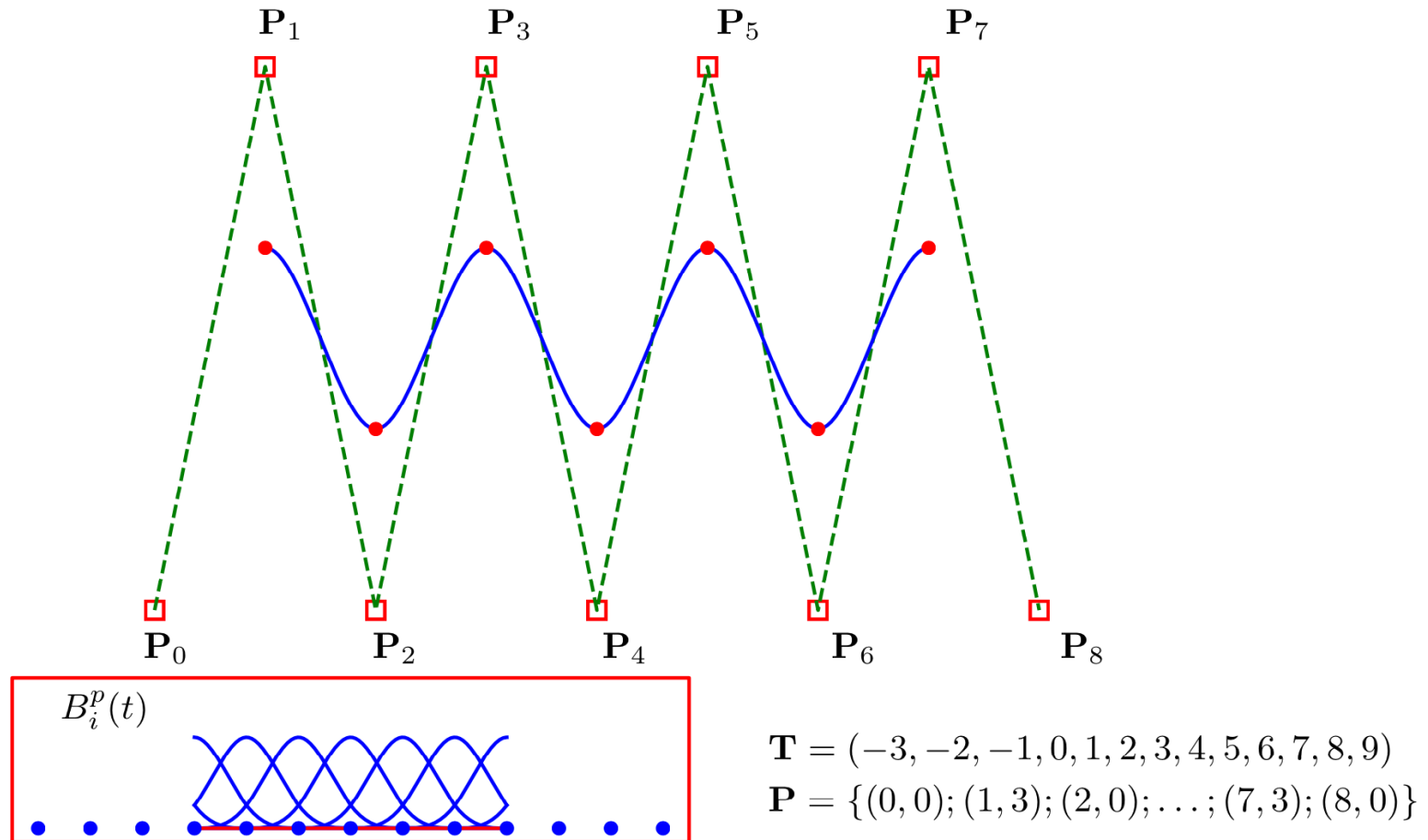
$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2)$$

$$\mathbf{P} = \{(0, 0); (1, 3); (2, 0); (3, 3); (4, 0)\}$$

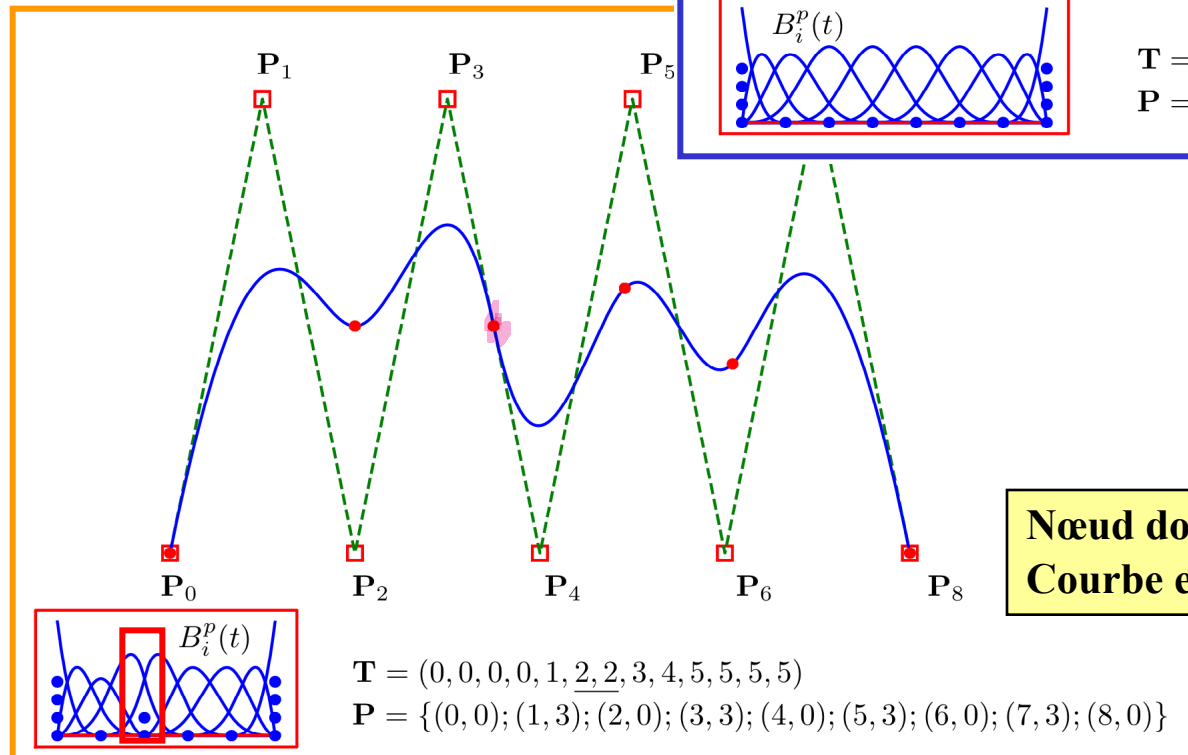
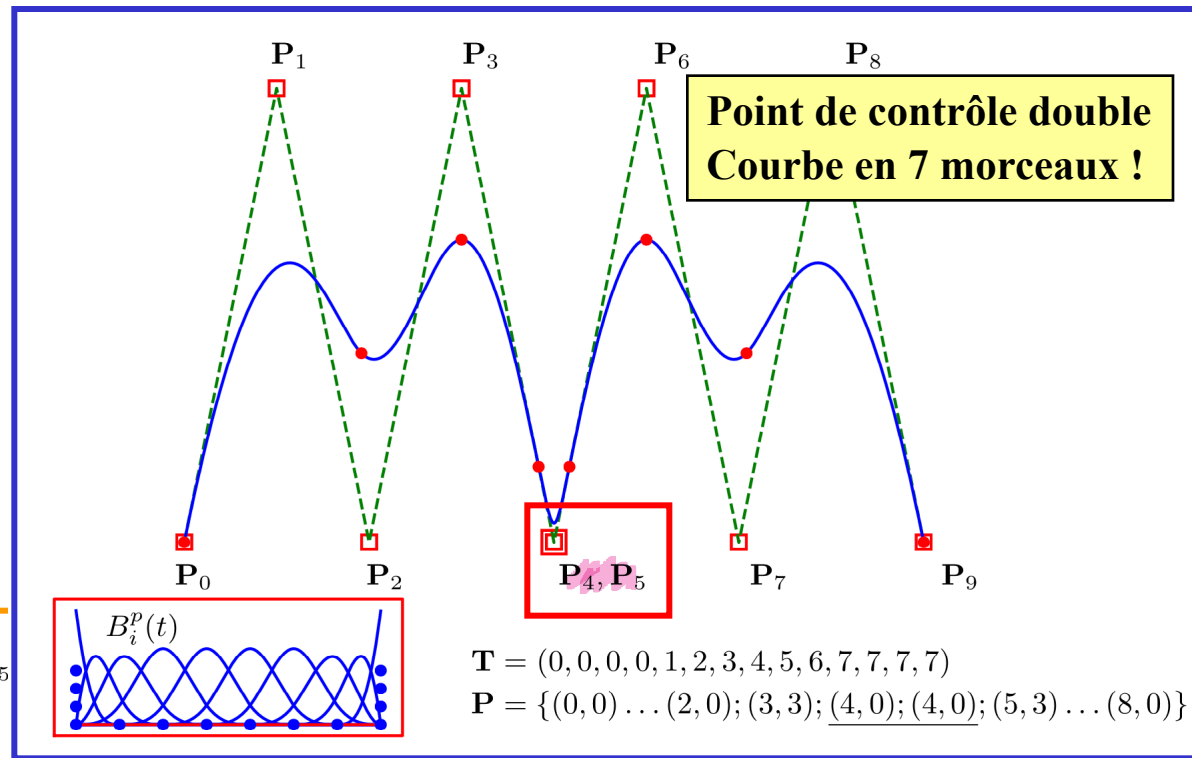
En général, on met des nœuds multiples aux extrémités...



... mais ce n'est pas obligatoire !

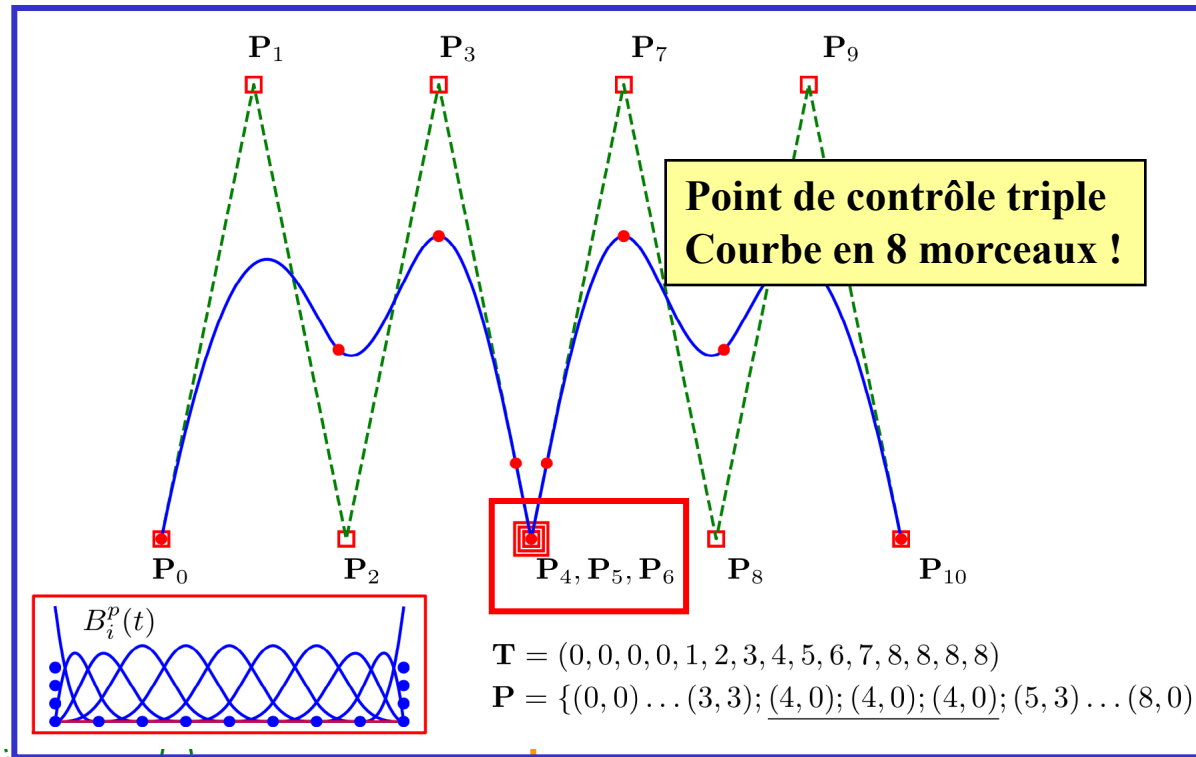


Nœuds ou points doubles !



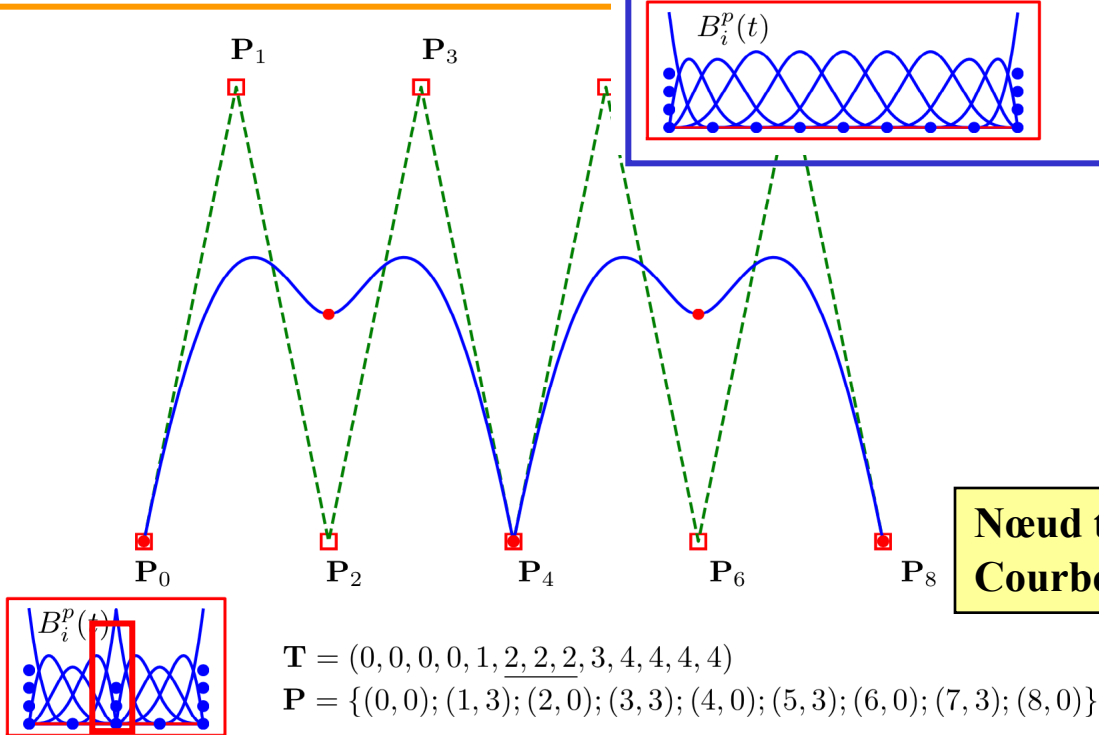
Nœuds ou points multiples ?
Effets semblables
mais pas identiques !

Nœuds ou points triples !



*Travailler avec les
nœuds est moins
intuitif,
mais plus efficace...*

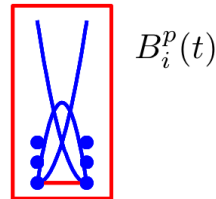
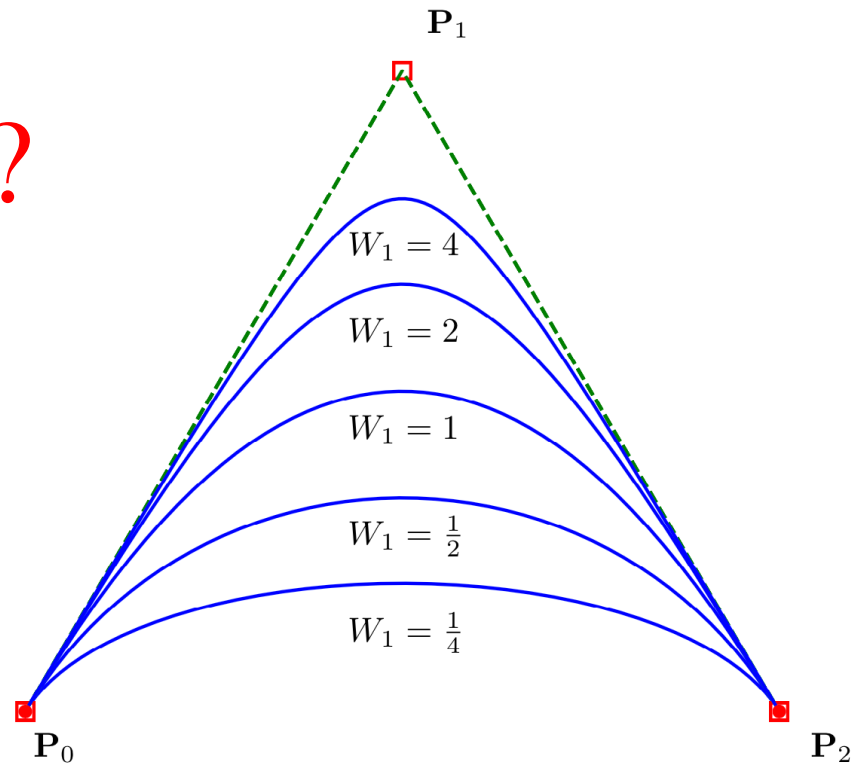
**Nœud triple
Courbe en 4 morceaux !**



Et les NURBS ?

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$



$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{W} = (1, W_1, 1)$$

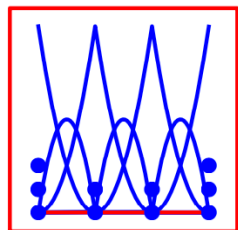
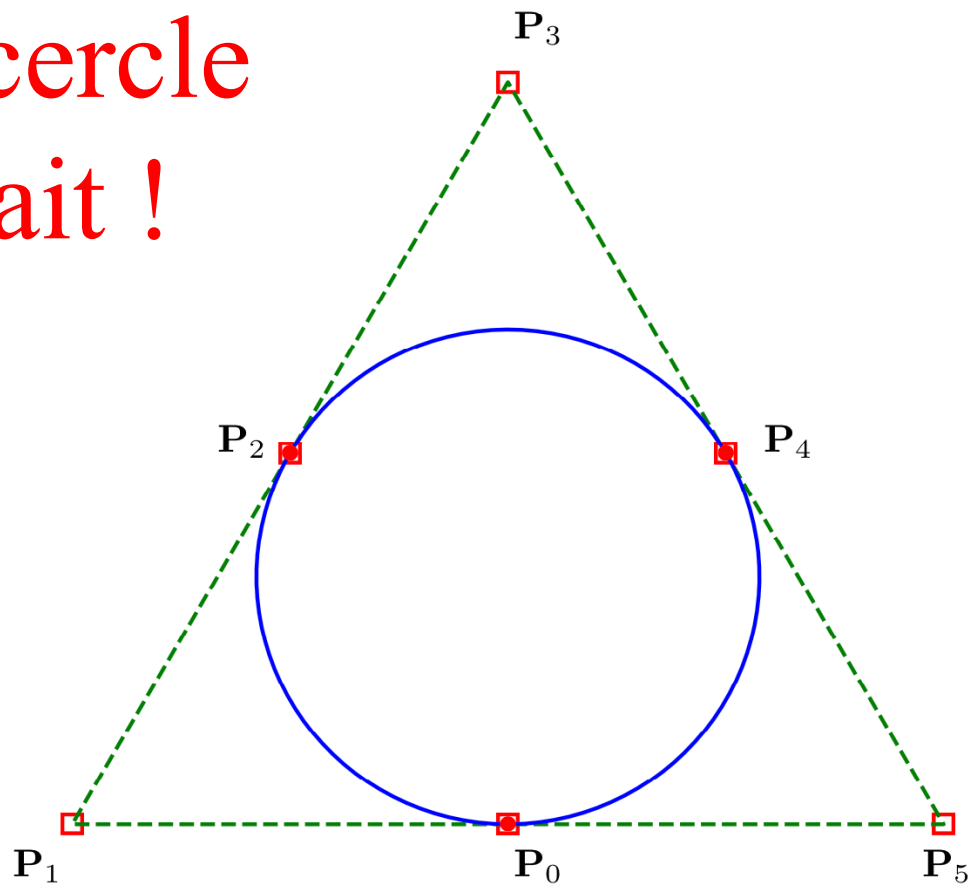
$$\mathbf{P} = \{(0, 0); (1, \sqrt{3}); (2, 0)\}$$

NURBS

Non-Uniform Rational B-Splines

Permet de représenter exactement toutes les coniques (ellipse, parabole, hyperbole)

Un cercle parfait !



$B_i^p(t)$

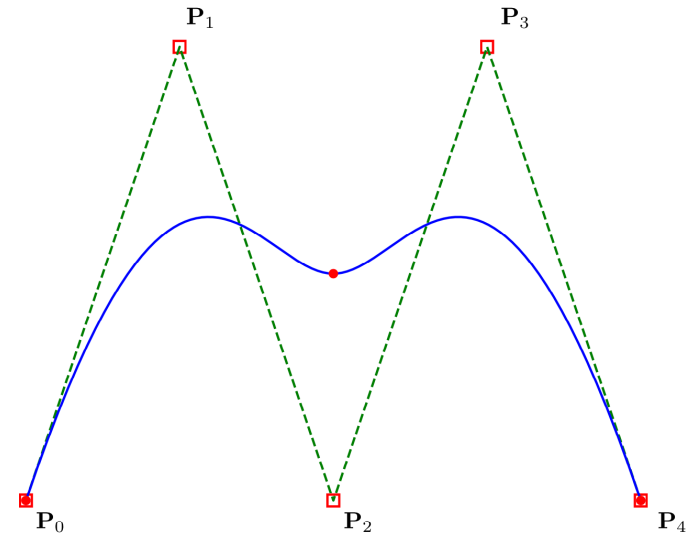
$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$$

$$\mathbf{W} = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1)$$

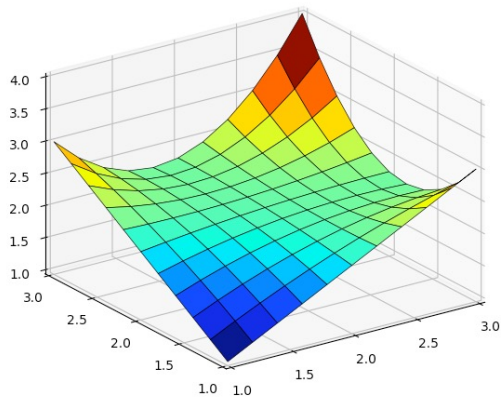
$$\mathbf{P} = \{(1, 0); (0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (1, \sqrt{3}); (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}); (2, 0); (1, 0)\}$$

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$



Généralisation à des surfaces



$$\mathbf{u}^h(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} \sum_{j=0}^{m-q-1} W_{ij} B_i^p(t) B_j^q(s) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{k=0}^{n-p-1} \sum_{l=0}^{m-q-1} W_{kl} B_k^p(t) B_l^q(s)}$$

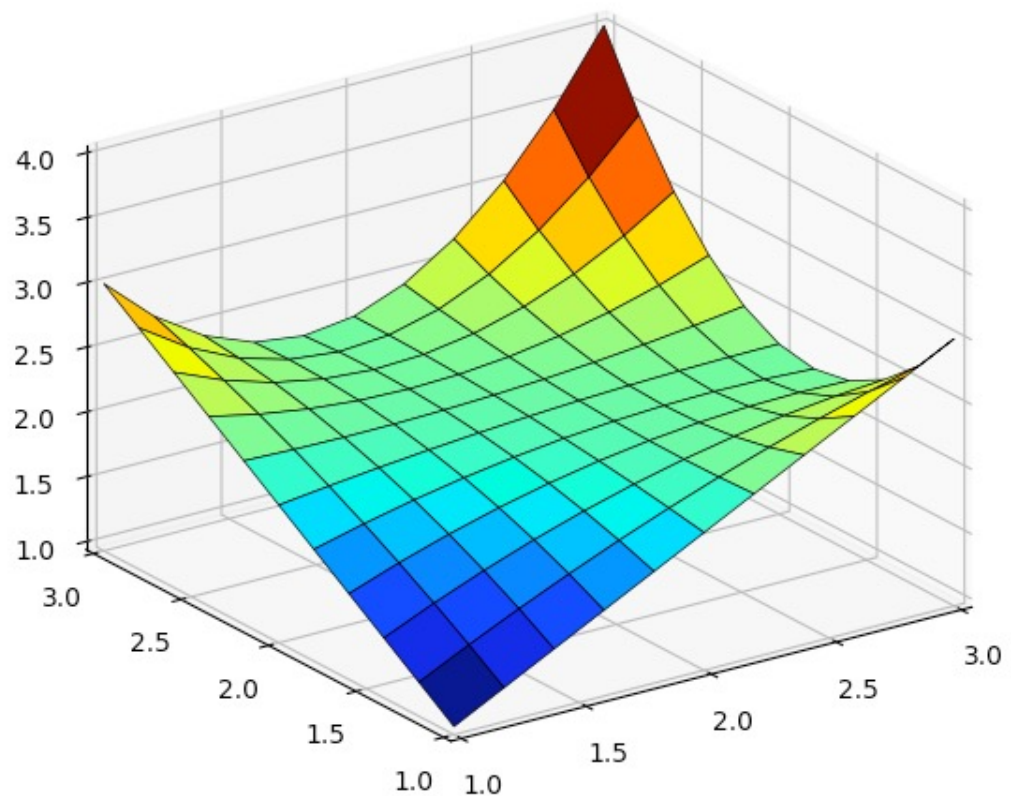
$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

$$S_q \leq s \leq S_{m-q}$$

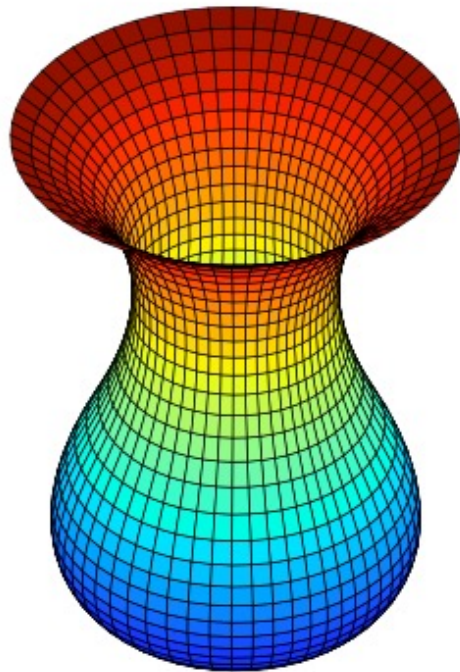
$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1, 1, 1) & (2, 1, 2) & (3, 1, 3) \\ (1, 2, 2) & (2, 2, 3) & (3, 2, 1) \\ (1, 3, 3) & (2, 3, 1) & (3, 3, 4) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Example



Un exemple

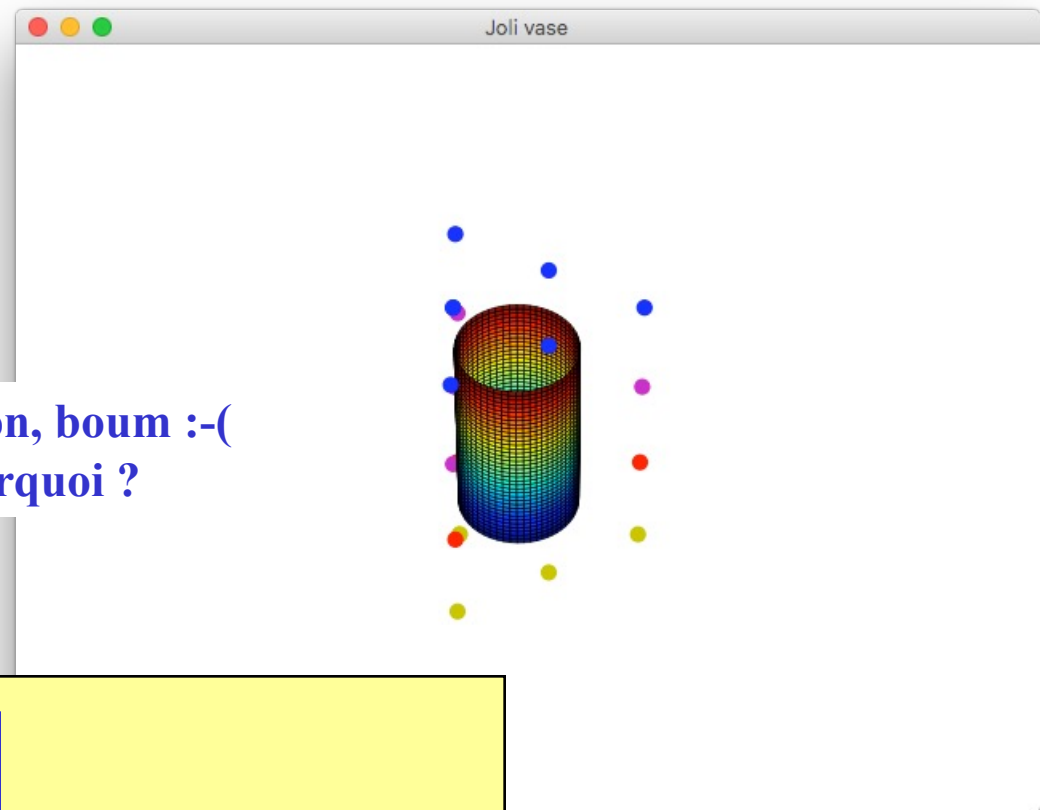


Potiche
avec
seulement
24 points
de contrôle

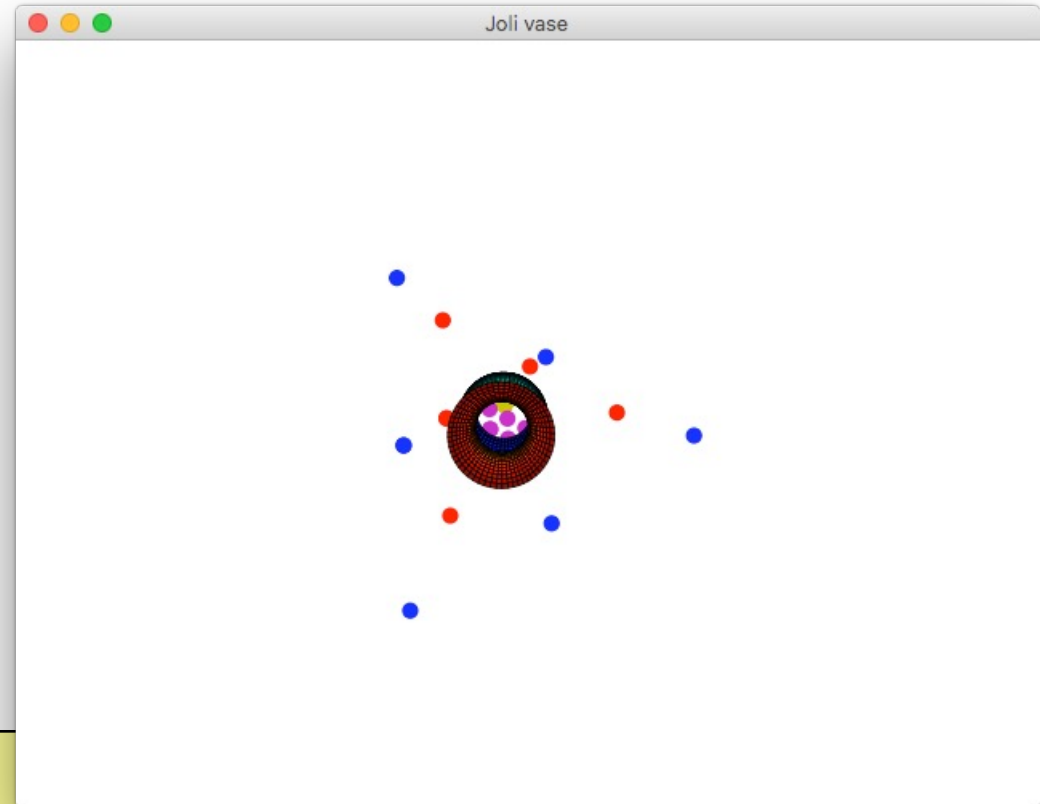
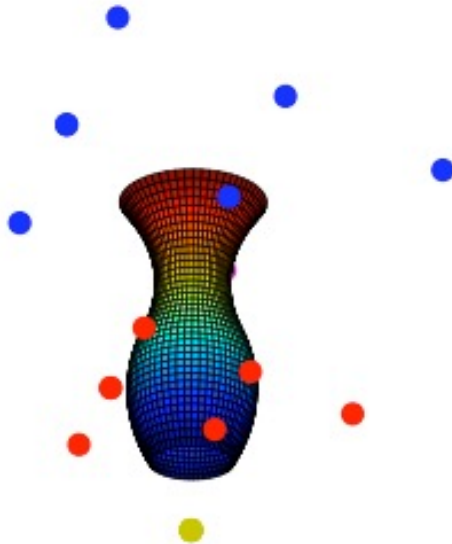
Commençons
par un
cylindre...

Sinon, boum :-(
Pourquoi ?

T = [-2,-1,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [5,5,5,5]
H = [0,5,10,15]

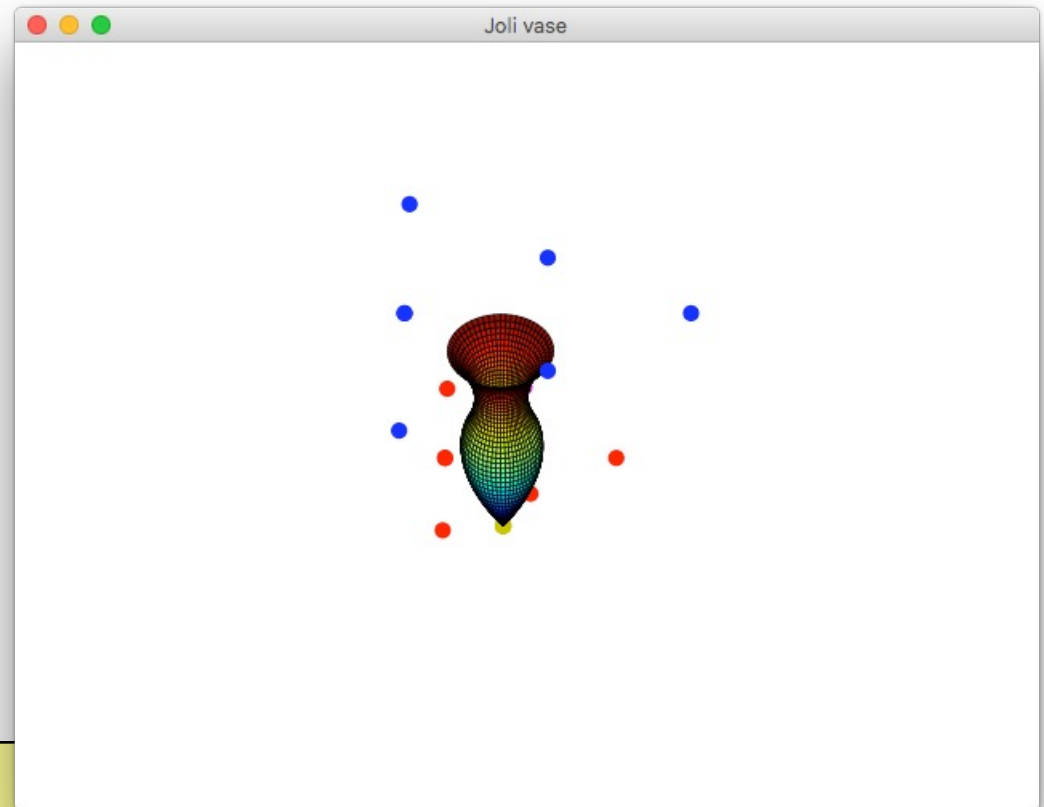
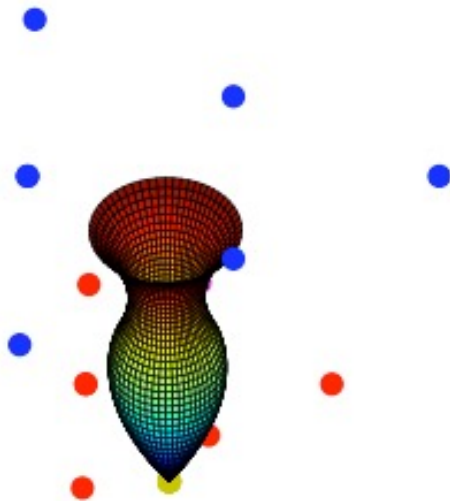


Modifions les rayons...



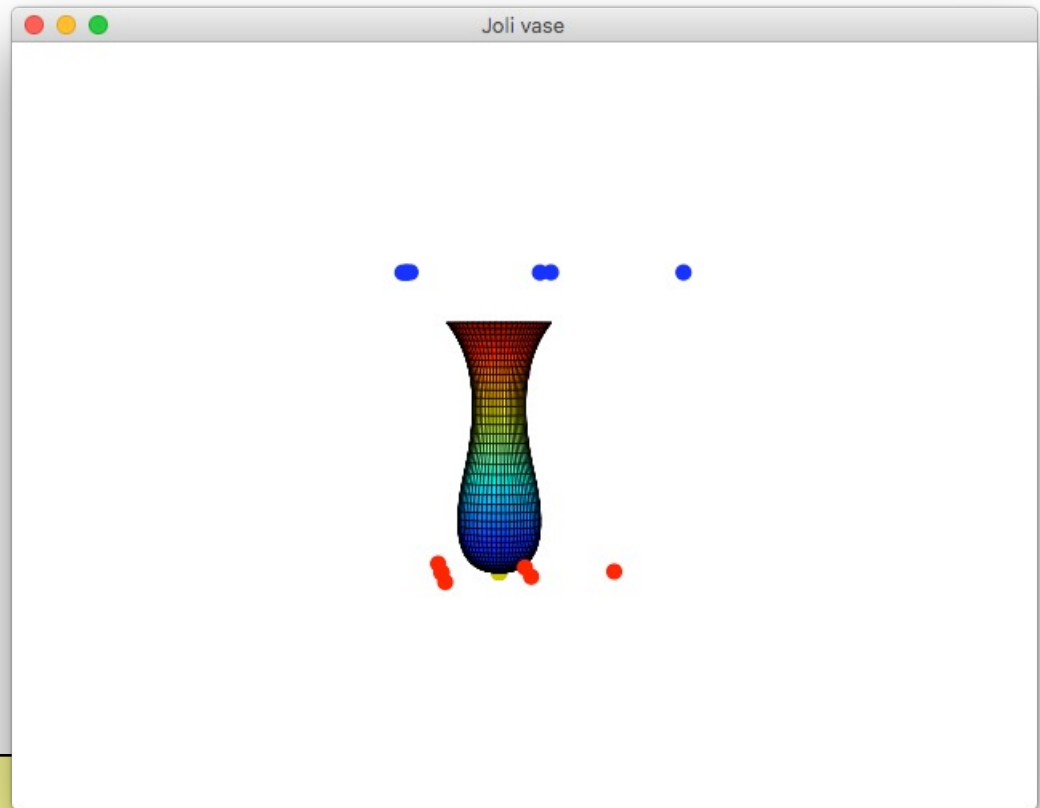
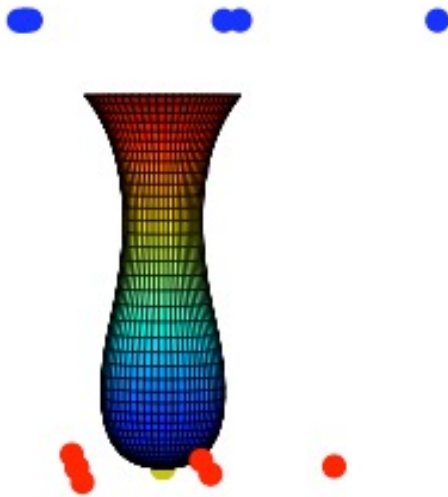
```
T = [-2,-1,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,5,10,15]
```

Refermons le fond du vase...



```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,5,10,15]
```

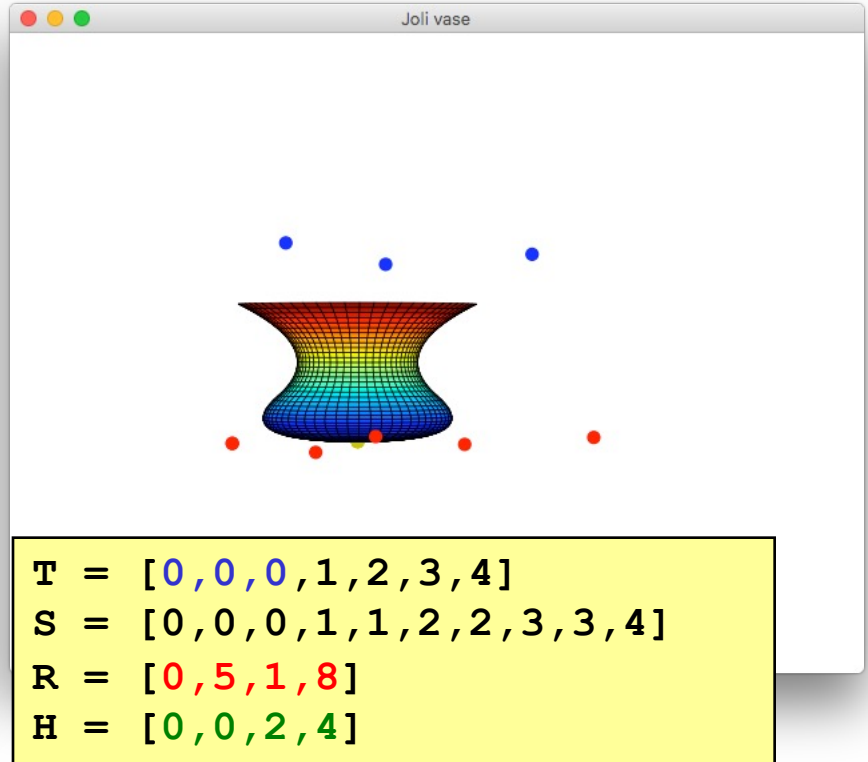
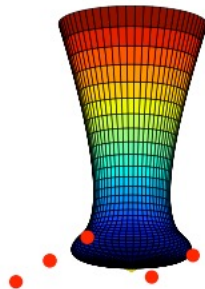
Rendons le fond plat...



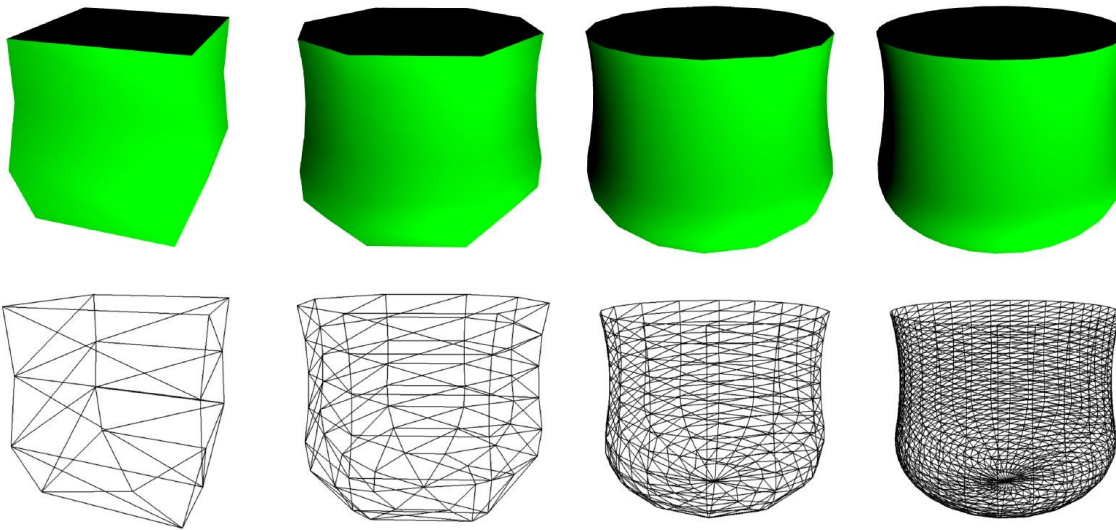
```
T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,0,10,15]
```

Et d'autres potjes ?

T = [0,0,0,1,2,3,4]
S = [0,0,0,1,1,2,2,3,3,4]
R = [0,5,1,8]
H = [0,0,2,15]



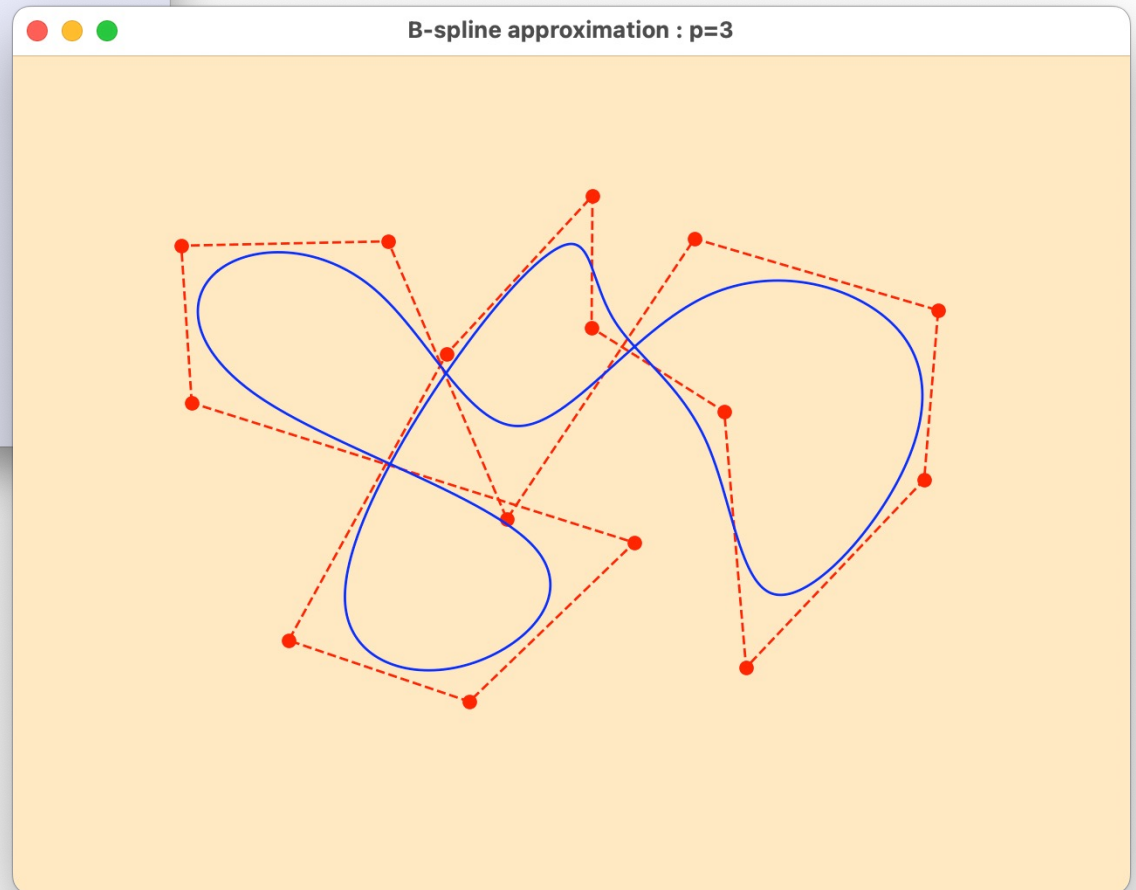
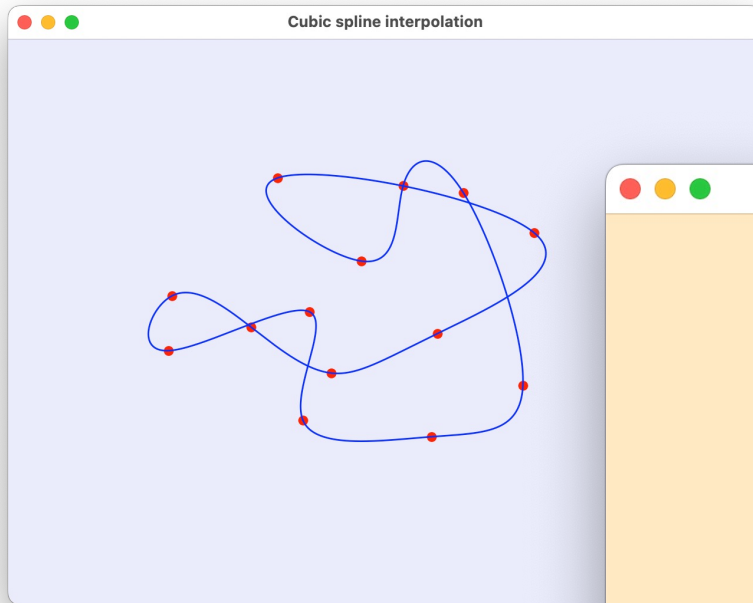
Représentation adéquate de potiches par des facettes planes...



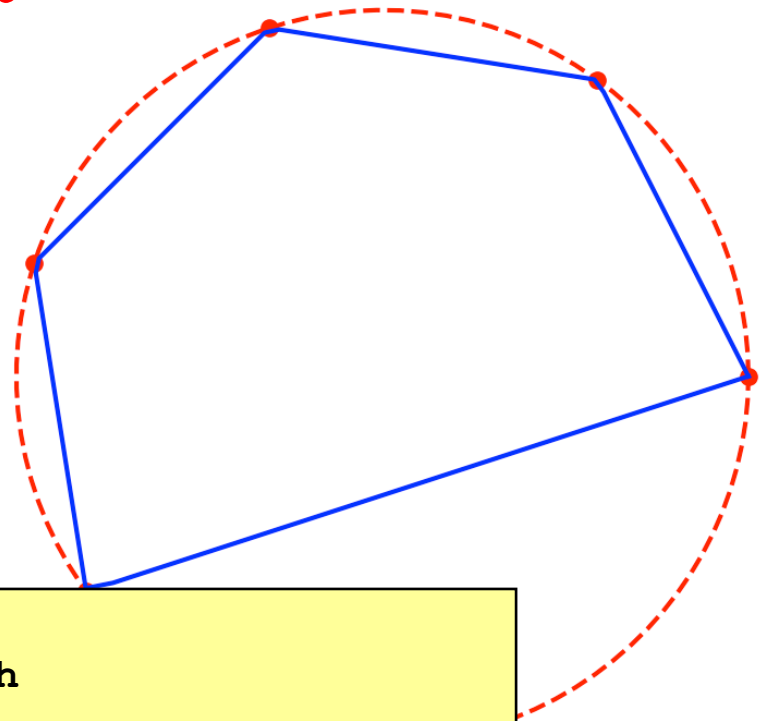
2 triangles par patch

128 triangles par patch

Python 2 and 3 for dummies !



Again, a large part
of the job
is done !



```
def spline(x,h,U):  
    n = size(U); X = arange(0,n+1)*h  
  
    i = zeros(len(x),dtype=int)  
    for j in range(1,n):  
        i[X[j]<=x] = j  
    U = append(U,U[0])  
  
    return U[i]*(X[i+1]-x)/h + U[i+1]*(x-X[i])/h
```