Journée des droits des femmes

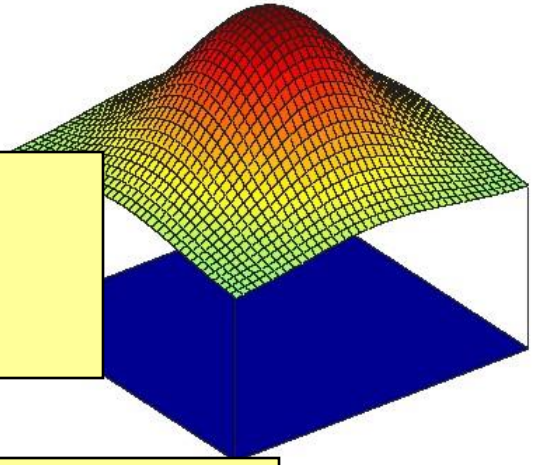
Margaret Heafield Hamilton, née le 17 août 1936,
est une informaticienne et ingénieure système.
Elle était directrice du département software engineering
qui conçut le système embarqué du programme spatial Apollo

https://www.youtube.com/watch?v=4sKY6_nBLG0

Journée des droits des femmes

Comment communiquer en écrivant
des textes lisibles et inclusifs
en n'invisibilisant pas les femmes
et les personnes non-binaires…

Plan du cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non linéaires ?

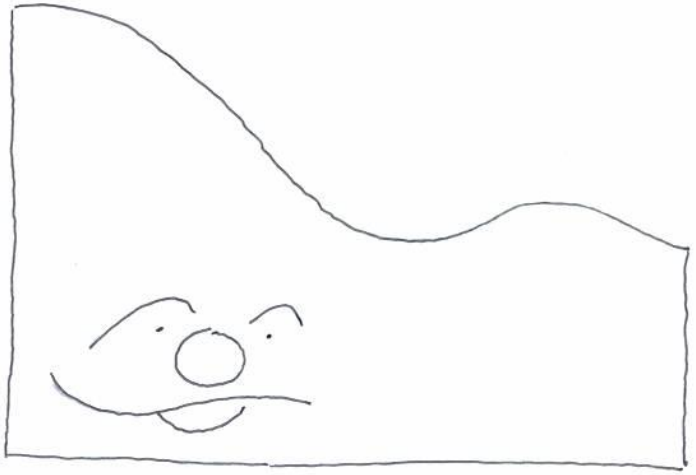
Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Une surface à intégrer….



Comment l'intégrer sur un ordinateur ?

Intégration numérique

Quadrature :

On estime l'intégrale définie I en effectuant une somme pondérée des valeurs $u(X_i)$

$$I = \int_a^b u(x)\,dx$$

Abscisses d'intégration calculées a priori

$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i)$$

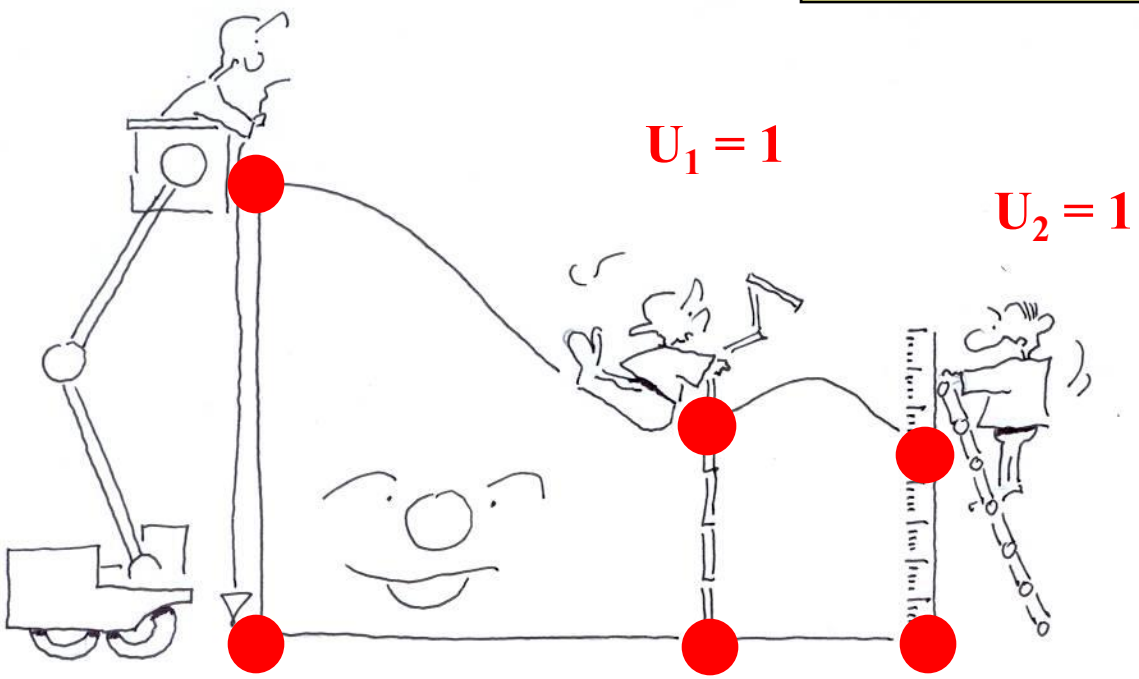
Poids calculés a priori

$$E^h = I - I^h$$

Prise de mesures…

Si $X_0 = a$ et $X_n = b$, méthode fermée
Sinon, méthode ouverte

$U_0 = 2$



$U_1 = 1$

$U_2 = 1$

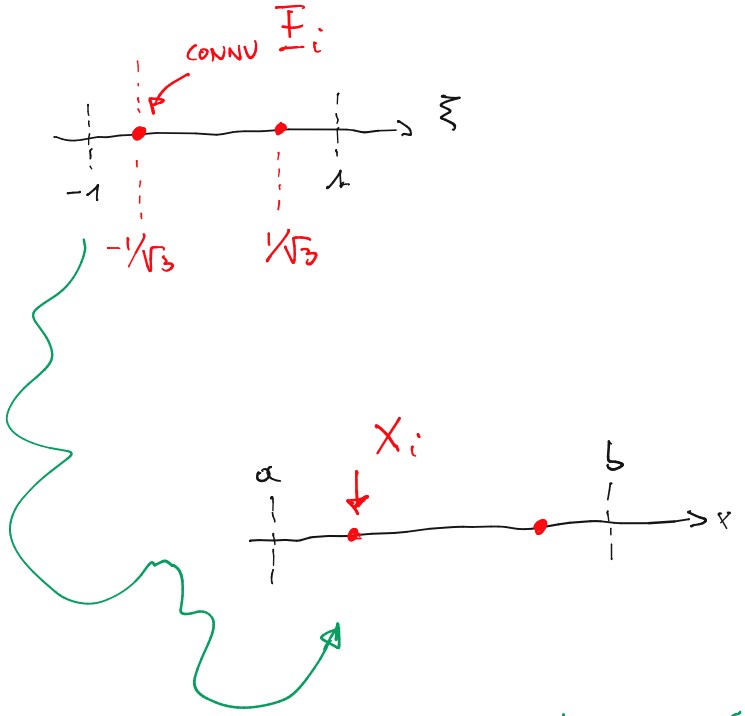
$X_0 = -1$

$X_1 = 1$

$X_2 = 2$

Standardisons !

$$I^h = \sum w_i \, f(X_i) \qquad \xi_i \in [-1\ 1]$$



AUSSI :-)

$$x(\xi) = a\,\phi_{-1}(\xi) + b\,\phi_1(\xi)$$

$\phi_{-1}(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2}$ $\qquad$ $\phi_1(\xi) = \frac{(1+\xi)}{2}$

$$= a\frac{(1-\xi)}{2} + b\frac{(1+\xi)}{2}$$

$$= \frac{(b-a)}{2}\xi + \frac{(a+b)}{2}$$

$$x(\xi) = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \xi\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\int_a^b v(x)\,dx = \int_{-1}^{1} v(\xi)\,\frac{dx}{d\xi}\,d\xi$$

$\frac{dx}{d\xi}$: JACOBIEN $\frac{(b-a)}{2}$

Simplifions, standardisons, ...

$$x(\xi) = \frac{(b-a)}{2}\xi + \frac{(b+a)}{2}$$

$$I = \int_a^b u(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(x(\xi))\frac{dx}{d\xi}d\xi = \underbrace{\int_{-1}^{1} u(x(\xi))\,d\xi}_{\approx \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(x(\Xi_i))} \frac{(b-a)}{2}$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :
Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :
Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :
Extrapolation de Richardson
Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :
ou les méthodes numériques intelligentes…

Avec l'interpolation polynomiale, tout est facile…

$$
\begin{aligned}
I &\approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)dx}^{I^h} \\
&\downarrow \\
&\approx \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} u(X_i)\phi_i(x)dx \\
&\downarrow \\
&\approx \sum_{i=0}^{m} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)dx}_{w_i}
\end{aligned}
$$

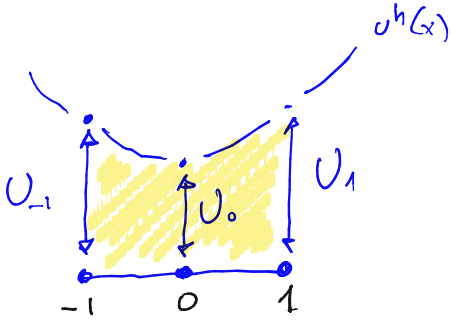
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx U_{-1} + U_1$	(méthode des trapèzes) $d = 1$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{3} U_{-1} + \frac{4}{3} U_0 + \frac{1}{3} U_1$	(méthode de Simpson) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{4} U_{-1} + \frac{3}{4} U_{-1/3} + \frac{3}{4} U_{1/3} + \frac{1}{4} U_1$	(méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{7}{45} U_{-1} + \frac{32}{45} U_{-1/2} + \frac{12}{45} U_0 + \frac{32}{45} U_{1/2} + \frac{7}{45} U_1$	(méthode de Boole) $d = 5$

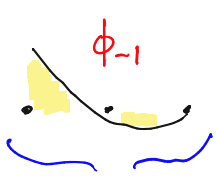
Quelques pages du grimoire de Gargamel

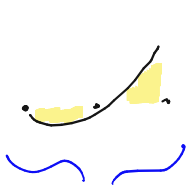
Sur l'intervalle standard…

SIMPSON

$$I^h = U_{-1}\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)x}{2} + U_0\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)(x+1)}{-1} + U_1\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)x}{2}$$







$\Sigma\ 1/3$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \left[\frac{x^3}{6}\cdots\right]_{-1}^{1}$$

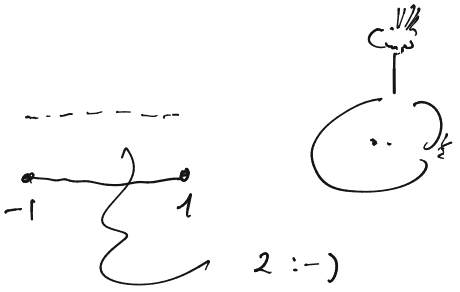
$\frac{1}{3}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{-1} + \frac{-1}{-1} = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1}$$

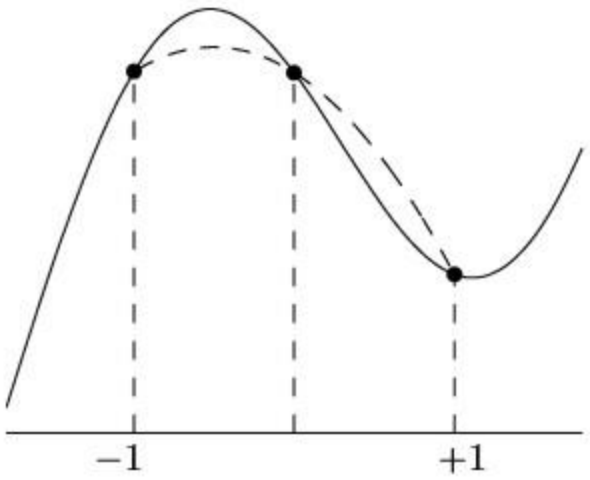
$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I^h = \frac{U_{-1} + 4U_0 + U_1}{3}$$

SANITY CHECK



Comment obtenir les formules magiques ?



$$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)dx}^{I^h}$$

$$\downarrow$$

$$\approx \sum_{i=0}^{2} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)dx}_{w_i}$$

$$\downarrow$$

En fixant $X_0 = -1$, $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$

$$\approx U(-1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\, dx}_{w_0}$$

$$+ U(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)(x+1)}{-1}\, dx}_{w_1}$$

$$+ U(1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\, dx}_{w_2}$$

Calcul des poids

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$w_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

Avec une interpolation de degré 2, on intègre exactement un polynôme de degré 3….

$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \, x^i \, dx = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j} \, x^{2j} dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \, x^{2j+1} \, dx}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n} a_i \, x^i \, dx$$

Une formule symétrique développée pour un degré n pair a un degré de précision n+1

L'intervalle d'intégration ne doit pas être symétrique !
Le changement de variable ne change en rien la précision de la méthode.

Introduisons le symbole h

Trapèzes $h = (b-a)$
Simpson $h = (b-a)/2$
Boole $h = (b-a)/4$

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right)$$

(méthode des trapèzes) $d = 1$

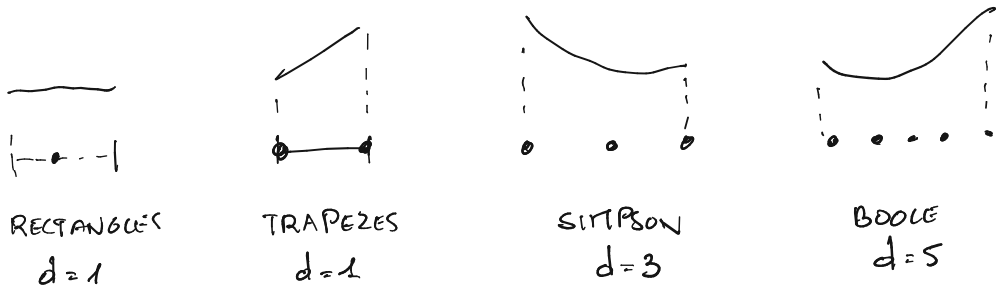
$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(U_{-h} + 4\,U_0 + U_h\right)$$

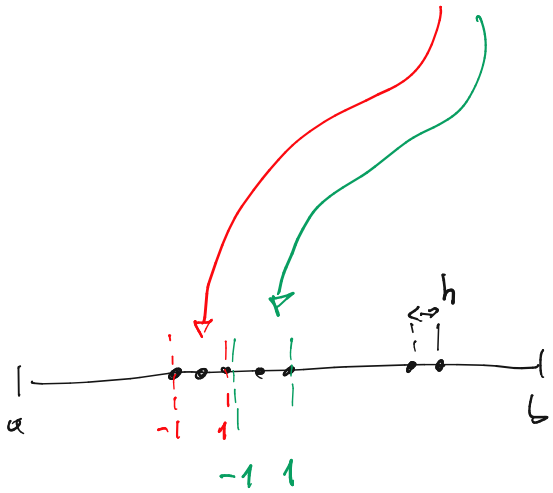
(méthode de Simpson) $d = 3$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right)$$

(méthode de Boole) $d = 5$

Méthodes composites





Méthode composite des trapèzes

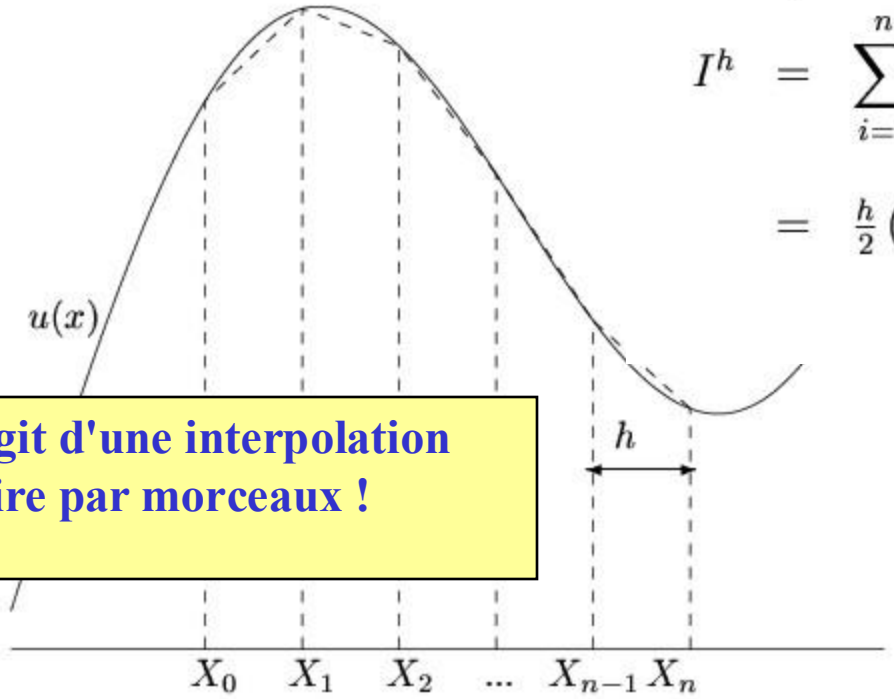
$$I = \int_{X_0}^{X_n} u(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{i-1}}^{X_i} u(x)\,dx$$

En utilisant la règle des trapèzes (2.7) pour chaque sous-intervalle

$$I^h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,(U_{i-1} + U_i)$$

$$= \tfrac{h}{2}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + \ldots + 2U_{n-1} + U_n)$$



Il s'agit d'une interpolation linéaire par morceaux !

Méthode composite de Simpson

$$I = \int_{X_0}^{X_{2n}} u(x)\,dx$$

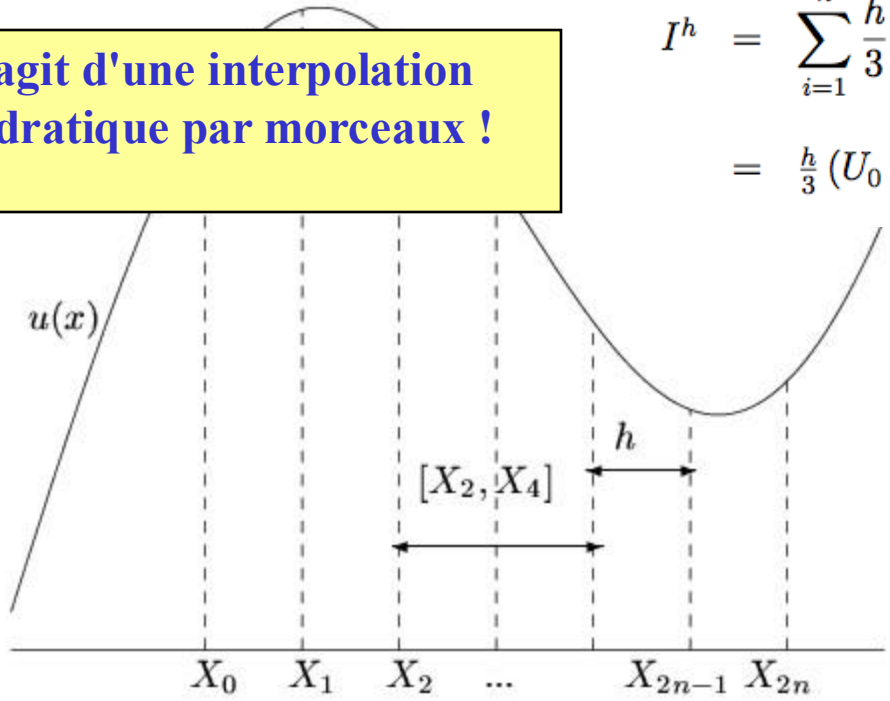
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{2i-2}}^{X_{2i}} u(x)\,dx$$

En utilisant la règle de Simpson (2.4) pour chaque sous-intervalle

$$I^h = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{3}\,(U_{2i-2} + 4\,U_{2i-1} + U_{2i})$$

$$= \frac{h}{3}\,(U_0 + 4U_1 + 2U_2 + 4U_3 + 2U_4 + \ldots + 4U_{2n-1} + U_{2n})$$

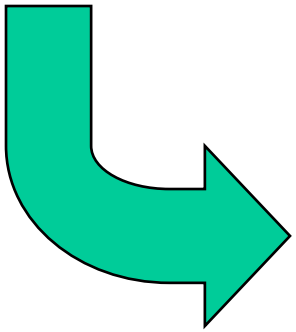
Il s'agit d'une interpolation quadratique par morceaux !



n intervalles juxtaposés de longueur 2h
2n+1 abscisses d'intégration

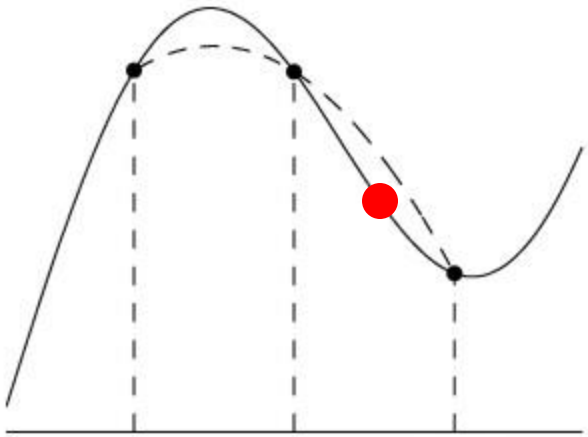
Comment estimer l'erreur d'intégration ?

Erreur de l'interpolation polynomiale $e^h(x)$



Erreur de l'intégration numérique $E^h(x)$

Simpson intègre parfaitement un polynôme de degré 3…



Erreur d'interpolation

$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

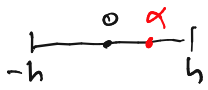
où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.

Erreur d'intégration pour Simpson !

$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.

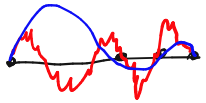
$h \to 0$
ERREUR ASYMPTOTIQUE



$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{v'''(\xi_i)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)\,dx$$

$\xi_i(x)$

SIMPLIFIONS $\xi_i(x) \simeq \xi_i$



$$\leqslant \frac{n C_4}{24} \left| \int_{-h}^{h} \underbrace{(x-h)(x+h)x^2}_{x^4 - h^2x^2}\,dx - \alpha \int_{-h}^{h} \underbrace{(x-h)(x+h)x}_{x^3 - h^2x}\,dx \right|$$

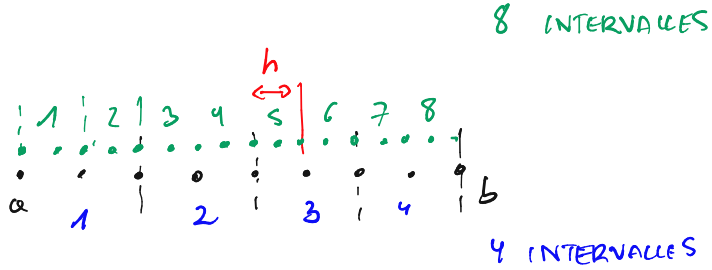
$= 0$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{h^2x^3}{3}\right]_{-h}^{h}$$

$$= h^5\left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right] = h^5\left[\frac{6-10}{15}\right] = -\frac{4}{15}h^5$$

$$\leqslant \frac{n C_4}{90} h^5$$

Ordre de précision



$$E^h \leq \frac{n\,C_4\,h^5}{90}$$

$n(h)$ $\quad \mathcal{O}(h^5)$ NEIN !

$$2nh = (b-a)$$

$$n = \frac{(b-a)}{2h}$$

$$E^h \leq \underbrace{\frac{(b-a)}{180}\,C_4\,h^4}_{\mathcal{O}(h^4)}$$

ORDRE DE PRECISION = 4

SIMPSON

DEGRE DE PRECISION = 3

$4 = 3 + 1$

Degré de précision

Ordre de précision de Simpson

$$
\begin{aligned}
E^h &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)\,dx \\
&\Big\downarrow \quad \text{En définissant } C_4 = \max_i \left|u^{(4)}(\xi_i)\right| \\
\left|E^h\right| &\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)\,dx\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h}x^2(x-h)(x+h)\,dx - \alpha\underbrace{\int_{-h}^{h}(x-h)x(x+h)\,dx}_{=0}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{h^2x^3}{3}\right]_{-h}^{h}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{90}h^5
\end{aligned}
$$

$O(h^5)$, Monsieur ?

Nenni, nein, neen : $O(h^4)$ only !

$$\leq \quad n\frac{C_4}{90}h^5$$

Car $2nh = (b-a)$ pour une méthode composite de Simpson

$$\leq \quad (b-a)\frac{C_4}{180}h^4$$

n et h sont deux paramètres liés entre eux !
En d'autres mots, n n'est pas une constante, mais une fonction de h !

n(h) = (b-a)/2h

$$|E^h| \quad \leq \quad \frac{C_4(b-a)}{180}\,h^4$$

Degré de précision = 3
Ordre de précision = 4

Combien de sous-intervalles pour obtenir une précision donnée ?

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx = \frac{h}{2}\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right) - \frac{h^3}{12}u^{(2)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{C_2(b-a)}{12}\,h^2 \qquad \text{(méthode des trapèzes)} \quad \mathcal{O}(h^2)$$

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx = \frac{h}{3}\left(U_{-h} + 4\,U_0 + U_h\right) - \frac{h^5}{90}u^{(4)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{C_4(b-a)}{180}\,h^4 \qquad \text{(méthode de Simpson)} \quad \mathcal{O}(h^4)$$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right) - \frac{8h^7}{945}u^{(6)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{2C_6(b-a)}{945}\,h^6 \qquad \text{(méthode de Boole)} \quad \mathcal{O}(h^6)$$

$$\frac{C_2}{12}\,n\,\frac{(b-a)^3}{n^3} \leq \epsilon$$

$$\sqrt{\frac{C_2(b-a)^3}{12\epsilon}} \leq n$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :
Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :
Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :
Extrapolation de Richardson
Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :
ou les méthodes numériques intelligentes…

Gauss-Legendre

$n+1$ POINTS

IL DEVRAIT ETRE POSSIBLE D'INTEGRER PARFAITEMENT UN POLYNOME DE DEGRE $2n+1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k\, p(X_k)$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i \int_{-1}^{1} x^i\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i X_k^i$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{2j} \int_{-1}^{1} x^{2j}\,dx + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \int_{-1}^{1} x^{2j+1}\,dx = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

$\int_{-1}^{1} x^{2j}\,dx = \frac{2}{2j+1}$; $\int_{-1}^{1} x^{2j+1}\,dx = 0$

CAS PARTICULIER

$n = 1$

$$\begin{cases} X_0^3 w_0 + X_1^3 w_1 = 0 & V \\ X_0^2 w_0 + X_1^2 w_1 = \frac{2}{3} & V \\ X_0 w_0 + X_1 w_1 = 0 & V \\ w_0 + w_1 = 2 & V \end{cases}$$

$2X_0^2 = \frac{2}{3}$

$X_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$w_1 = w_0 = 1$

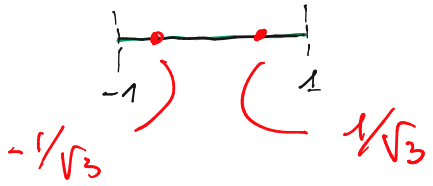
$X_0 = -X_1$

$$\frac{2}{2j+1} = \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j+1}$$

$j = 0 \ldots n$

LES EQUATIONS A RESOUDRE !



Méthodes à pas inégaux : Gauss-Legendre

Simpson sur un intervalle
Degré de précision = 3
Nombre de points = 3

$$\int_{-1}^{1} p(x)\ dx \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} w_k p(X_k)\ ,$$

Choisir des abscisses équidistantes n'est pas le meilleur choix !

↓

En développant le polynôme,

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \int_{-1}^{1} a_i\ x^i\ dx \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\ X_k^i$$

Gauss-Legendre sur un intervalle
Degré de précision = 2n+1
Nombre de points = n+1

↓

En séparant les termes pairs et impairs,

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j} x^{2j}\ dx \quad + \quad \sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j+1} x^{2j+1}\ dx \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} \quad + \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

↓

En effectuant les intégrales,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j+1)} a_{2j} \quad + \quad 0 \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} \quad + \quad \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

Calcul des abscisses de Gauss-Legendre

$$
\begin{aligned}
(X_0^3\ w_0 + X_1^3\ w_1) &= 0, \\
(X_0^2\ w_0 + X_1^2\ w_1) &= 2/3, \\
(X_0\ w_0 + X_1\ w_1) &= 0, \\
(w_0 + w_1) &= 2,
\end{aligned}
$$

$$
w_0 = w_1 = 1,
$$

$$
-X_0 = X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.
$$

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

La manière la plus efficace et la plus précise d'intégrer sur un intervalle donné (et borné!) un polynôme de degré 2n+1 dont on connaît les coefficients est d'utiliser une règle de Gauss-Legendre avec n+1 points.

Vrai ou Faux ?

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

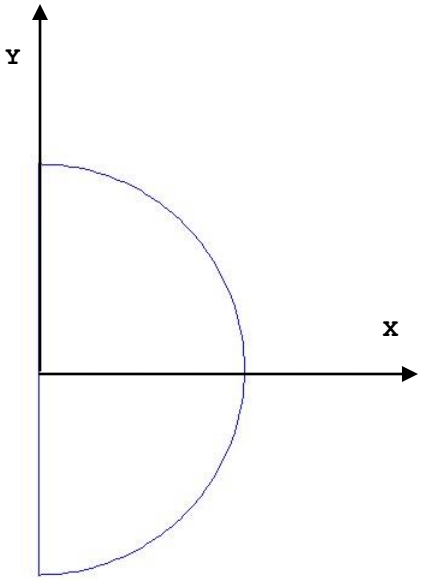
Evaluation S7 : vrai ou faux…

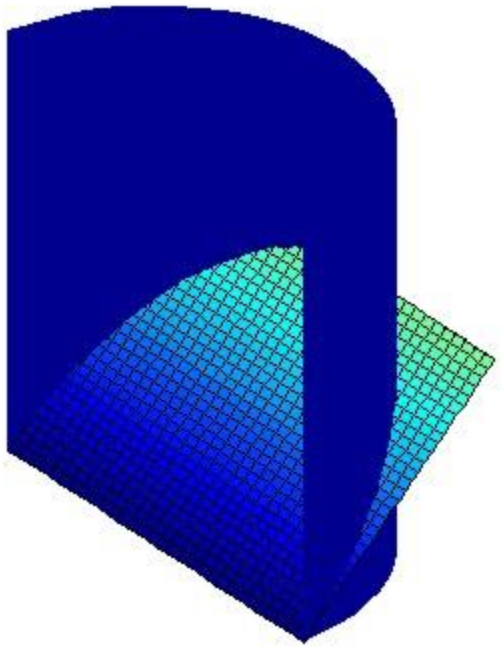
Un petit exemple en 2D…

Quelle est la valeur de l'intégrale double

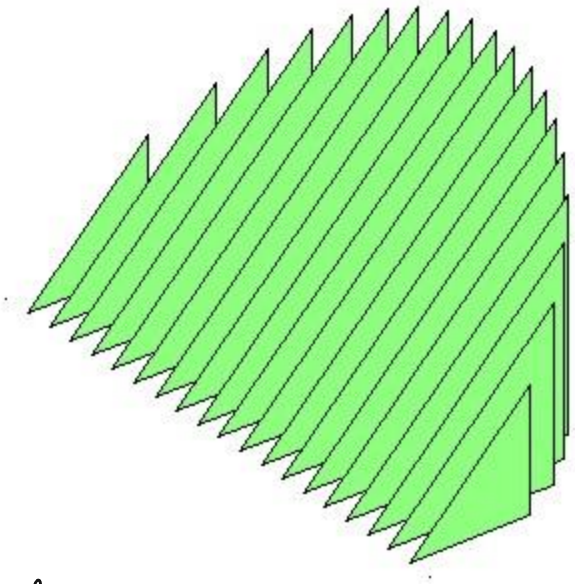
$$I = \int_D x \, dx \, dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$?





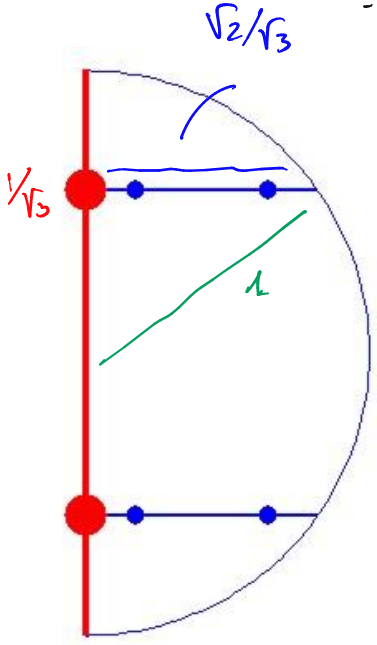
D'abord les x, puis les y…



$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \, dy$$

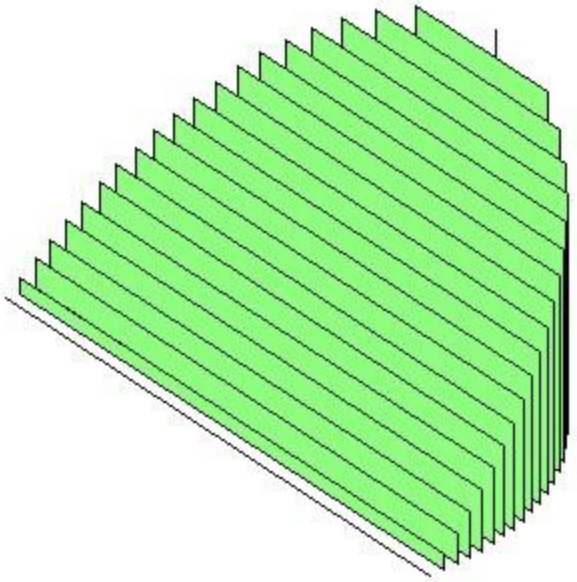
$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\ }}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$I_h = 2 \, \frac{1}{2} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

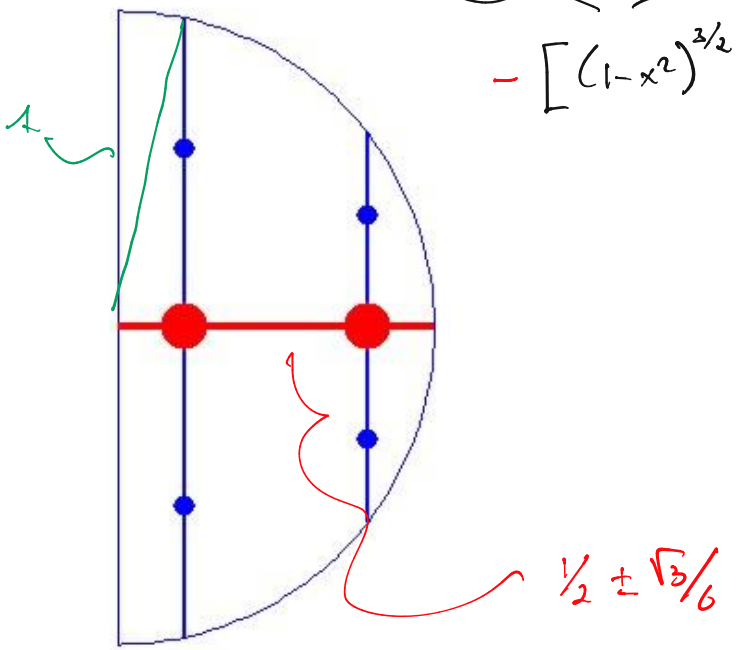
D'abord les y, puis les x…



$$I = \int_0^1 x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx$$

$$= -\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$-\left[(1-x^2)^{3/2}\frac{2}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



$$I^h = 0{,}69 \simeq \frac{2}{3}$$

D'abord les x puis les y…

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

↓

En intégrant le long de x pour chaque y

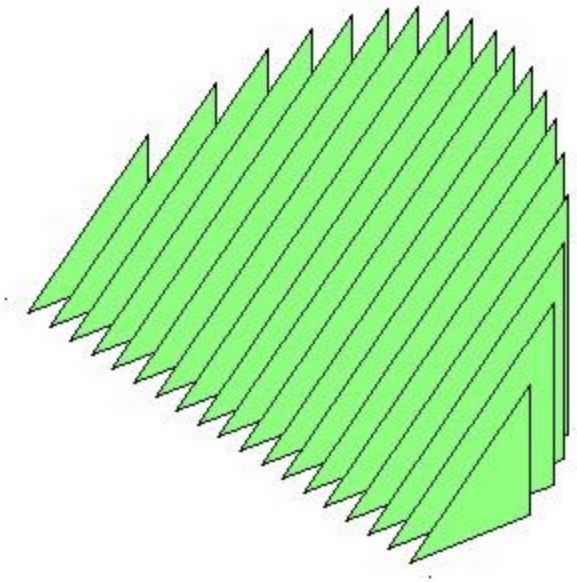
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

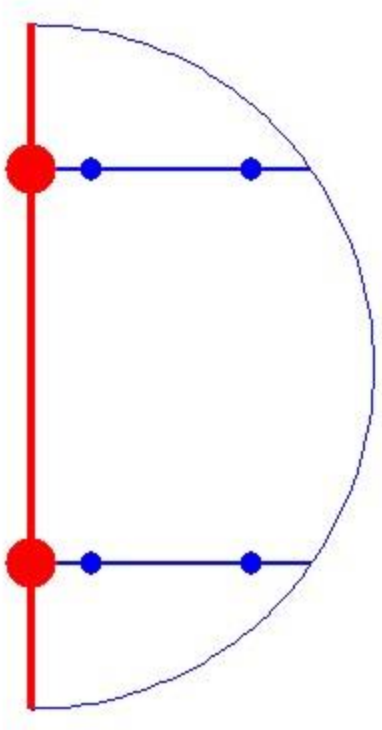
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy$$

↓

En intégrant le long de y

$$= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_{y=-1}^{y=1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

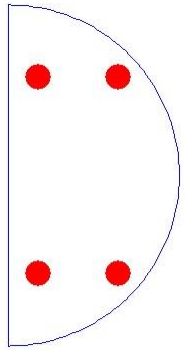




…et numériquement ?

$$I = \boxed{\text{Surface du triangle en } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}} + \boxed{\text{Surface du triangle en } y = +\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}$$



D'abord les y, puis les x…

$$I = \int_0^1 x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

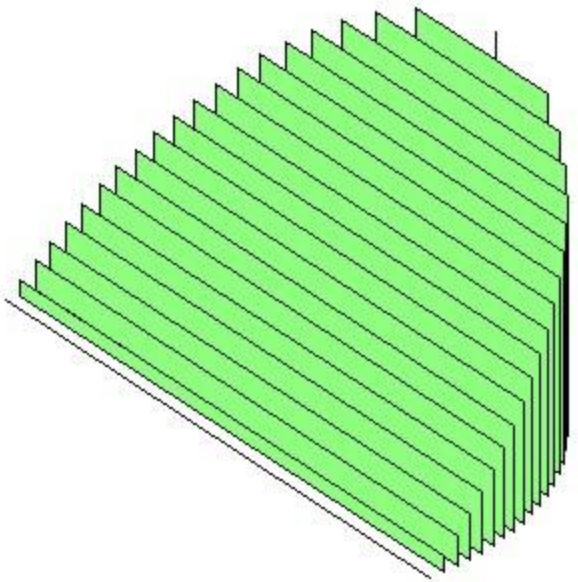
En intégrant le long de y pour chaque x

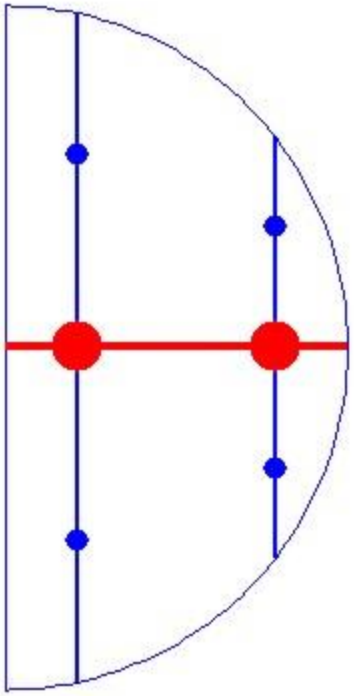
$$= \int_0^1 x \left[y \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

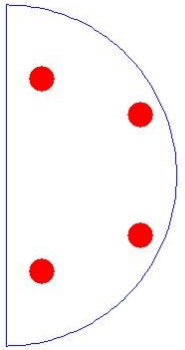
En intégrant le long de x

$$= \left[\frac{-2}{3} \left(1-x^2\right)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$$





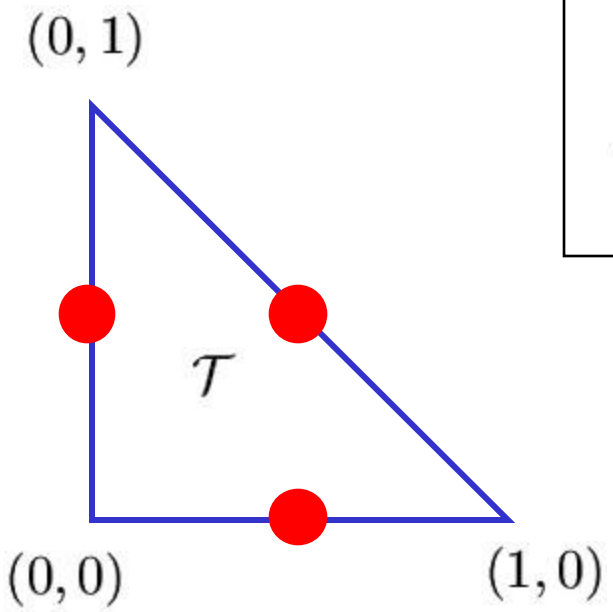
…et numériquement ?



$$I = \frac{1}{2}\left(\boxed{\text{Surface du rectangle en } x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}} + \boxed{\text{Surface du rectangle en } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.6914 \simeq \frac{2}{3}$$

Intégration sur un triangle : Règle de Hammer à 3 points



$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x,y)\ dx\ dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{3} w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}$$

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

Interrogation (mai 2003)

Démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux : $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$

Question

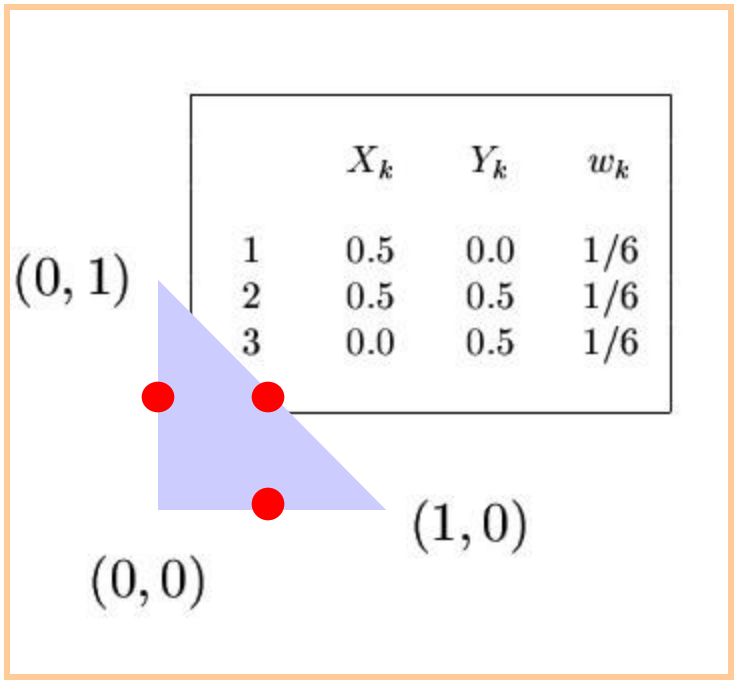
$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2} + b\int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\, dx + c\int_0^1 y \int_0^{1-y} dx\, dy \\
&\quad + d\int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy\, dx + e\int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} dx\, dy + f\int_0^1 x \int_0^{1-x} y\, dy\, dx \\
&= \frac{a}{2} + b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + c\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&\quad + d\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + e\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + f\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24} \\
&= I^h
\end{aligned}
$$

□

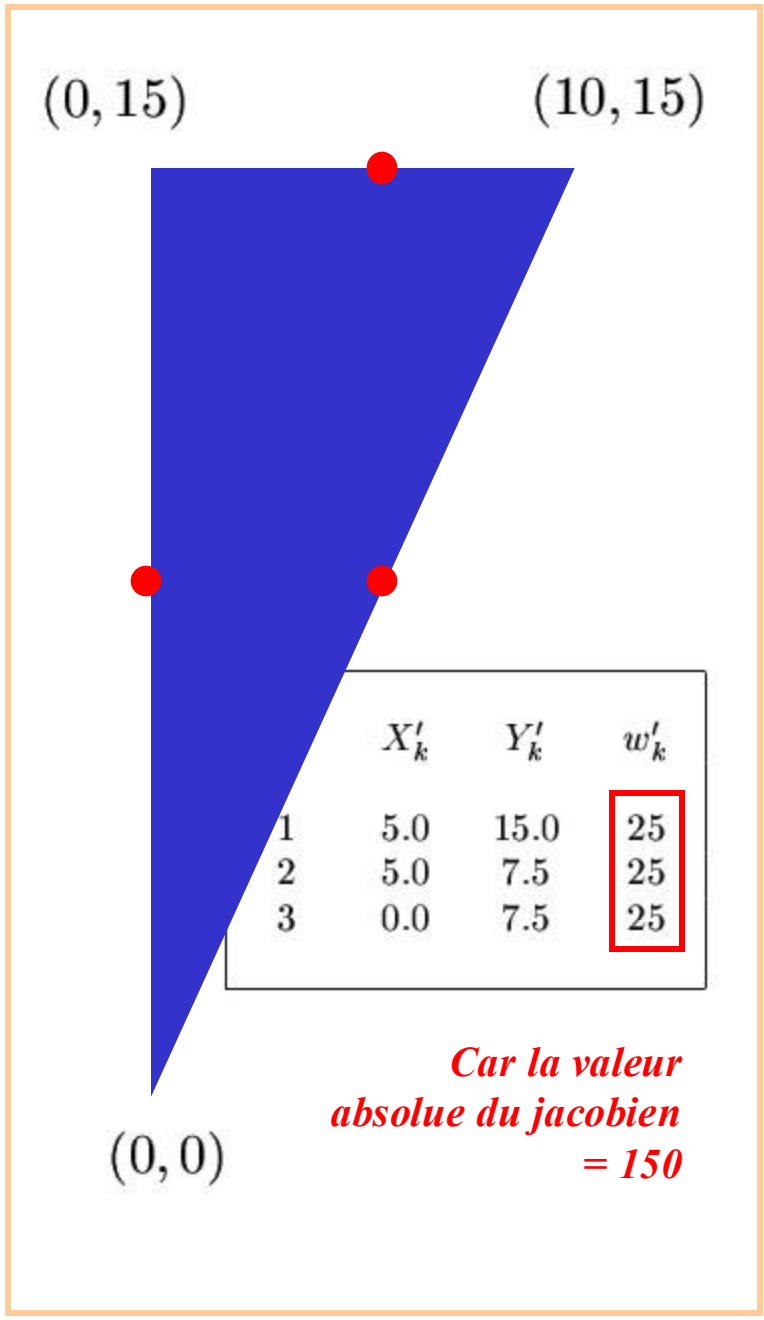
Degré de précision

Et un autre triangle ?

$$\begin{aligned} x' &= 10x \\ y' &= 15 - 15y \end{aligned}$$



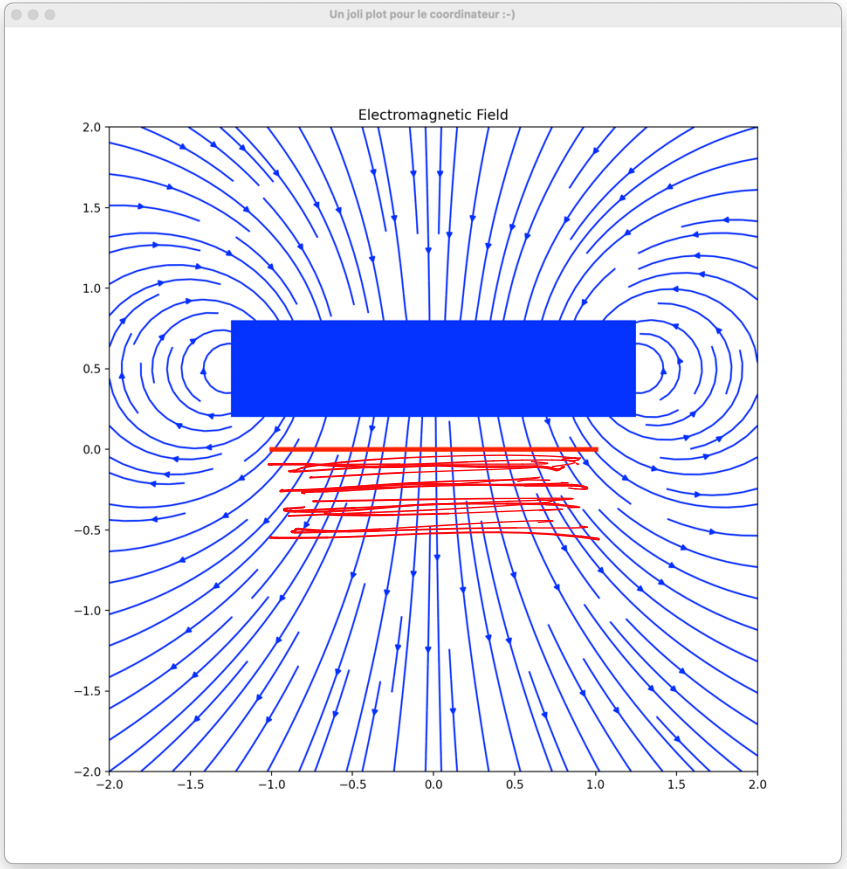
	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6



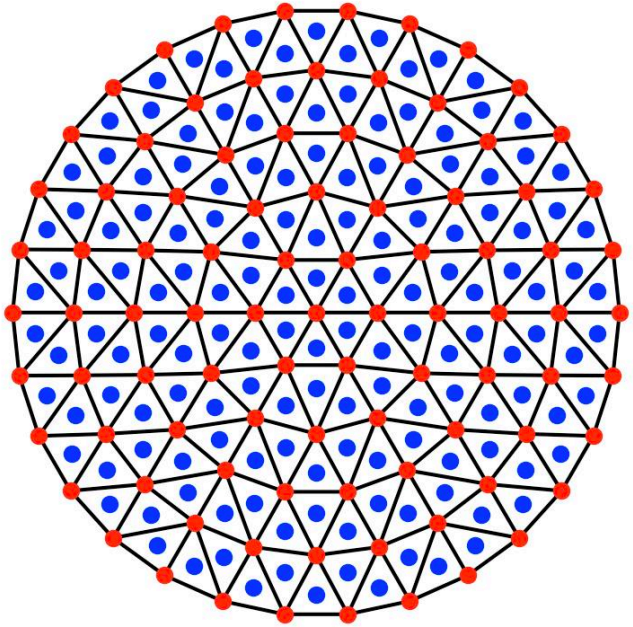
	X'_k	Y'_k	w'_k
1	5.0	15.0	25
2	5.0	7.5	25
3	0.0	7.5	25

Car la valeur absolue du jacobien = 150

Un petit mot sur le devoir…

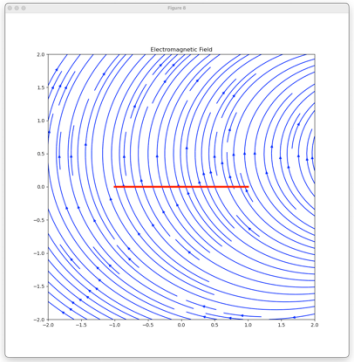


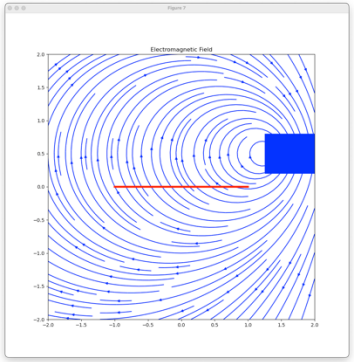
Obtenir le champs magnétique…

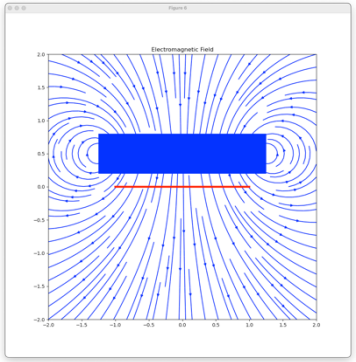


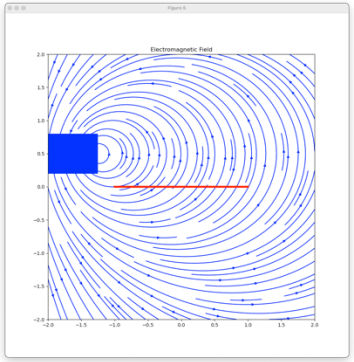
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\boldsymbol{\mu}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}\right]$$

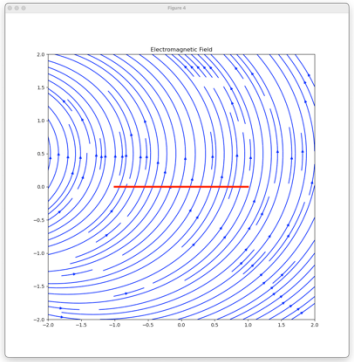
Déplaçons le petit aimant…



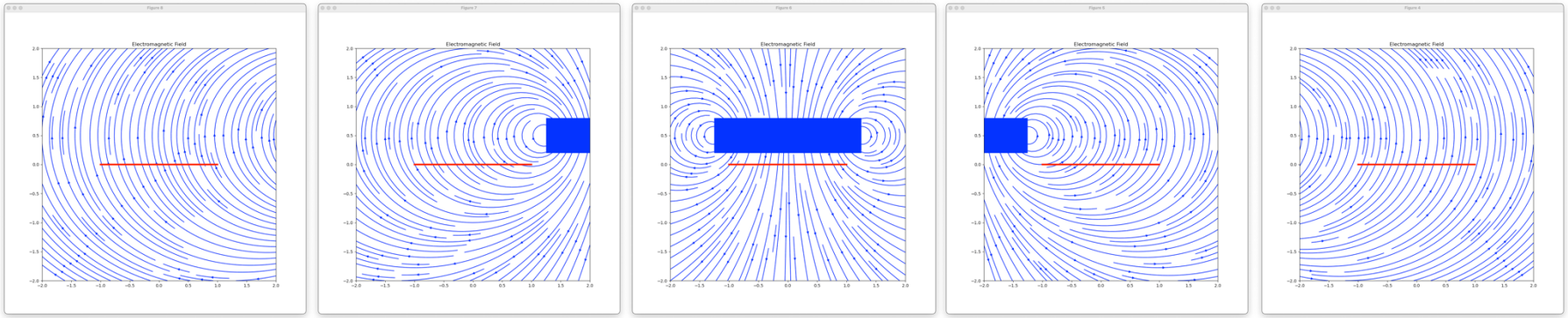








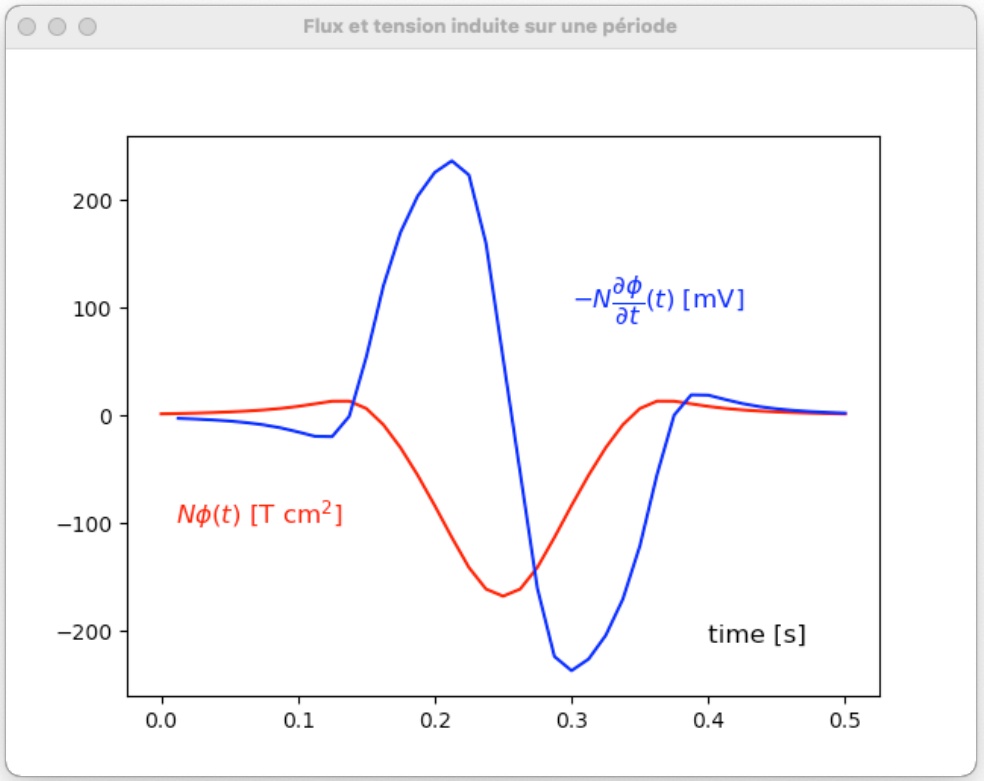
… et calculons le flux !



$$\phi(t) = \int_{\Omega_b} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_z \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_b} B_z(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega i} B_z(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

En utilisant une méthode de Hammer avec un point :-)

$$\approx \quad \sum_{i=0}^{n} B_z(\mathbf{X}_i) \, \Delta_i$$



Et prédire la tension induite dans la bobine…

$$V_L = -N\frac{d\phi}{dt}(t)$$