A quoi cela sert
les méthodes numériques ?

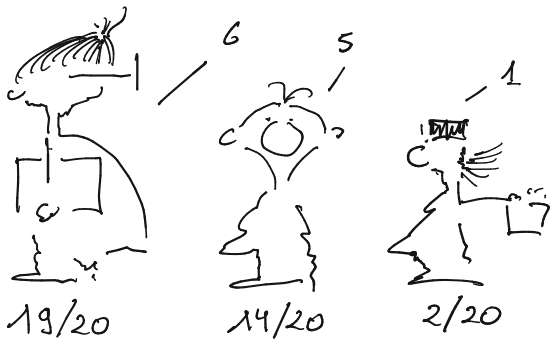
Quelques mots sur l'exploitation de mesures expérimentales…

Mesure du poids avec une estimation de l'erreur
Mesure du volume avec une estimation de l'erreur

Comment combiner au mieux ces mesures ?

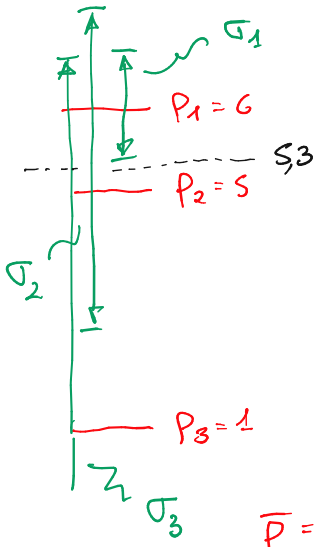
```
Vol     = array([   10,   8,   8,  10,   99])
ErrVol  = array([    5,   2,   5,   1,    2])
Mass    = array([ 29.1,25.7,22.2,27.5,266.0])
ErrMass = array([  0.1, 0.1, 0.1, 0.1,  0.1])

Rho = Mass / Vol
ErrRho  = (ErrMass * Vol + ErrVol * Mass)/ (Vol*Vol)
VarRho  = ErrRho*ErrRho
```

Groupe 1869



19/35 | 14/35 | 2/35

$$\frac{19\times 6 + 14\times 5 + 2\times 1}{35} = 5.3 \quad :-)$$



$$\bar{p} = \sum \alpha_i p_i$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2$$

VARIANCE

$$p(M,V) = \frac{M}{V}$$

$$dp = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial M}}_{1/V} dM + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial V}}_{-M/V^2} dV$$

$$\boxed{|dp| = \frac{1}{V^2}(V|dM| + M|dV|)}$$

COMMENT MINIMISER $\bar{\sigma}$?

$$\sum \alpha_i = 1$$

ESTIMATION SANS BIAIS

$$\boxed{\alpha_i = \frac{1/\sigma_i}{\sum(1/\sigma_i)}}$$

ECART TYPE = 15

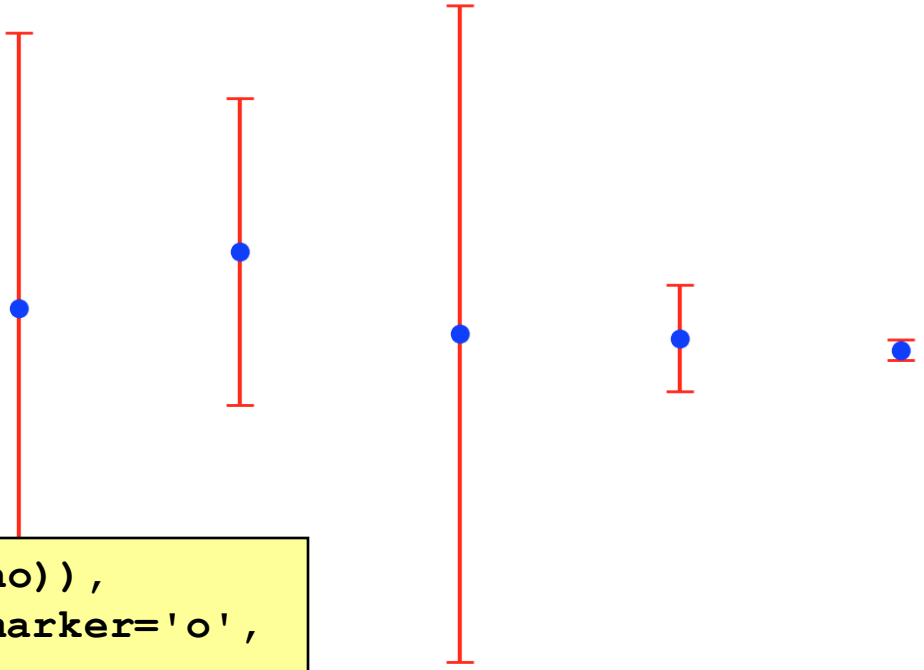
MOYENNE DE 500 MESURES $\quad \bar{\sigma} = 15/\sqrt{500} = 0.43$

10 MESURES $\quad \bar{\sigma} = 15/\sqrt{10} = 4,75$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sum \sigma_i^2 \alpha_i^2} = 15\sqrt{\sum \alpha_i^2}$$

$$= 15\sqrt{500\left(\frac{1}{500}\right)^2} = 15/\sqrt{500}$$

Toutes les mesures n'ont pas la même précision…



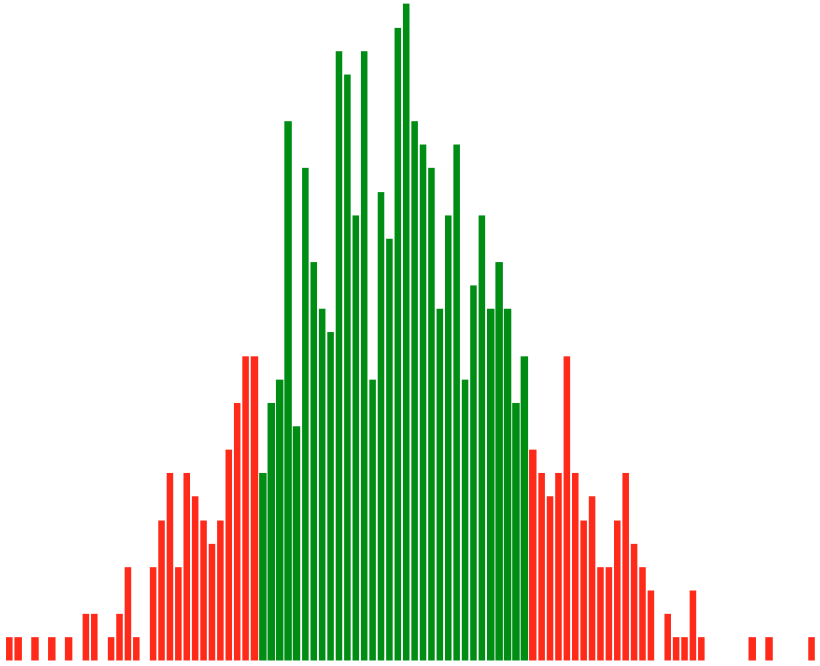
```
plt.errorbar(arange(len(Rho)),
 Rho,ErrRho,linestyle='',marker='o',
 markerfacecolor='blue',
 markeredgecolor='blue',
 color='red',capsize=5)
```

Et pourtant, la donnée la plus imprécise permettra d'améliorer la précision de la meilleure donnée, si, si !

Faisons plein de mesures virtuelles…

```
r = 500 + 15*randn(800)
plt.hist(r,100)
```

66% des mesures tombent dans l'intervalle [485,515] !



numpy.random.randn

numpy.random.randn(*d0, d1, ..., dn*)

Return a sample (or samples) from the "standard normal" distribution.

If positive, int_like or int-convertible arguments are provided, randn generates an array of shape `(d0, d1, ..., dn)`, filled with random floats sampled from a univariate "normal" (Gaussian) distribution of mean 0 and variance 1 (if any of the d_i are floats, they are first converted to integers by truncation). A single float randomly sampled from the distribution is returned if no argument is provided.

This is a convenience function. If you want an interface that takes a tuple as the first argument, use numpy.random.standard_normal instead.

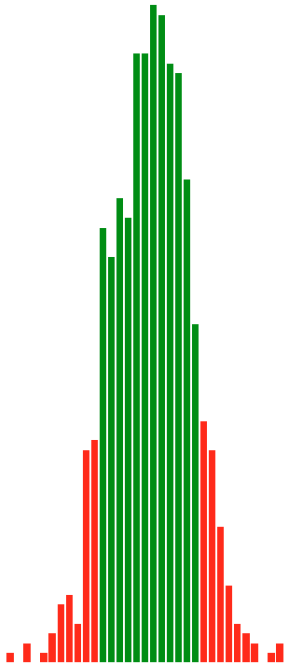
Que vaut l'écart type de la moyenne de n mesures ?

66% de la moyenne de 10 mesures tombent dans l'intervalle [495,505] !

```
Effectuons 800 mesures avec un écart de 15
Moyenne                        :    499.9263731
Ecart type de la moyenne :      0.5303301
```

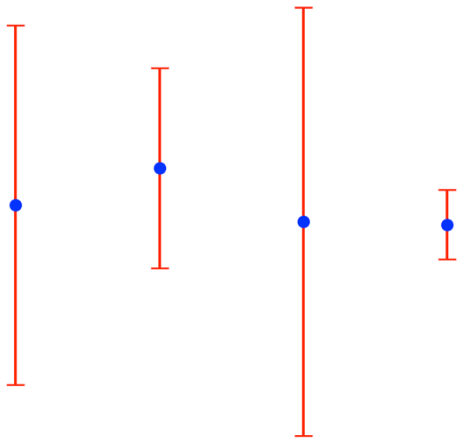
```
print('Ecart type de la moyenne : %14.7f ' 
        % (15/sqrt(800)))
```

```
r = zeros(800);
for i in range(10):
   r = r + 500 + 15*randn(800)
r = r/10
```



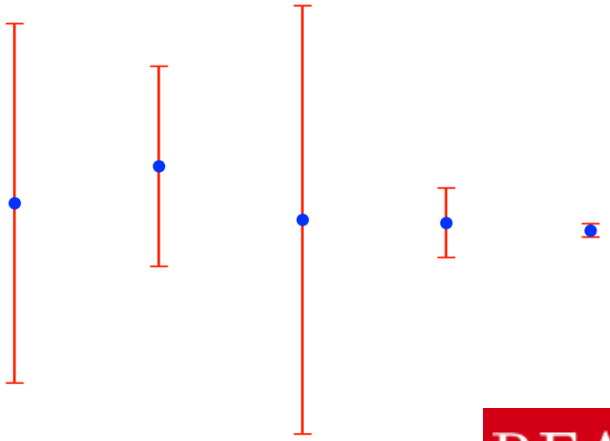
Comment mesurer au nanomètre avec une simple latte ?

```
Mesure 0 et écart type                 :      2.9100000 (1.4650000)
Mesure 1 et écart type                 :      3.2125000 (0.8156250)
Mesure 2 et écart type                 :      2.7750000 (1.7468750)
Mesure 3 et écart type                 :      2.7500000 (0.2850000)
Mesure 4 et écart type                 :      2.6868687 (0.0552903)
Meilleure estimation et écart type     :      2.6918441 (0.0540956)
```

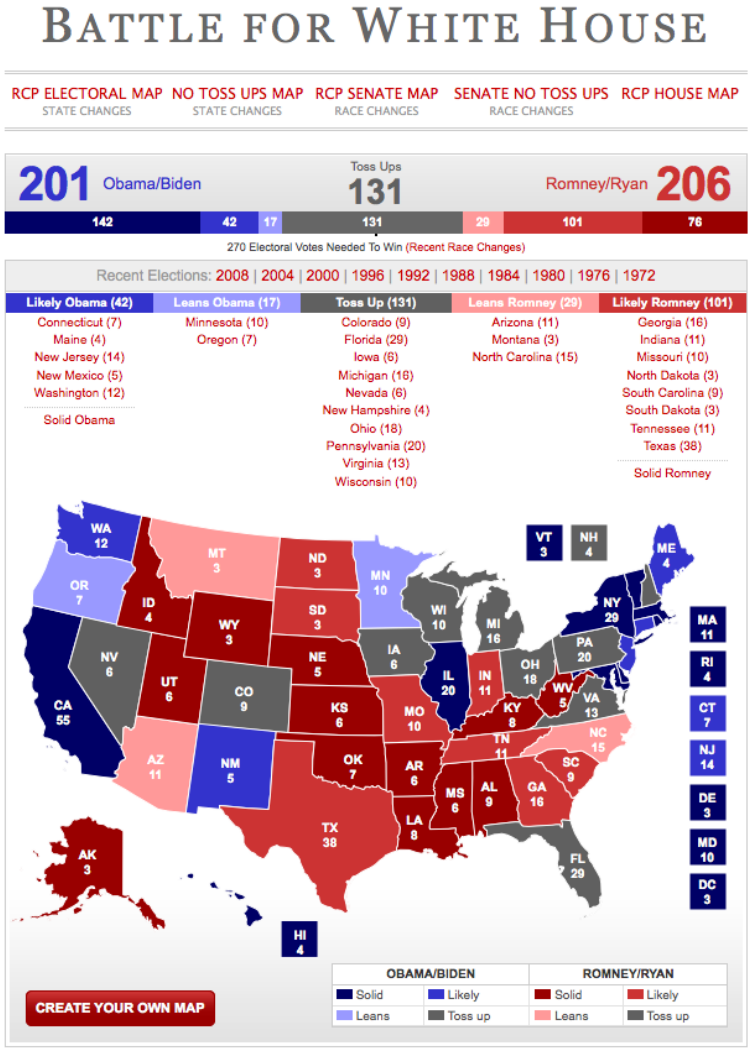


```
VarRho  = ErrRho*ErrRho
coeff = 1 / (VarRho)
coeff = coeff / sum(coeff)
BestEstimate = coeff @ Rho
VarBestEstimate = (coeff*coeff) @ VarRho
EcartBestEstimate = sqrt(VarBestEstimate)
```

Comment combiner des sondages un peu imprécis ?



REAL CLEAR POLITICS



Et en méthodes numériques…

OUI :-)

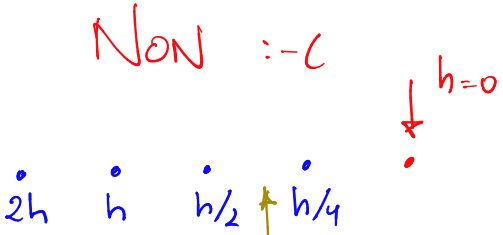
MODELES CLIMATIQUES

OUI

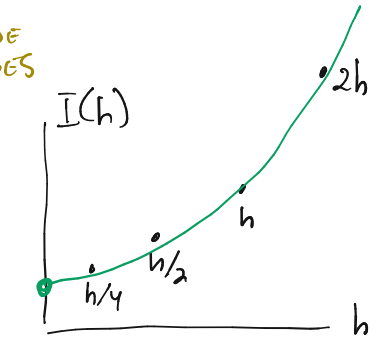
CELA SE RECHAUFFE !

ON SUPPOSE QUE LES MODELES "INDEPENDANTES"

NON :-(



CLAUDE OETSOES

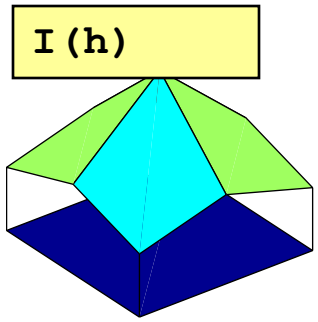


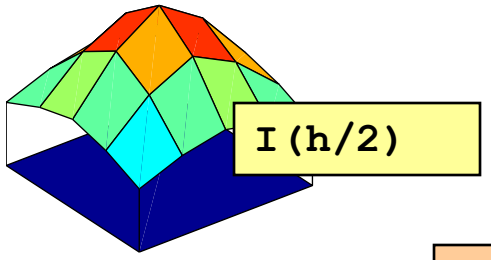
h=0

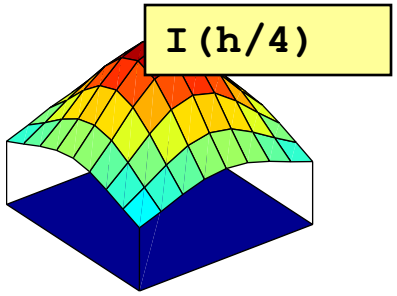
I(0) ... C'EST LE RESULTAT PARFAIT !

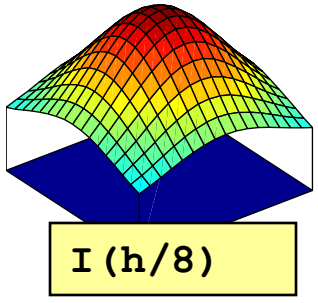
TOUS LES CALCULS SONT BASES SUR LA MEME METHODE

Pourrait-on utiliser la même idée pour les calculs numériques ?







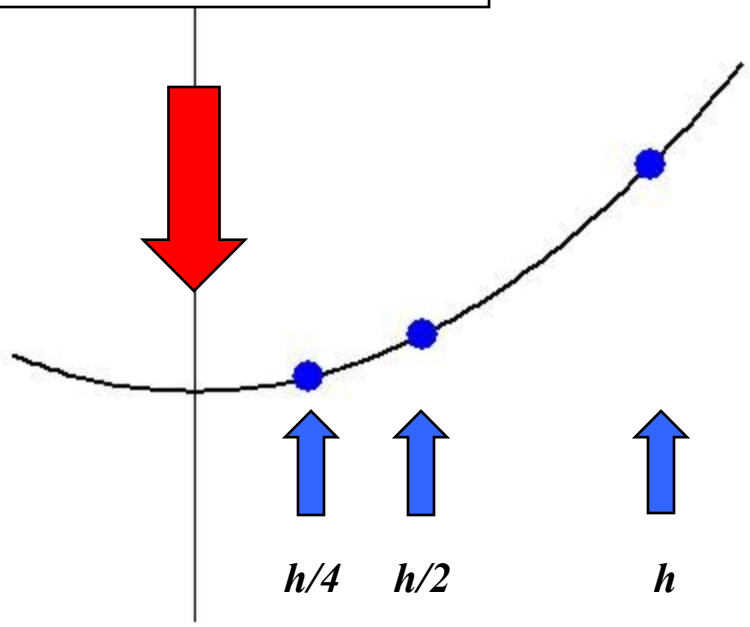


Est-il possible d'effectuer une combinaison linéaire de ces quatre valeurs numériques de l'intégrale afin d'obtenir une approximation encore plus précise que la valeur obtenue avec le plus petit pas ?

Extrapolation de Richardson

$$f(\frac{h}{2^i}) \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Comment estimer f(0) ?



Extrapolation de Richardson

PETIT TRES PETIT

$$-1\ f(h) = -1\ f(0) + -1\ h f'(0) + -1\ \frac{h^2}{2} f''(0) + -1\ \frac{h^3}{6} f'''(0)$$
$$2\ f(h/2) = 2\ f(0) + 2\ \frac{h}{2} f'(0) + 2\ \frac{h^2}{8} f''(0) + 2\ \frac{h^3}{48} f'''(0)$$

8×6

$$f''(0)\left[\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}\right] = -\frac{h^2}{4} f''$$

$$f'''\left[\frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{6}\right] = -\frac{h^3}{8} f'''$$

$$f(0) = [2 f(h/2) - f(h)] + \frac{h^2}{4} f'' + \frac{h^3}{8} f'''$$

$$-1\ f(h/2) = -1\ f(0) + -1\ \frac{h}{2} f'(0) + -1\ \frac{h^2}{8} f''(0) + -1\ \frac{h^3}{48} f'''(0)$$
$$2\ f(h/4) = 2\ f(0) + 2\ \frac{h}{4} f'(0) + 2\ \frac{h^2}{32} f''(0) + 2\ \frac{h^3}{384} f'''(0)$$

$$\left(\frac{h^2}{16} - \frac{h^2}{8}\right) \qquad \left(\frac{h^3}{192} - \frac{h^3}{48}\right)$$

$$\frac{-3h^3}{192} = -\frac{h^3}{64}$$

$$f(0) = [2 f(h/4) - f(h/2)] + \frac{h^2}{16} f'' + \frac{h^3}{64} f'''$$

$$f(0) = [2f(h/2) - f(h)] + \frac{h^2}{4} f'' + \frac{h^3}{8} f'''$$

$$f(0) = [2f(h/4) - f(h/2)] + \frac{h^2}{16} f'' + \frac{h^3}{64} f'''$$

$$\left[\frac{4}{3}\ \frac{1}{64} - \frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\right] h^3 f'''$$

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{16}$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{16}\right)$

$$4\,[\ \ ] - [\ \ ] \quad \text{(over 3)} + \frac{h^3}{48} f'''$$

Et zou !

Extrapolation de Richardson

$$f(h) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \dots$$

$$f(\tfrac{h}{2}) = f(0) + \tfrac{h}{2} f'(0) + \tfrac{h^2}{8} f''(0) + \dots$$

$$f(\frac{h}{2^i}) \qquad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Comment estimer f(0) ?

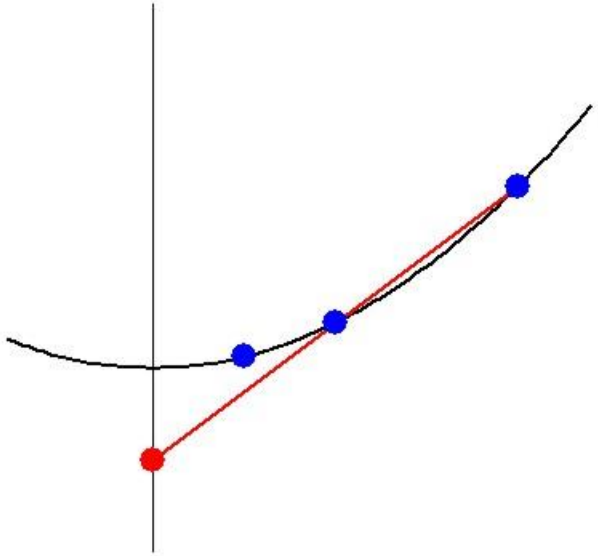
2 mesures
Elimination du terme du premier ordre

$$f(\tfrac{h}{2}) - \tfrac{1}{2} f(h) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) f(0) + \left(\tfrac{h^2}{8} - \tfrac{h^2}{4}\right) f''(0) + \dots$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) f(0) - \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \tfrac{h^2}{4} f''(0) + \dots$$

$$\downarrow$$

$$f(0) = \frac{\left(f(\tfrac{h}{2}) - \tfrac{1}{2} f(h)\right)}{\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)} + \frac{h^2}{4} f''(0) + \dots$$



Extrapolation de Richardson

$$f(\frac{h}{2}) = f(0) + \frac{h}{2} f'(0) + \frac{h^2}{8} f''(0) + \dots$$

$$f(\frac{h}{4}) = f(0) + \frac{h}{4} f'(0) + \frac{h^2}{32} f''(0) + \dots$$

3 mesures
Elimination du terme du second ordre

$f(\frac{h}{2^i}) \qquad i = 0, 2, 3, \dots$

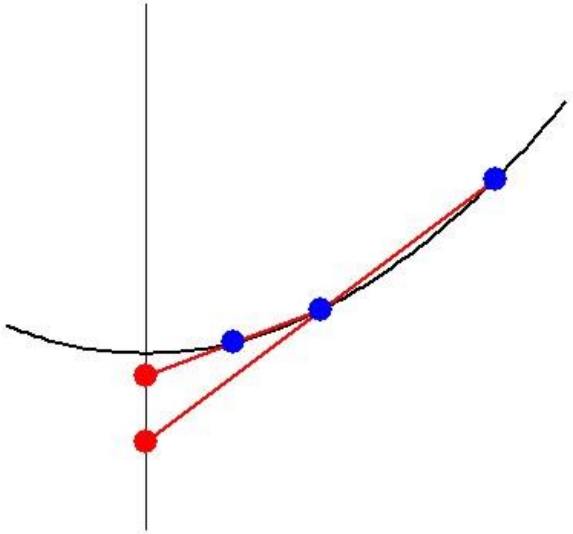
Comment estimer f(0) ?

$$f(\tfrac{h}{4}) - \tfrac{1}{2} f(\tfrac{h}{2}) = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) f(0) + \left(\tfrac{h^2}{32} - \tfrac{h^2}{16}\right) f''(0) + \dots$$

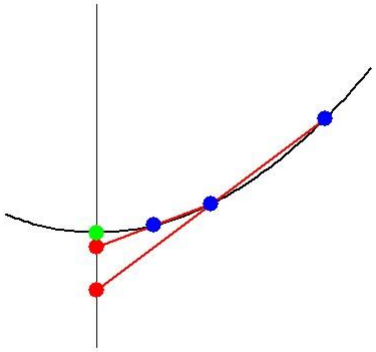
$$= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) f(0) - \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \tfrac{h^2}{16} f''(0) + \dots$$

$$\downarrow$$

$$f(0) = \frac{\left(f(\frac{h}{4}) - \frac{1}{2}(f(\frac{h}{2})\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} + \frac{h^2}{16} f''(0) + \dots$$



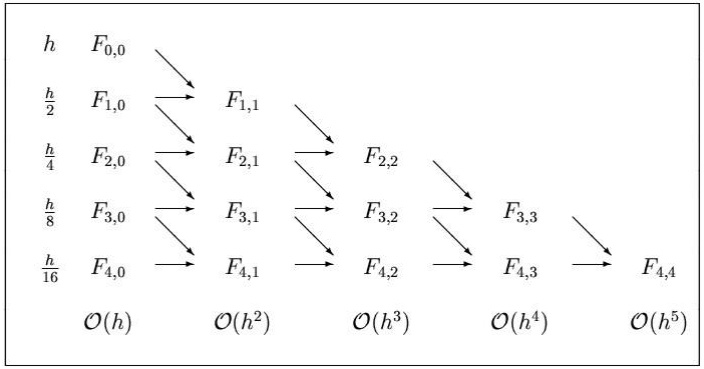
… et finalement



$$f(0) = \frac{\left(\frac{\left(f(\frac{h}{4}) - \frac{1}{2}f(\frac{h}{2})\right)}{(1-\frac{1}{2})}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\left(f(\frac{h}{2}) - \frac{1}{2}f(h)\right)}{(1-\frac{1}{2})}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)} + \frac{h^3}{48}f'''(0) + \ldots$$

$$F_{i,k} = \frac{\left(F_{i,k-1} - \frac{1}{2^k}F_{i-1,k-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}$$

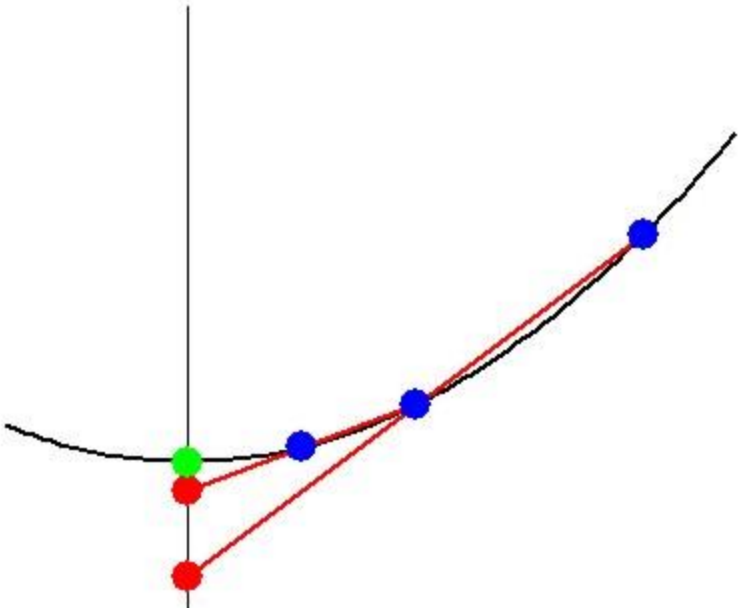
Disposition pratique des calculs

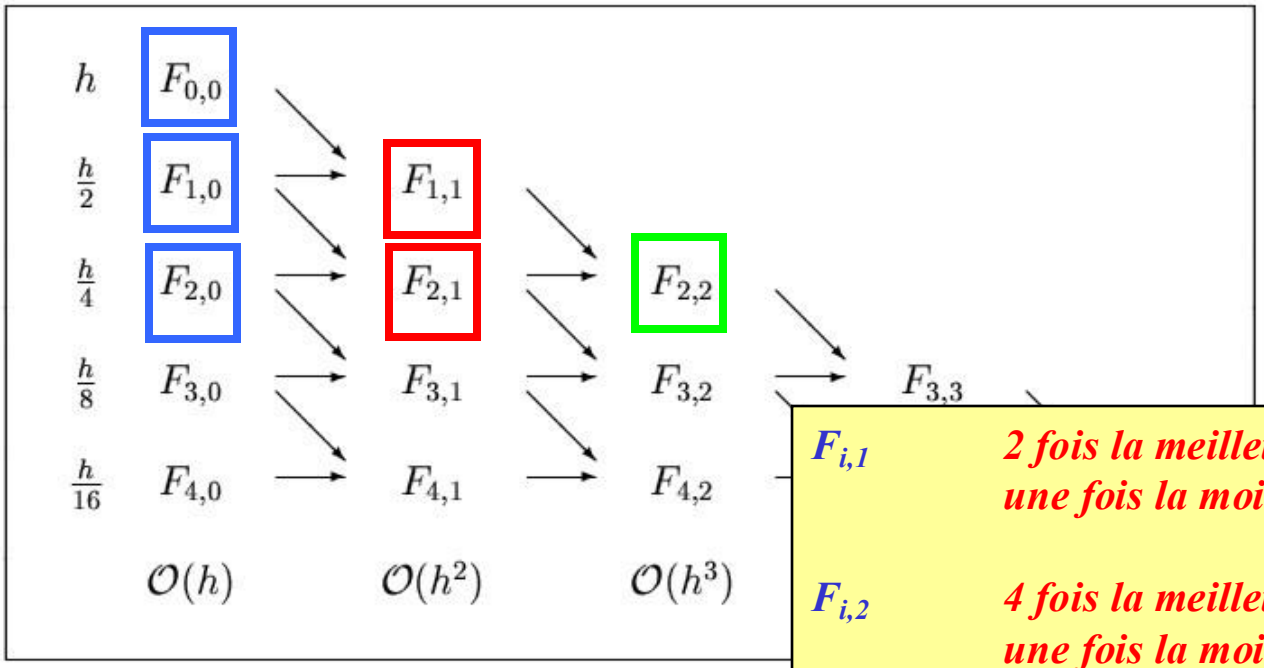


$F_{i,1}$ ***2 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne***

$F_{i,2}$ ***4 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne le tout divisé par 3***

Extrapolation de Richardson





$F_{i,1}$ *2 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne*

$F_{i,2}$ *4 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne le tout divisé par 3*

Romberg = application de l'extrapolation de Richardson à la méthode composite des trapèzes avec des pas décroissants

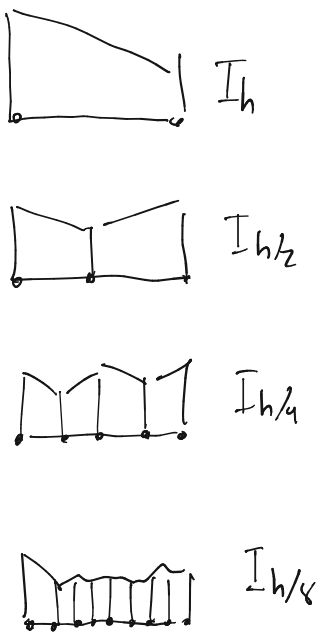
$$
\begin{aligned}
I^{h} &= \tfrac{h}{2}\,(U_0 + U_1) \\
I^{h/2} &= \tfrac{h}{4}\,(U_0 + 2U_1 + U_2) \\
I^{h/4} &= \tfrac{h}{8}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4) \\
I^{h/8} &= \tfrac{h}{16}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + \ldots + 2U_7 + U_8) \\
I^{h/16} &= \tfrac{h}{32}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + \ldots + 2U_{15} + U_{16})
\end{aligned}
$$

Méthode composite de trapèzes
h = (b-a) pour toutes les expressions

Estimer $I(0)$ sachant que

$$
\begin{aligned}
I(h) &= I^{h} \\
I(h/2) &= I^{h/2} \\
I(h/4) &= I^{h/4} \\
I(h/8) &= I^{h/8} \\
I(h/16) &= I^{h/16}
\end{aligned}
$$

Extrapolation de Richardson



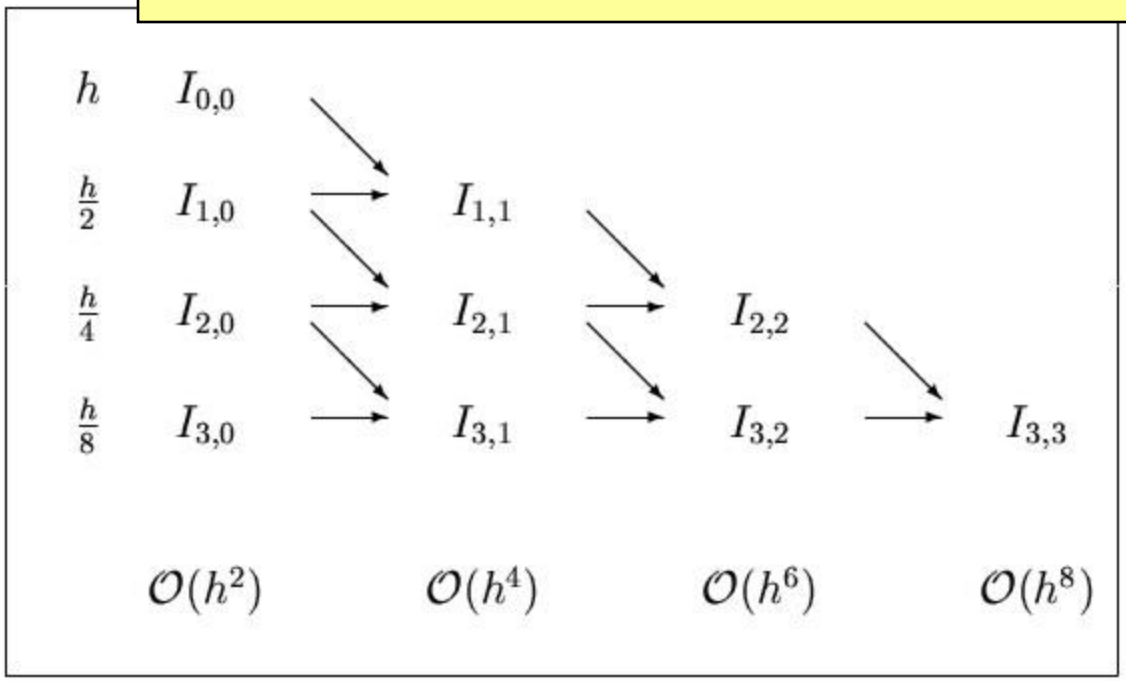
Romberg
en pratique !

… et pratiquement

$$I_{i,k} = \frac{\left(I_{i,k-1} - \frac{1}{2^{2k}} I_{i-1,k-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)}$$

Le terme d'erreur ne fait intervenir que des puissances paires….

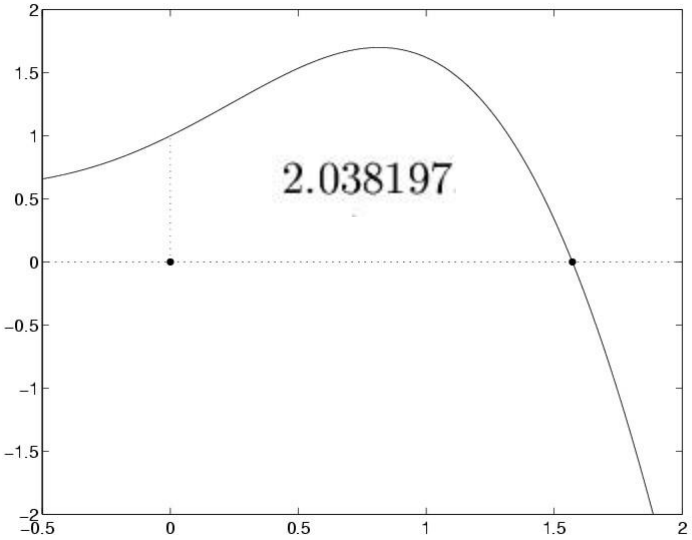
$I_{i,1}$ ***4 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne le tout divisé par 3***



Simpson ***Boole***

Exemple

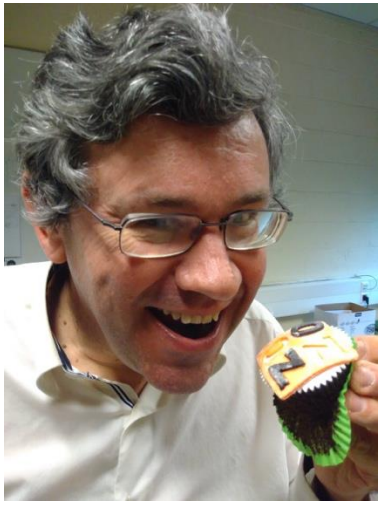
$$I = \int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cos x \, dx$$



i	$I_{i,0}$	$I_{i,1}$	$I_{i,2}$	$I_{i,3}$	$I_{i,4}$
0	0.785398				
1	1.726813	2.040617			
2	1.960534	2.038441	2.038296		
3	2.018794	2.038214	2.038199	2.038197	
4	2.033347	2.038198	2.038197	2.038197	2.038197
	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$	$\mathcal{O}(h^8)$	$\mathcal{O}(h^{10})$

Romberg : Implémentation récursive ?

```
h=1;d=0
Iq=Integrale exacte
I=Iq-1
while (Iq-I)~=0 :
   I=romberg(d,d,h)
   d=d+1;
```



Mon groupe favori…. lundi à 22h15.

« Afin de limiter les boucles trop ennuyeuses nous avons utilisé fonction interne. Mais nous ne nous sommes rendus compte que trop tard qu'une telle fonction ne peut s'appeler elle-même, et c'est ce qui, nous le présumons, engendre une erreur lors de l'exécution du programme…. »

Romberg

```
h=1;d=0
Iq=Integrale exacte
I=Iq-1
while (Iq-I)~=0 :
   I=romberg(d,d,h)
   d=d+1;
```

```
def romberg(i,k,h):
  if k==0 :
    Integration par les trapezes…
  else :
    I=(romberg(i,k-1,h)-
       (romberg(i-1,k-1,h)/(2**(2*k))))/(1-(1/(2**(2*k))))
  return I
```

Implémentation récursive de la méthode de Romberg
Ecriture très compacte
Efficacité très faible

Quelques moments plus tard…

```
h=1;d=0
Iq=Integrale exacte
I=Iq-1
while (Iq-I)!=0 :
   I=romberg(d,d,h)
   d=d+1;
```

Mon groupe favori, mardi à 19h52

X propos de la monstuositX ...
HUm .
Bien , donc c vrmnt très nul , dixit ma soeur is my clock , suffit de remplacer par while ((Iq - I) != 0)

Voilà on est nul

Et le matin…

Mon groupe favori, mercredi à 01h07

« Voici en annexe la version finale. Il a été amélioré et fonctionne à présent bien. »

Mon groupe favori, mercredi à 09h

« Voici en annexe la version finale. Il a été amélioré et fonctionne à présent bien. Ce programme fut fait dans son intégrité par notre groupe 1183. Toute similitude avec un autre programme déjà existant serait purement fortuite... Il nous a semblé que le mail envoyé hier contenait peut-être des fichiers vides suite à une erreur du serveur mail ; nous nous permettons donc de

La version 3 du programme…

```
d=0
p=1/1000
I=0
I_old=0
while ( round(I/p) < round(I_old/p) or I_old==0 ):
  I_old=I
  I=romberg(f,d,d,0,1)
  d=d+1
```

On n'est jamais sûr que ce test sera satisfait…
Possibilité réelle de programme ne s'arrêtant jamais jamais jamais

La récursivité avec Romberg, c'est aussi une…

```
h=1;d=0
Iq = Integrale exacte
I = Iq-1
while (d!=6):
    I=romberg(d,d,h)
    d=d+1
```

```
def romberg(i,k,h):
  if k==0 :
    Integration par les trapezes…
  else :
    I=(romberg(i,k-1,h)-
       (romberg(i-1,k-1,h)/(2**(2*k))))/(1-(1/(2**(2*k))))
    print(' Etape %i %i -> I  %21.14e' % (i,k,I))
  return I
```

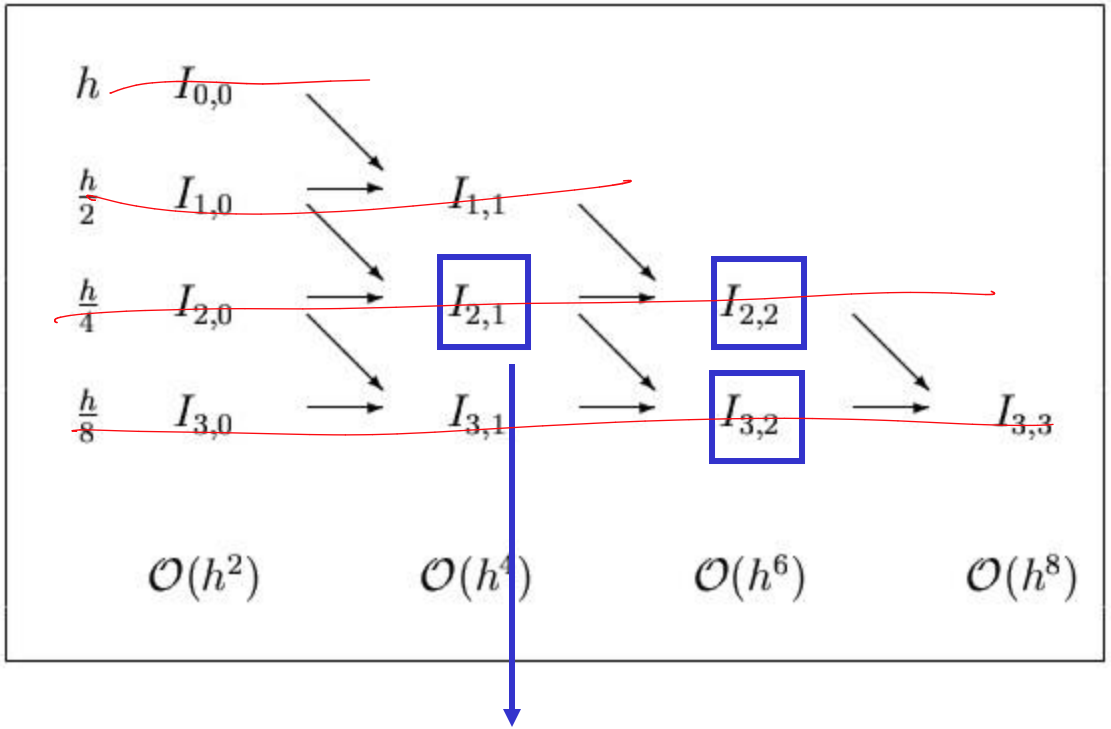
Beaucoup de calculs répétés inutilement…

```
 >>>>
I =
    1.3244
 Romberg : etape 1 1 -> I = 1.19688584716124e+000
I =
    1.1969
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 1 1 -> I = 1.19688584716124e+000
 Romberg : etape 2 2 -> I = 1.19497479612220e+000
I =
    1.1950
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 1 1 -> I = 1.19688584716124e+000
 Romberg : etape 2 2 -> I = 1.19497479612220e+000
 Romberg : etape 3 3 -> I = 1.19495771757388e+000
I =
    1.1950
```

```
 Romberg : etape 4 1 -> I = 1.19495821928187e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 4 2 -> I = 1.19495766722064e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 4 3 -> I = 1.19495766218563e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 1 1 -> I = 1.19688584716124e+000
 Romberg : etape 2 2 -> I = 1.19497479612220e+000
 Romberg : etape 3 3 -> I = 1.19495771757388e+000
 Romberg : etape 4 4 -> I = 1.19495766196842e+000
I =
    1.1950
```

```
 Romberg : etape 5 1 -> I = 1.19495769682481e+000
 Romberg : etape 4 1 -> I = 1.19495821928187e+000
 Romberg : etape 5 2 -> I = 1.19495766199434e+000
 Romberg : etape 4 1 -> I = 1.19495821928187e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 4 2 -> I = 1.19495766722064e+000
 Romberg : etape 5 3 -> I = 1.19495766191138e+000
 Romberg : etape 4 1 -> I = 1.19495821928187e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 4 2 -> I = 1.19495766722064e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 4 3 -> I = 1.19495766218563e+000
 Romberg : etape 5 4 -> I = 1.19495766191030e+000
 Romberg : etape 4 1 -> I = 1.19495821928187e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 4 2 -> I = 1.19495766722064e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 4 3 -> I = 1.19495766218563e+000
 Romberg : etape 3 1 -> I = 1.19496650020032e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 3 2 -> I = 1.19495798442620e+000
 Romberg : etape 2 1 -> I = 1.19509423681214e+000
 Romberg : etape 1 1 -> I = 1.19688584716124e+000
 Romberg : etape 2 2 -> I = 1.19497479612220e+000
 Romberg : etape 3 3 -> I = 1.19495771757388e+000
 Romberg : etape 4 4 -> I = 1.19495766196842e+000
 Romberg : etape 5 5 -> I = 1.19495766191025e+000
I =
    1.1950
>>
```

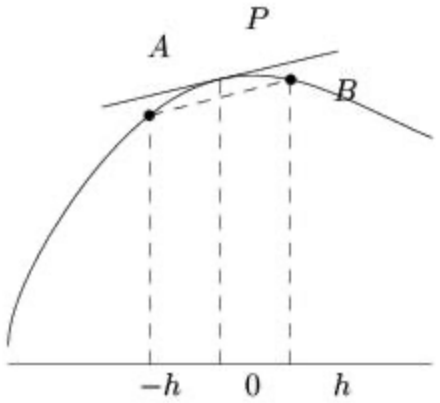
Il est beaucoup plus efficace de suivre le tableau des calculs….



Est nécessaire pour I_{22} et I_{32}

Plan du cours de méthodes numériques

Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?



Comment interpoler une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment approximer une fonction ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

$$D = u'(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$D^{h_k} = \frac{u(x+h_k) - u(x)}{h_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

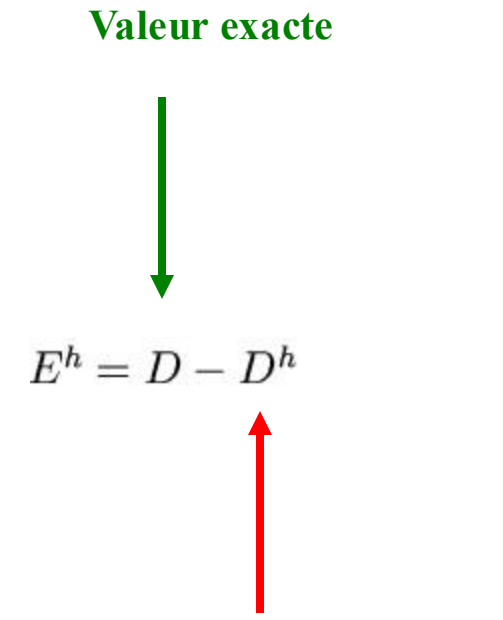
Dérivation numérique…

Méthodes conceptuellement simples…

- Différences finies d'ordre n
- Différences finies centrées et unilatérales

… mais numériquement instables

- Erreurs d'arrondi
- Concept de stabilité numérique



Une petite expérience numérique….

h_k	$\exp(1+h_k)$	D^{h_k}	E^{h_k}
$h_0 = 1$	7.389056099	4.670774270	-1.952492442
$h_1 = 0.1$	3.004166024	2.858841955	-0.140560126
$h_2 = 0.01$	2.745601015	2.731918656	-0.013636827
$h_3 = 0.001$	2.721001470	2.719641423	-0.001359594
$h_4 = 0.0001$	2.718553670	2.718417747	-0.000135919
$h_5 = 0.00001$	2.718309011	2.718295420	-0.000013591
$h_6 = 10^{-6}$	2.718284547	2.718283187	-0.000001359
$h_7 = 10^{-7}$	2.718282100	2.718281964	-0.000000140
$h_8 = 10^{-8}$	2.718281856	2.718281777	0.000000007
$h_9 = 10^{-9}$	2.718281831	2.718281600	-0.000000660
$h_{10} = 10^{-10}$	2.718281829	2.718278935	-0.000001548
$h_{11} = 10^{-11}$	2.718281828	2.718270053	-0.000032634
$h_{12} = 10^{-12}$	2.718281828	2.718270053	-0.000432314
$h_{13} = 10^{-13}$	2.718281828	2.713385072	0.000455864
$h_{14} = 10^{-14}$	2.718281828	2.664535259	-0.035071273
$h_{15} = 10^{-15}$	2.718281828	2.664535259	-0.390342640
$h_{16} = 10^{-16}$	2.718281828	0.000000000	2.718281828
$h_{17} = 10^{-17}$	2.718281828	0.000000000	2.718281828
$h_{18} = 10^{-18}$	2.718281828	0.000000000	2.718281828
$h_{19} = 10^{-19}$	2.718281828	0.000000000	2.718281828

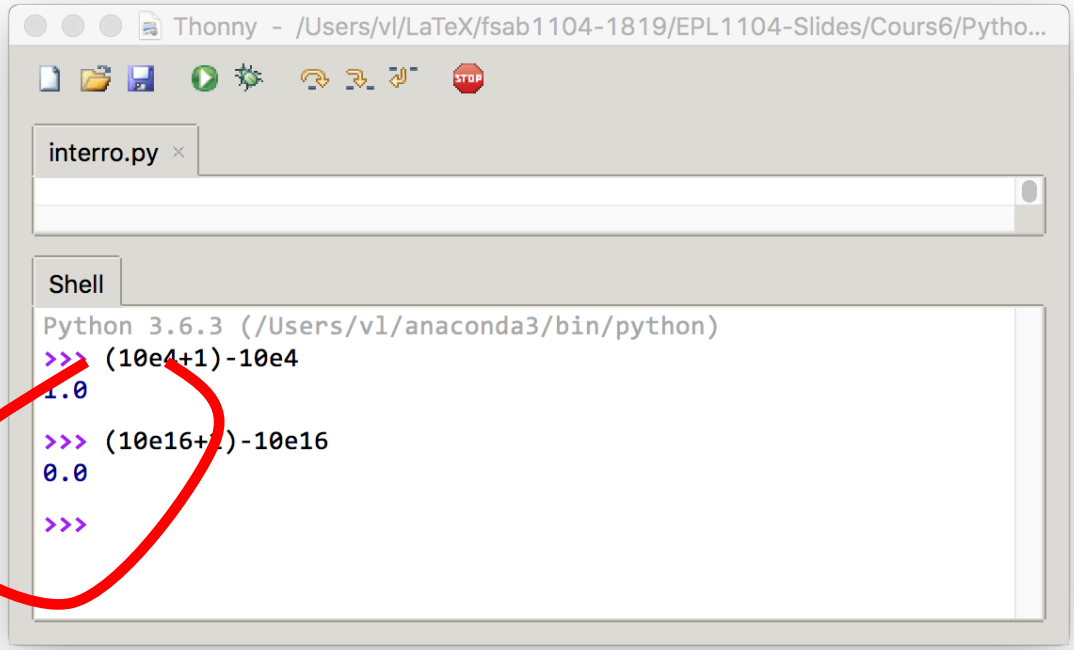
Théoriquement, la méthode avec une arithmétique exacte devrait converger vers la valeur exacte

Pratiquement avec python, l'erreur diminue et puis recommence à augmenter...

Il s'agit d'une catastrophe numérique !

Erreurs d'arrondi : c'est quoi ?

Un exemple très simple qui montre l'importance des erreurs d'arrondi



Valeur exacte

Nombre de chiffres significatifs

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| < \frac{1}{2}\,10^{-d}$$

Représentation dans l'ordinateur

Calculateur avec 4 chiffres pour représenter un nombre :

Effectuons l'opération	**1.348 + 9.999**
Valeur exacte	**11.347**
Valeur représentée par le calculateur	**11.35**

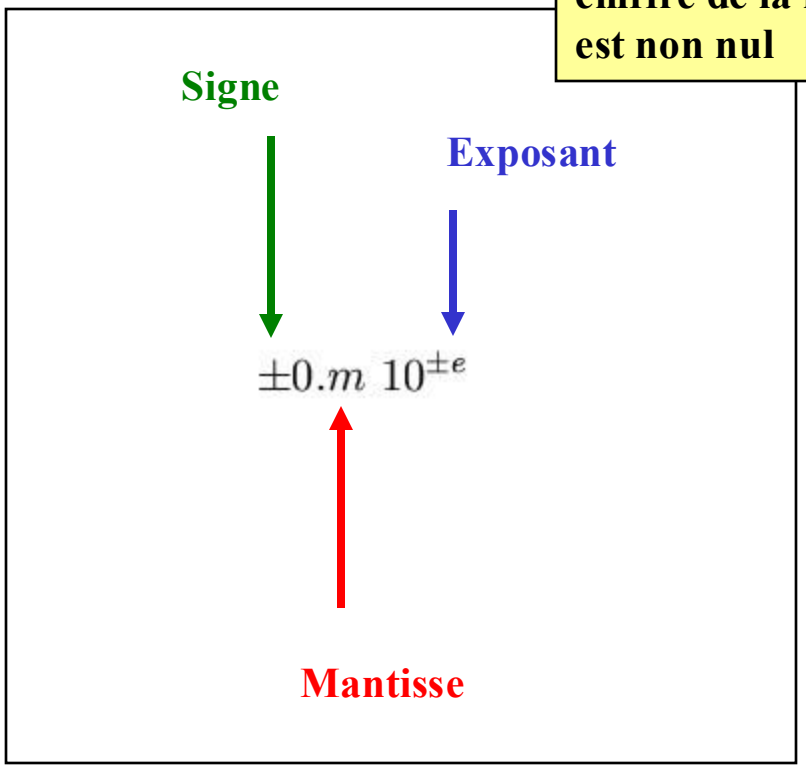
Arithmétique à précision finie

Comment utiliser astucieusement la mémoire disponible ?

x	$\tilde{x}$	nombre de chiffres significatifs : d	
1.000001	0.999998	$\left\|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right\| \approx 0.000003 < \frac{1}{2}\,10^{-5}$	5
0.001234	0.001231	$\left\|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right\| \approx 0.002 < \frac{1}{2}\,10^{-2}$	2
0.000013	0.000009	$\left\|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right\| \approx 0.31 < \frac{1}{2}$	0

$$
\begin{array}{rcrcl}
0.5000\ 10^{12} & = & 5.000\ 10^{11} & = & 5\overbrace{00000000000}^{11\ \text{zéros}}.000000000000000 \\
-0.3275\ 10^{04} & = & -3.275\ 10^{03} & = & -3275.000000000000000 \\
0.5723\ 10^{01} & = & 5.723\ 10^{00} & = & 5.723000000000000 \\
0.9422\ 10^{-11} & = & 9.422\ 10^{-12} & = & 0.\underbrace{00000000000}_{11\ \text{zéros}}9422
\end{array}
$$

Représentation normalisée : le premier chiffre de la mantisse est non nul



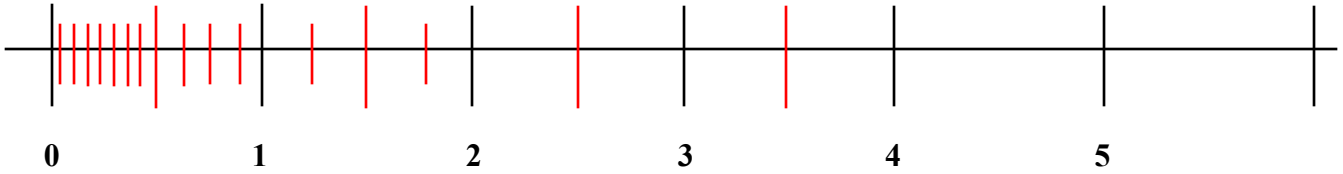
Arithmétique en virgule flottante

ou l'utilisation astucieuse de la mémoire disponible...

Base binaire

IEEE single (32bits)	**mantisse**	**23+1 bits**
	exposant	**8 bits**
	limites (range)	**10^{-38} 10^{+38}**
	arrondi à l'unité	**2^{-24} (approximativement 10^{-8})**
IEEE double (64 bits)	**mantisse**	**52+1 bits**
	exposant	**11 bits**
	limites (range)	**10^{-308} 10^{+308}**
	arrondi à l'unité	**2^{-53} (approximativement 10^{-16})**

En réalité, un ordinateur utilise des nombres binaires…



Il est important de réaliser que les nombres représentables ne sont pas également espacés

Exemple représenté : mantisse de 3 bits, exposant compris entre –1 et 3.

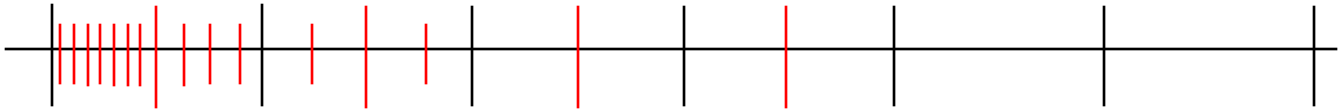
Calcul en simple *(32bits)* ou double précision *(64bits)*

Python : l'instruction du jour…

```
>>> import numpy as np
>>> np.finfo(float).eps
2.22044604925031e-16
>>> np.finfo(float).min
-1.7976931348623157e+308
>>> np.finfo(float).max
1.7976931348623157e+308
>>> np.finfo(float).tiny
2.225073858507201e-308
```

realmax = 1.7977e+308
realmin = 2.22507^{e}-308

Il y a beaucoup plus de nombres représentables près de x_{min} que près de x_{max}



x_{max} = 1.7976931348623158e+308

$\underline{x}_{max}$ = 1.7976931348623157e+308

x_{min} = 2.2250738507201e-308

$\underline{x}_{min}$ = 2.2250738507202e-308

$x_{max} - \underline{x}_{max}$ est de l'ordre de 10^{292}

$\underline{x}_{min} - x_{min}$ est de l'ordre de 10^{-323}

Les dangers de la soustraction…

ou pourquoi les formules de différences sont numériquement instables.

Représentation avec 12 chiffres

Effectuons l'opération x-y

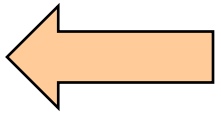
Valeur exacte de x	**3.1234567845578**
Valeur de x dans l'ordinateur	**3.12345678456**
Valeur exacte de y	**3.1234567844660**
Valeur de y dans l'ordinateur	**3.12345678447**
Résultat exact	**0.0000000000918**
Valeur approchée	**0.00000000009**

12 chiffres significatifs pour les données

1 chiffre significatif pour le résultat

Les facéties du calcul en virgule flottante…

```
>>> a=1; b=1
>>> while (a+b) != a:
...    b=b/2
...
>>> print(b)
1.1102230246251565e-16
```

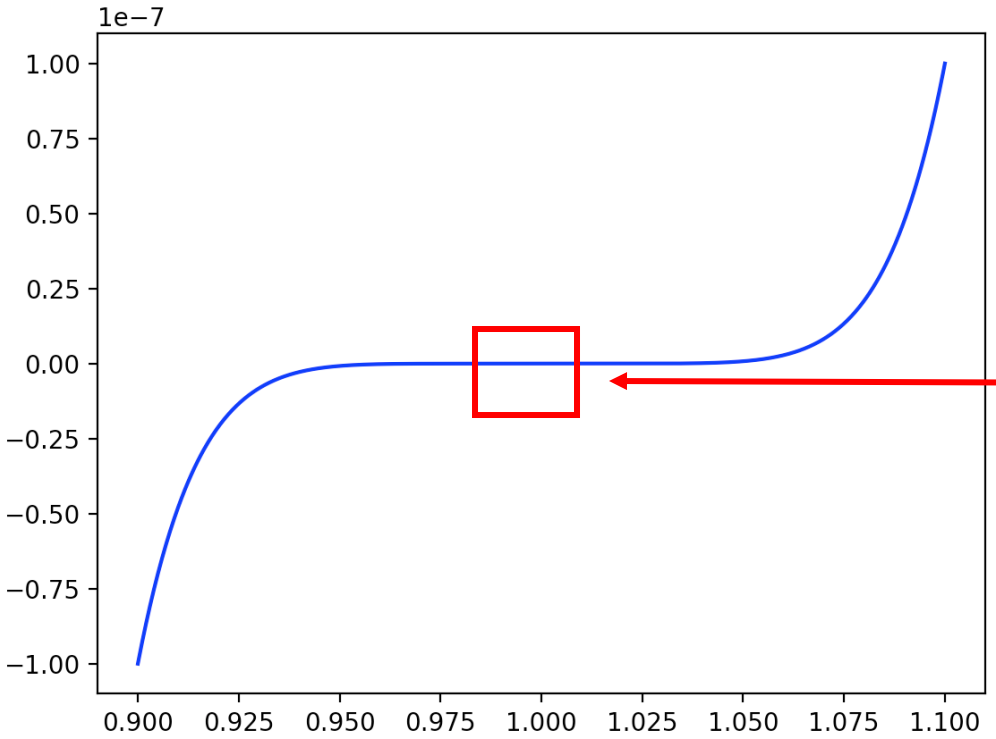


Ce programme ne devrait jamais se terminer dans l'espace des nombres réels…
Mais il se termine très très rapidement dans l'espace des nombres représentables par `python`

Les règles de l'associativité et de la distributivité sont violées !

```
>>> a=1.0e+308; b=1.1e+308; c=-1.001e+308
>>> print(a+(b+c))
1.099e+308
>>> print((a+b)+c)
inf
>>>
```

Les graphes… le meilleur et le pire !



Faisons un zoom !

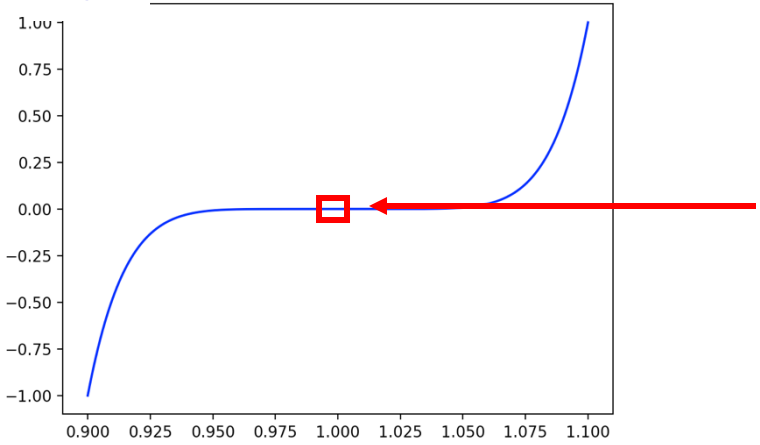
```
p = [1,-7,21,-35,35,-21,7,-1]
x = linspace(0.9,1.1,1000)
plt.plot(x,polyval(p,x),'-b')
```

$(1-x)^7$

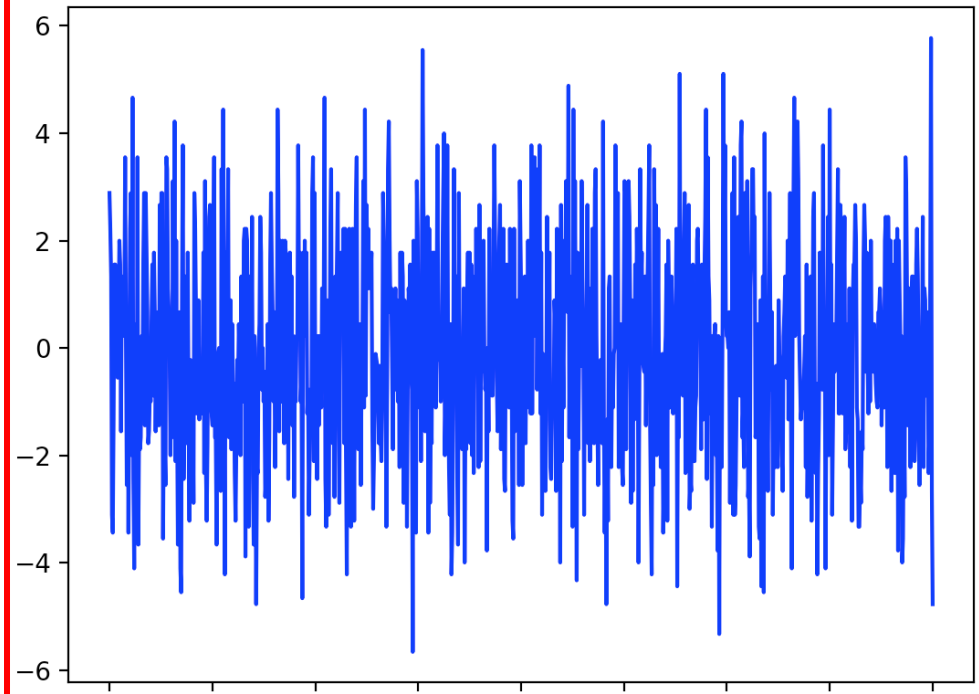
Et voilà un résultat débile :-)

```
p = [1,-7,21,-35,35,-21,7,-1]
x = linspace(1-2e-4,1+2e-4,1000)
plt.plot(x,polyval(p,x),'-b')
```

10^{-7}

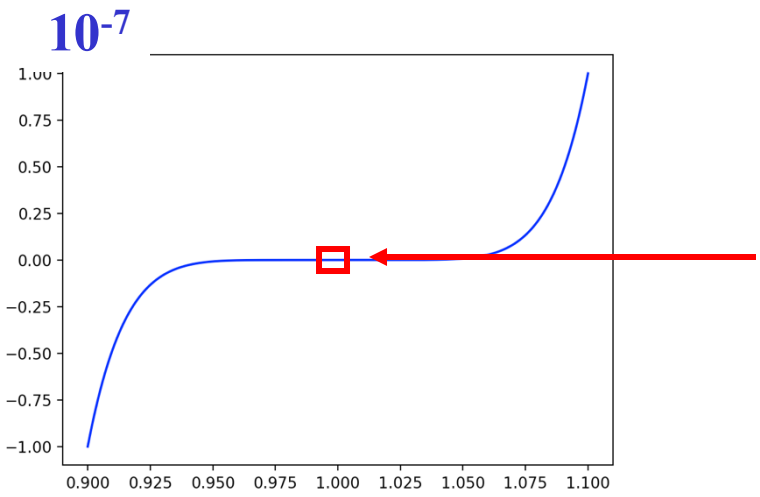


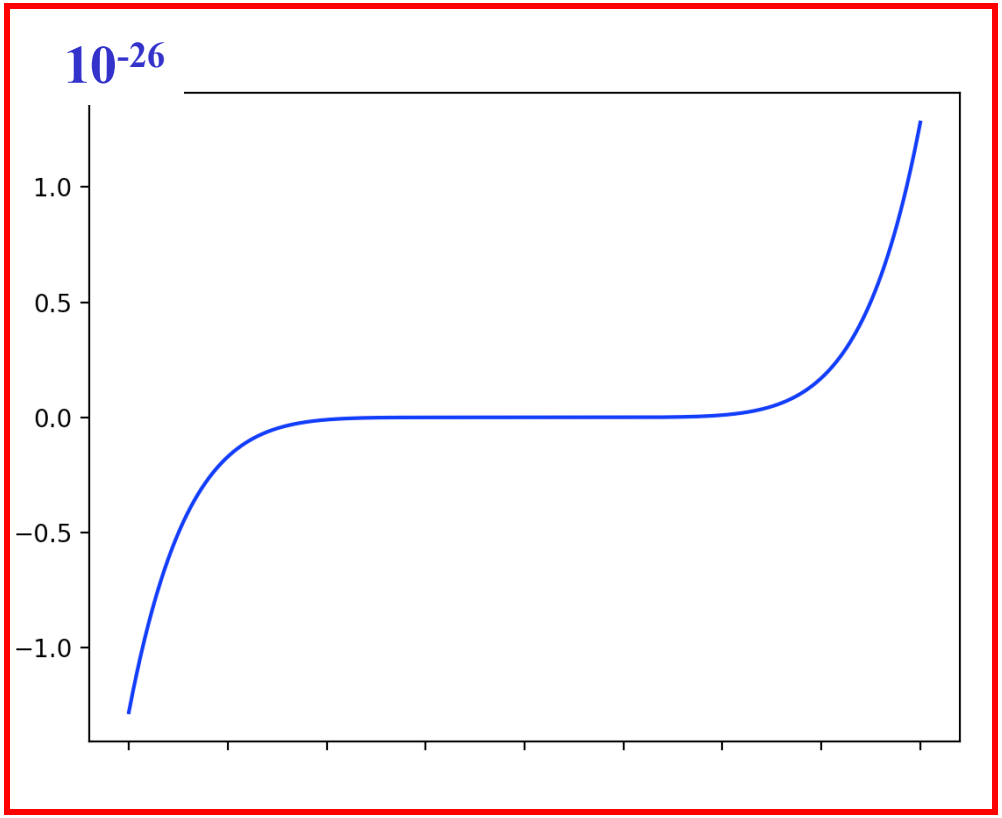
10^{-14}



Et le même graphe correct :-)

```
x = linspace(1-2e-4,1+2e-4,1000)
plt.plot(x,power((x-1.0),7),'-b')
```





Modélisons l'ordinateur…

$$D^h = \frac{U_h - U_{-h}}{2h} \simeq v'(0)$$

$$D^h = v'_0 + \frac{h^2}{6} v'''_0$$

$\frac{U_h - U_{-h}}{2h}$ $\quad$ $v'(0)$

$$+ \quad U_h = U_0 + U_0' h + U_0'' \frac{h^2}{2} + U_0''' \frac{h^3}{6}$$
$$- \quad U_{-h} = U_0 - + - \quad (=0)$$

$U_h - U_{-h}$ $\quad$ $=0$ $\quad$ $2h U_0'$ $\quad$ $2 U_0''' \frac{h^3}{6}$

$$v'(0) = \frac{U_h - U_{-h}}{2h}$$
$$= \frac{\tilde{U}_h - \tilde{U}_{-h}}{2h}$$

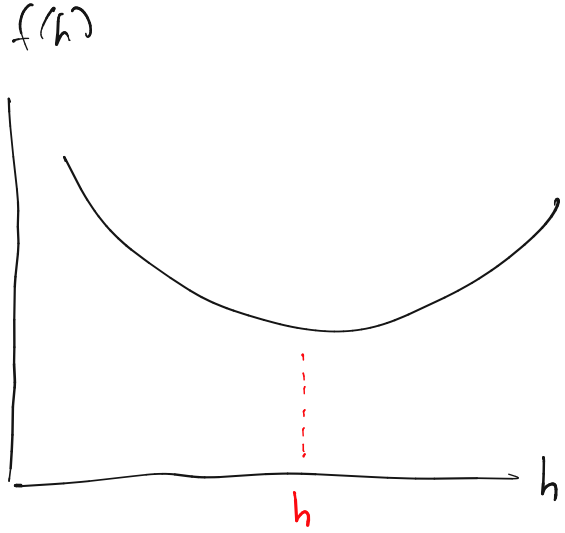
$$+ (-1) \frac{h^2}{6} v'''(\xi)$$

$$+ \frac{\tilde{e}_h + \tilde{e}_{-h}}{2h}$$

$\frac{2\varepsilon}{2h}$

$$+ (-1)\frac{h^2}{6} v'''(\xi)$$

$$+ \frac{\tilde{e}_h + \tilde{e}_{-h}}{2h} \qquad \frac{2\varepsilon}{2h}$$



$$\frac{\varepsilon}{h} + C\frac{h^2}{6} = f(h)$$

$$f'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{2Ch}{6} = 0$$

$$h^3 = \frac{3\varepsilon}{C}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{C}}$$

… pour obtenir
le pas optimal

Propagation des erreurs d'arrondi pour les différences

$$u'(0) = \underbrace{\frac{(U_h - U_{-h})}{2h}}_{D^h} + \underbrace{(-1)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)}_{E^h}$$

Erreur de discrétisation

Erreurs d'arrondi sur les données

$$U_h = \tilde{U}_h + \tilde{e}_h$$

$$U_{-h} = \tilde{U}_{-h} + \tilde{e}_{-h}$$

Pratiquement…

Erreur de discrétisation

Propagation des erreurs d'arrondi

$$u'(0) = \frac{(U_h - U_{-h})}{2h} + (-1)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)$$

$$u'(0) = \underbrace{\frac{(\tilde{U}_h - \tilde{U}_{-h})}{2h} + \frac{(\tilde{e}_h - \tilde{e}_{-h})}{2h}}_{D^h} + \underbrace{(-1)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)}_{E^h}$$

$$\underbrace{\frac{(\tilde{U}_h - \tilde{U}_{-h})}{2h}}_{\tilde{D}^h} \qquad \underbrace{\frac{(\tilde{e}_h - \tilde{e}_{-h})}{2h} + (-1)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)}_{\tilde{E}^h}$$

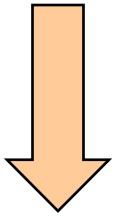
On néglige l'erreur d'arrondi commise sur les opérations pour calculer la différence, car elle est peu importante par rapport à l'erreur propagée

Erreur totale

Estimation du pas optimal

Calcul de h qui minimise l'erreur totale en valeur absolue

$$|\tilde{E}^h| \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{C\,h^2}{6}$$

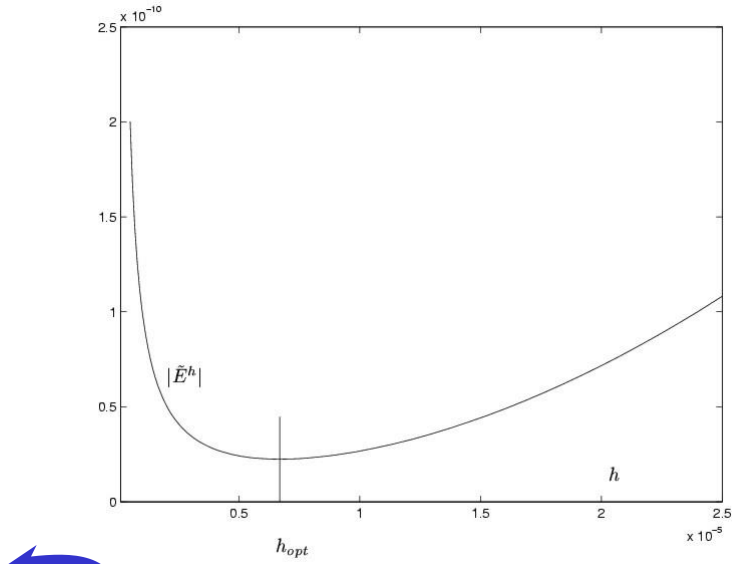


$$h = \left(\frac{3\,\epsilon}{C}\right)^{1/3}$$

Exemple

calcul de la dérivée de cos(0.7)

h	$\tilde{D}^h$	$\tilde{E}^h$
1	-0.54209049171057	0.10212719552713
0.1	-0.64314452781256	0.00107315942513
0.01	-0.64420695032992	0.00001073690777
0.001	-0.64421757986810	0.00000010736959
0.0001	-0.64421768616374	0.00000000107395
1.0000000e-005	-0.64421768722345	0.00000000001424
1.0000000e-006	-0.64421768725120	-0.00000000001351
1.0000000e-007	-0.64421768697365	0.00000000026404
1.0000000e-008	-0.64421769030432	-0.00000000306663
1.0000000e-009	-0.64421767920209	0.00000000803561
1.0000000e-010	-0.64421745715748	0.00000023008021
1.0000000e-011	-0.64421801226899	-0.00000032503130
1.0000000e-012	-0.64420691003875	0.00001077719894
1.0000000e-013	-0.64448446579490	-0.00026677855721
1.0000000e-014	-0.64392935428259	0.00028833295510
1.0000000e-015	-0.61062266354384	0.03359502369385
1.0000000e-016	-0.55511151231258	0.08910617492511
1.0000000e-017	0.00000000000000	0.64421768723769
1.0000000e-018	0.00000000000000	0.64421768723769
1.0000000e-019	0.00000000000000	0.64421768723769



Application de l'extrapolation de Richardson à des différences centrées avec des pas décroissants

$$u'(0) = \frac{(U_h - U_{-h})}{2h} - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)$$

Différences centrées h=0.1

Estimer $D(0)$ sachant que

$$\begin{aligned} D(h) &= -0.64314452781256 \\ D(h/10) &= -0.64420695032992 \\ D(h/100) &= -0.64421757986810 \\ D(h/1000) &= -0.64421768616374 \end{aligned}$$

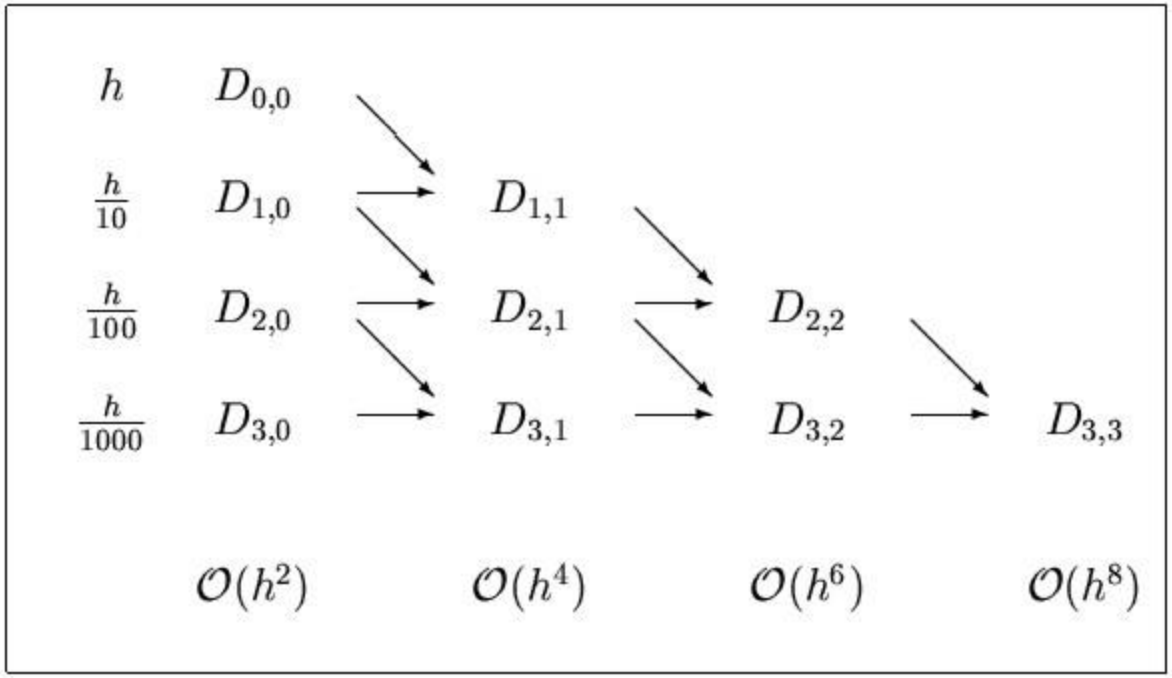
Extrapolation de Richardson

… et pratiquement

$$D_{i,k} = \frac{\left(D_{i,k-1} - \frac{1}{10^{2k}} D_{i-1,k-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10^{2k}}\right)}$$

Le terme d'erreur ne fait intervenir que des puissances paires….

$D_{i,1}$ ***100 fois la meilleure estimation moins une fois la moins bonne le tout divisé par 99***



h=0.1, h/10, h/100, h/1000

Exemple

i	$D_{i,0}$	$D_{i,1}$	$D_{i,2}$	$D_{i,3}$
0	-0.64314452781256			
1	-0.64420695032992	-0.64421768187050		
2	-0.64421757986810	-0.64421768723717	-0.64421768723771	
3	-0.64421768616374	-0.64421768723743	-0.64421768723743	-0.64421768723743
	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$	$\mathcal{O}(h^8)$

Inutile, pourquoi ?

h=0.1, h/2, h/4, h/8

i	$D_{i,0}$	$D_{i,1}$	$D_{i,2}$	$D_{i,3}$
0	-0.64314452781256			
1	-0.64394929675235	-0.64421755306561		
2	-0.64415058332564	-0.64421767885006	-0.64421768723569	
3	-0.64420091086648	-0.64421768723743	-0.64421768723765	-0.64421768723766
	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$	$\mathcal{O}(h^8)$

Interrogation du 19 mars !

Méthodes numériques (LEPL1104)

Vincent Legat
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

Il faut d'abord t'identifier :-)

News | Documents | Videos & podcasts ! | Installer Python | Programmes Python | Homeworks | Interrogation du 19 mars 2025

Quelques rappels utiles pour l'interrogation du mercredi 19 mars 2025

A connaître pour le jour de l'examen :
Votre noma : **il faut vous identifier pour l'obtenir :-)**
Votre auditoire : **il faut vous identifier pour l'obtenir :-)**
Votre numéro magique pour le classement des copies : **il faut aussi vous identifier... :-)**

Pour remettre (et éventuellement reprendre) une feuille blanche pour l'interrogation, il ne faut surtout pas se déplacer le jour de l'interrogation...

- Tout d'abord, il faut vous identifier à droite...
- Dans un second temps, cliquer sur le lien qui apparaîtra ici, si vous êtes inscrit au cours :-) :-)
- Les étudiants qui se présentent dans les salles d'examen devront obligatoirement rester une heure dans la salle d'examen, même si ils souhaitent juste remettre une feuille blanche.
- Il faut vraiment utiliser le formulaire électronique pour remettre virtuellement votre feuille blanche.

Etudiants dans l'auditoire A10

Etudiants dans l'auditoire A02

Etudiants dans l'auditoire SUD11

Etudiants dans l'auditoire SUD19

Consignes Tuyaux

Y-a-t-il un but de Lukaku ?

Eh non : y en a eu trois :-)

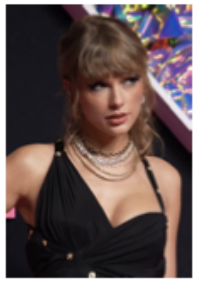
L'interrogation commence à 16 heures 30 précises et se terminera à 17 heures 30 précises.

L'interrogation de METHODES NUMERIQUES se composera d'une question ouverte sur les SEPT premiers cours, sur les QUATRE devoirs soumis avant l'interrogation et les SIX premières séances tutorées.

Si la participation à l'interrogation n'est pas obligatoire, mais la remise virtuelle d'une feuille blanche via le site web pour les étudiants qui ne souhaitent pas présenter l'interrogation est obligatoire !

Consignes Tuyaux

Qui est notre gentil *swiftie* de Taylor ?
Notre assistant favori : Antoine :-)



Crédit : Wikipedia

Grâce aux réseaux sociaux, Antoine dispose de données précises sur la trajectoire de la voiture de sa chanteuse adorée. Il a donc pris son propre bolide afin de pouvoir la rencontrer de manière impromptue.
Antoine voudrait avoir la plus jolie photo possible de Taylor Swift avec lui !
On est certain que vous aurez tous à coeur de réaliser le rêve d'enfant du petit Antoine.

On considère les données suivantes pour écrire les équations paramétriques $(x(t), y(t))$ des trajectoires des voitures d'Antoine et de Taylor Swift dans le plan comme des courbes de Bézier :

$$\begin{aligned} [T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7] &= [0,0,0,0,1,1,1,1] \\ [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] &= [(3,3),(2,2),(\alpha,\alpha),(0,0)] \\ [\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] &= [(0,0),(-1,0),(0,2),(1,0)] \end{aligned}$$

Pour les fans des tuyaux, quelques interrogations des années précédentes !

- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2024)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2023)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2022)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2019)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2018)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2017)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2016)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2015)
- Interrogation FSAB1104 S7 (octobre 2014)