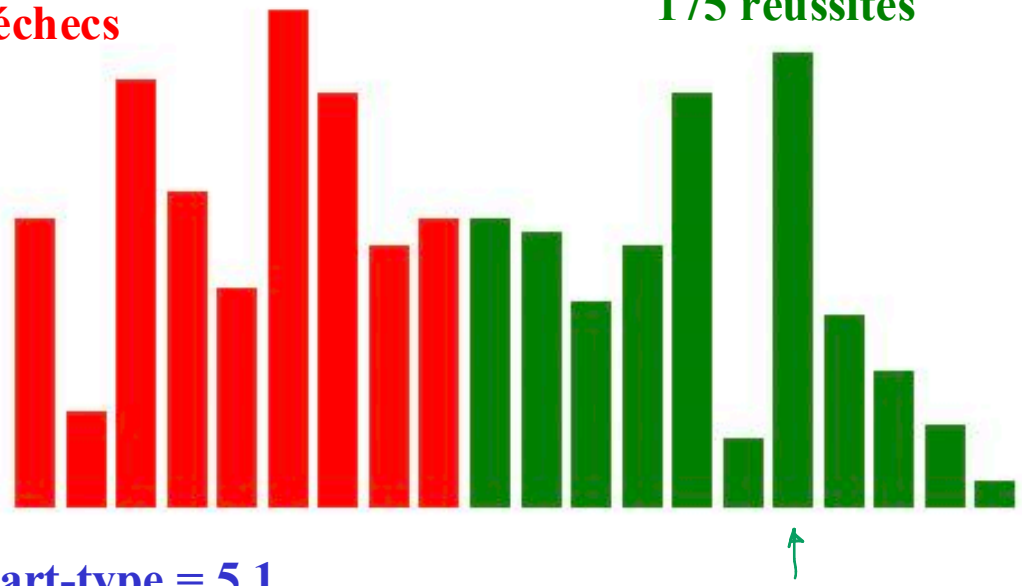
```
notes = [0,21,7,31,23,16,36,30,19,21,21,
         20,15,19,30,5,33,14,10,6,2]
plt.bar(range(10),notes[0:10],color='r')
plt.bar(range(10,21),notes[10:21],color='g')
plt.xlim([-1,21]); plt.ylim([0,40]); plt.axis('off')
mean = sum(arange(21)*notes)/sum(notes)
std  = sqrt(sum(pow(arange(21)-mean,2)*notes)/sum(notes))
```

204 échecs

175 réussites



Ecart-type = 5.1

Moyenne interro 23-24 = 8.9/20
Moyenne interro 22-23 = 8.9/20
Moyenne interro 21-22 = 6.2/20
Moyenne interro 20-21 = 9.6/20
Moyenne interro 19-20 = 6.8/20
Moyenne interro 18-19 = 10,1/20
Moyenne interro 17-18 = 8.6/20
Moyenne interro 16-17 = 7.6/20
Moyenne interro 15-16 = 8.7/20
Moyenne interro 14-15 = 6.4/20

Moyenne de l'interro = 9.3/20 :-)

Deux vilains complices : Donald et Vladimir...

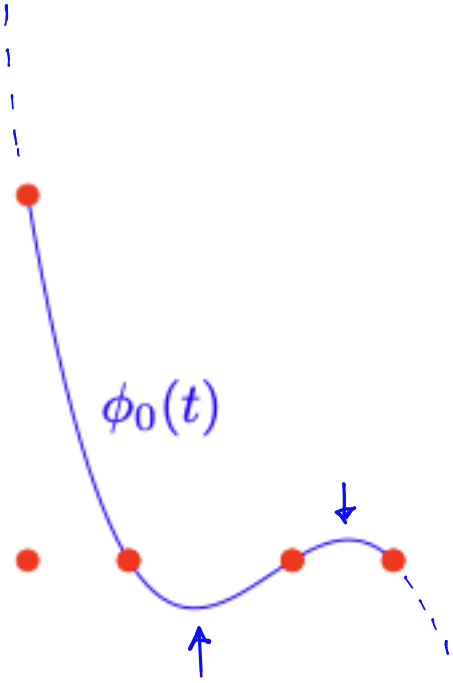
Lequel est le plus vilain ?

Pour estimer l'intégrale de la fonction $u(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$,
Donald et Vladimir ont écrit une quadrature définie par :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\, dx \;\approx\; \sum_{i=0}^{3} w_i\, u(X_i)$$

où α est un nombre magique que Vladimir refuse de fournir.
Donald a péniblement commencé à écrire une fonction `python` :

	X_i	w_i
0	-1	$1-\alpha$
1	$-1/\sqrt{5}$	α
2	$1/\sqrt{5}$	α
3	1	$1-\alpha$



Et pourtant !

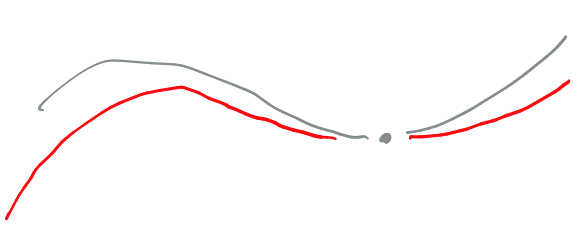
First read the whole stuff !
Then draw a sketch !
It is pathetic !

ERREUR LOCALE

$$\int_{-h}^{h} x^6\,dx = \frac{2h^7}{7}$$

$$u(x) = u_0 + x\,u_0' + \frac{x^2}{2}u_0'' + \frac{x^3}{6}u_0^{(3)} + \frac{x^4}{24}u_0^{(4)} + \frac{x^5}{120}u_0^{(5)} + \frac{x^6}{720}u_0^{(6)}$$

u_0 ✓ $x\,u_0'$ ✓ $\frac{x^2}{2}u_0''$: SI α EST BIEN CHOISI ! ✓ $\frac{x^3}{6}u_0^{(3)}$ ✓ $\frac{x^4}{24}u_0^{(4)}$: CAR $1/\sqrt{5}$ EST SANS DOUTE SUBTIL ✓ $\frac{x^5}{120}u_0^{(5)}$ ✓



$(1-\alpha)$	α	α	$(1-\alpha)$
-1	$-1/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	1

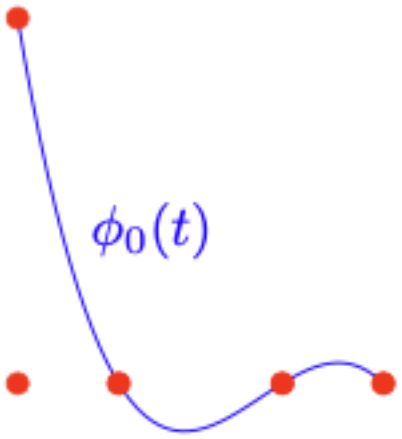
DEGRE = 5

ORDRE = 6

ERREUR LOCALE $\mathcal{O}(h^7)$

GLOBALE $\mathcal{O}(h^6)$

$$\boxed{\frac{64\,I_{h/2} - I_h}{63}}$$



Interpolation
Degré
Ordre

	X_i	w_i
0	-1	$1-\alpha$
1	$-1/\sqrt{5}$	α
2	$1/\sqrt{5}$	α
3	1	$1-\alpha$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \int_{-1}^{1} \phi_2(x)\, dx \\
&\downarrow \\
&= \frac{-5\sqrt{5}}{8} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) dx \\
&= \frac{-5\sqrt{5}}{8} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\, dx}_{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}} \\
&\downarrow \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Interpolation
Degré
Ordre

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx \quad = \quad \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

$$\sum_{i=0}^{3} w_i \, X_i^2 \quad = \quad 2(1-\alpha) + 2\alpha \, \frac{1}{5} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha \quad = \quad \frac{5}{6}$$

$$\int_{-h}^{h} u(x)\,dx = 2hU_0 + \frac{2h^3}{3\times 2}U_0'' + \frac{2h^5}{5\times 24}U_0^{(4)} + \frac{2h^7}{7\times 720}U_0^{(6)} + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{3} w_i\, u(X_i)\, h = 2\,h\,(1-\alpha)\left[U_0 + \frac{h^2}{2}U_0'' + \frac{h^4}{24}U_0^{(4)} + \frac{h^6}{720}U_0^{(6)} + \dots\right]$$

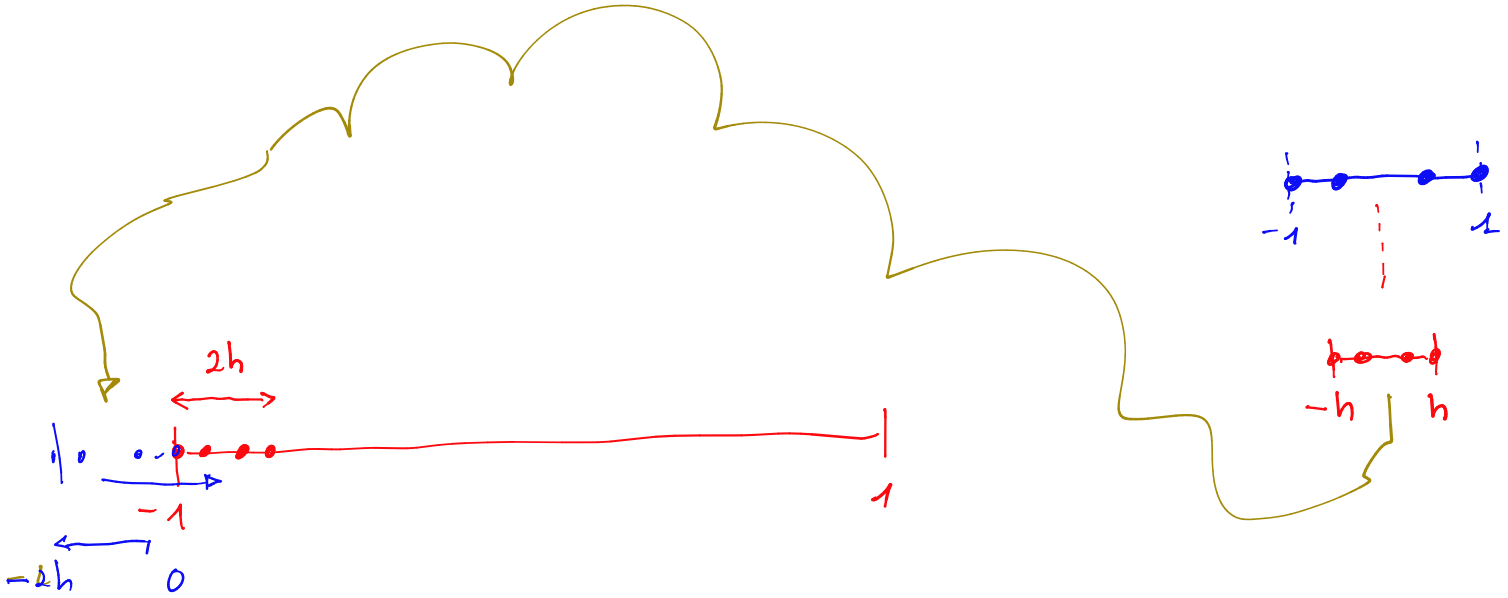
$$+ 2\,h\,\alpha\left[U_0 + \frac{h^2}{5\times 2}U_0'' + \frac{h^4}{25\times 24}U_0^{(4)} + \frac{h^6}{125\times 720}U_0^{(6)} + \dots\right]$$

Interpolation
Degré
Ordre

$$\frac{1}{3\times 2} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{10}$$

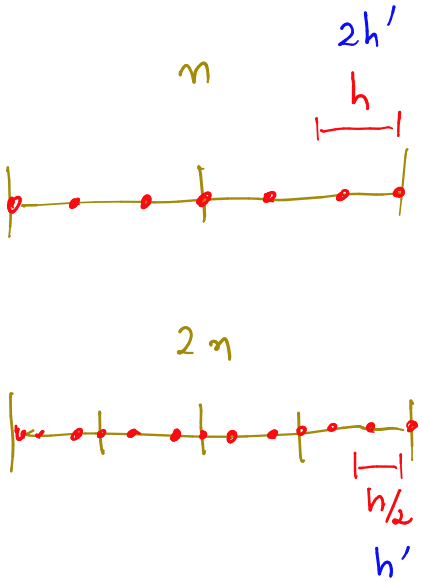
$$\downarrow$$

$$\alpha = \frac{5}{6}$$




```
def compositeTrumpPoutine(u,n):
  h = 1.0/n
  I = 0.0
  X = np.array([ -1,-1/sqrt(5),1/sqrt(5),1 ]) *  h - (1 + h)
  W = np.array([ 1/6,5/6,5/6,1/6 ]) * h
  for i in range(n):
    X = X + 2*h
    I = I + np.sum(u(X) @ W);
  return I
```

Le désastre !



$$\frac{64\, I_h - I_{2h}}{63}$$

$$a\, I_{2n} + b\, I_n$$

$$\frac{64\, I_n - I_{2n}}{63}$$

$$I_{extr} = \frac{\left(64 I_{2n} - I_n\right)}{63}$$

Extrapolation
Le massacre !

$$\int_{-h}^{h} u(x)\,dx = 2hU_0 + \frac{2h^3}{3\times 2}U_0'' + \frac{2h^5}{5\times 24}U_0^{(4)} + \frac{2h^7}{7\times 720}U_0^{(6)} + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{3} w_i\, u(X_i)\, h = 2\,h\,(1-\alpha)\left[U_0 + \frac{h^2}{2}U_0'' + \frac{h^4}{24}U_0^{(4)} + \frac{h^6}{720}U_0^{(6)} + \dots\right]$$

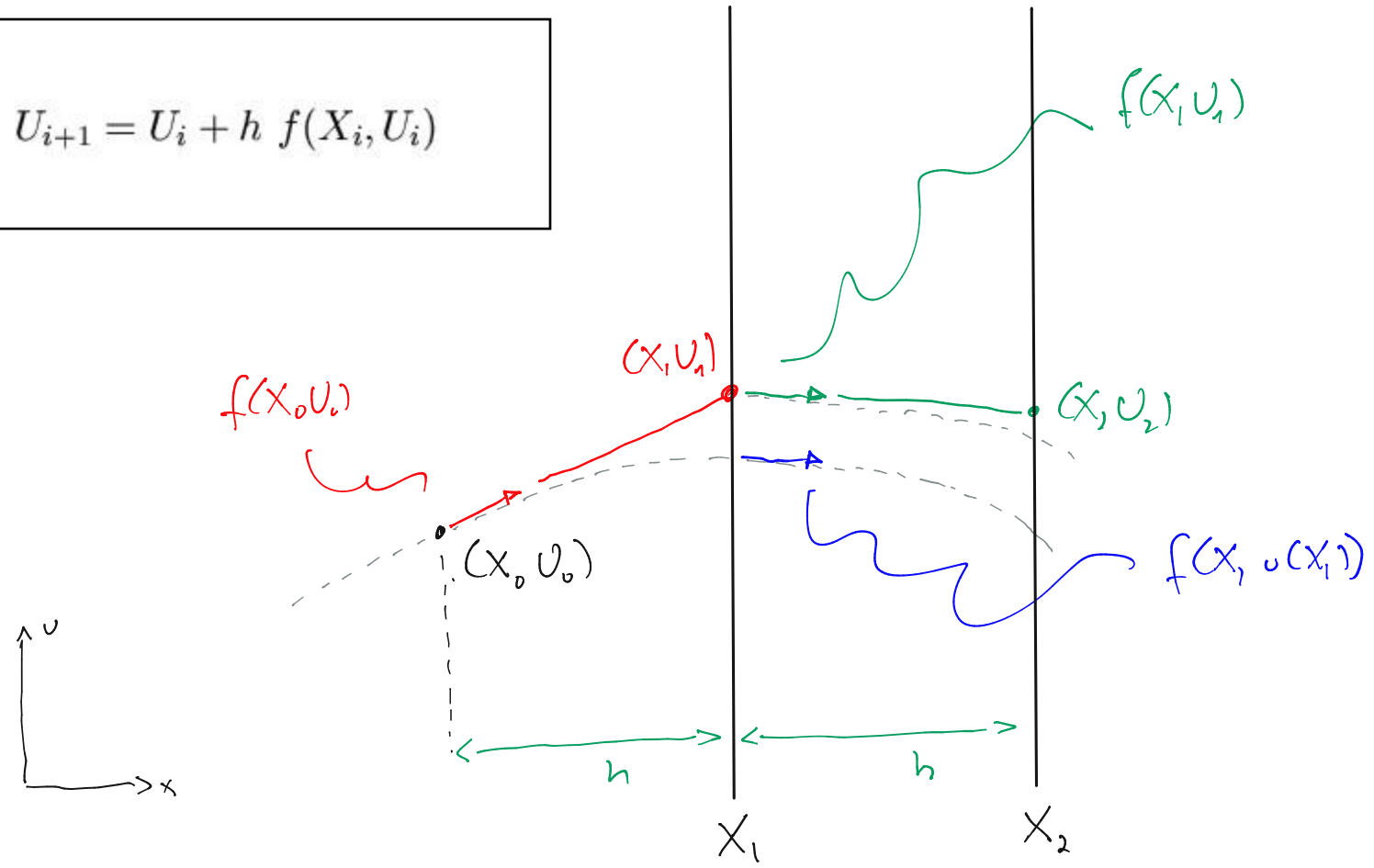
$$+ 2\,h\,\alpha\left[U_0 + \frac{h^2}{5\times 2}U_0'' + \frac{h^4}{25\times 24}U_0^{(4)} + \frac{h^6}{125\times 720}U_0^{(6)} + \dots\right]$$

La jolie expression !

$$\left|E^h\right| \leq \frac{2}{23625}\, C_6\, h^6$$

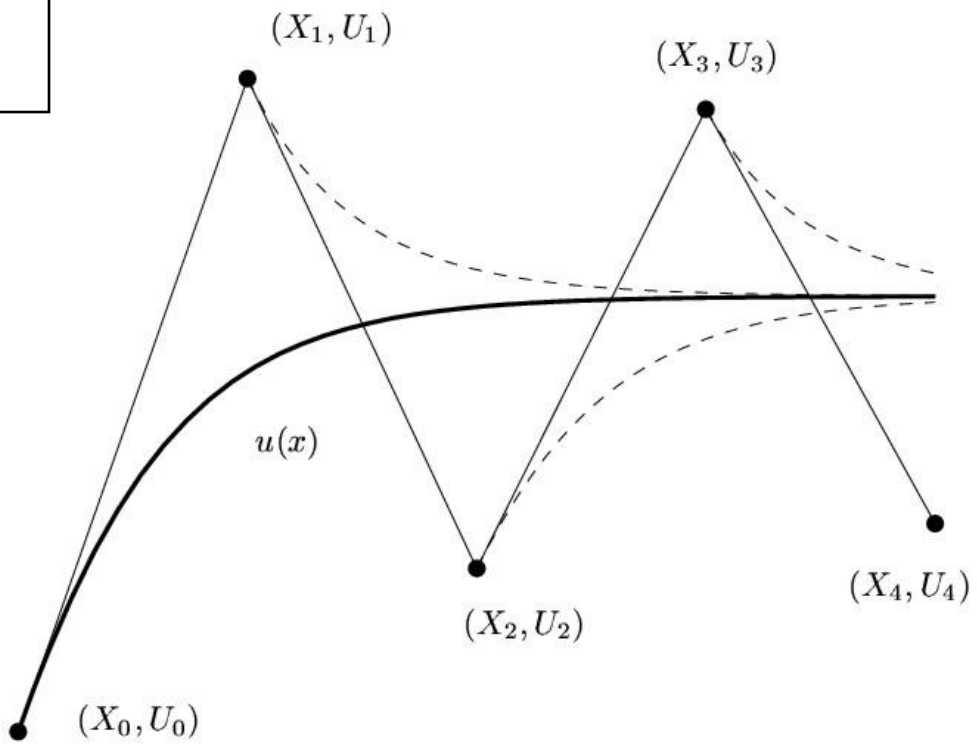
Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$



Méthode d'Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$



Cas général dans le plan complexe

Nombre complexe

$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda \right) U_i$$

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

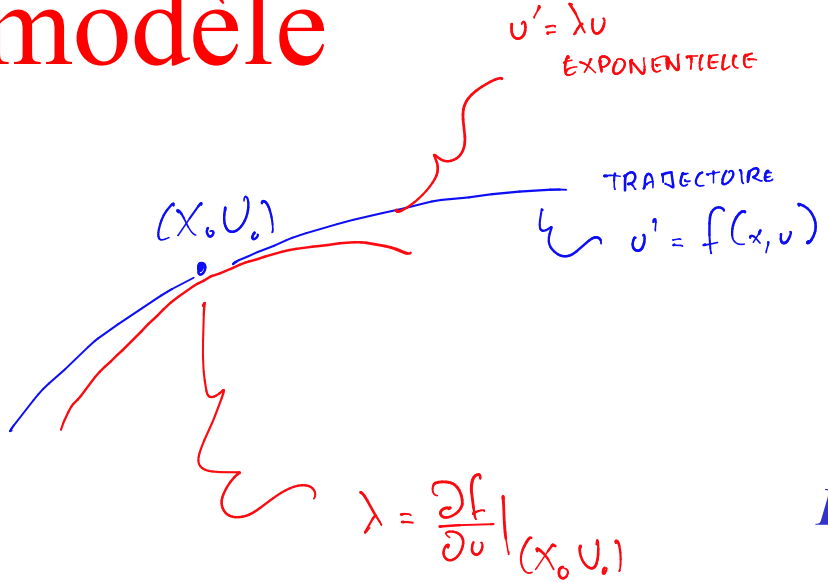
Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

Euler explicite

Ordre de précision linéaire

Méthode conditionnellement stable

Un problème modèle



Nombre complexe

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

$$(v+\varepsilon)'\lambda = (v+\varepsilon)$$

$$v'\lambda = v$$
$$\varepsilon'\lambda = \varepsilon$$

L'EVOLUTION / L'AMPLIFICATION DE L'ERREUR / DE LA SOLUTION SONT IDENTIQUES !

FACTEUR D'AMPLIFICATION

$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda\right) U_i$$

Euler es-tu stable ?

$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda \right) U_i$$

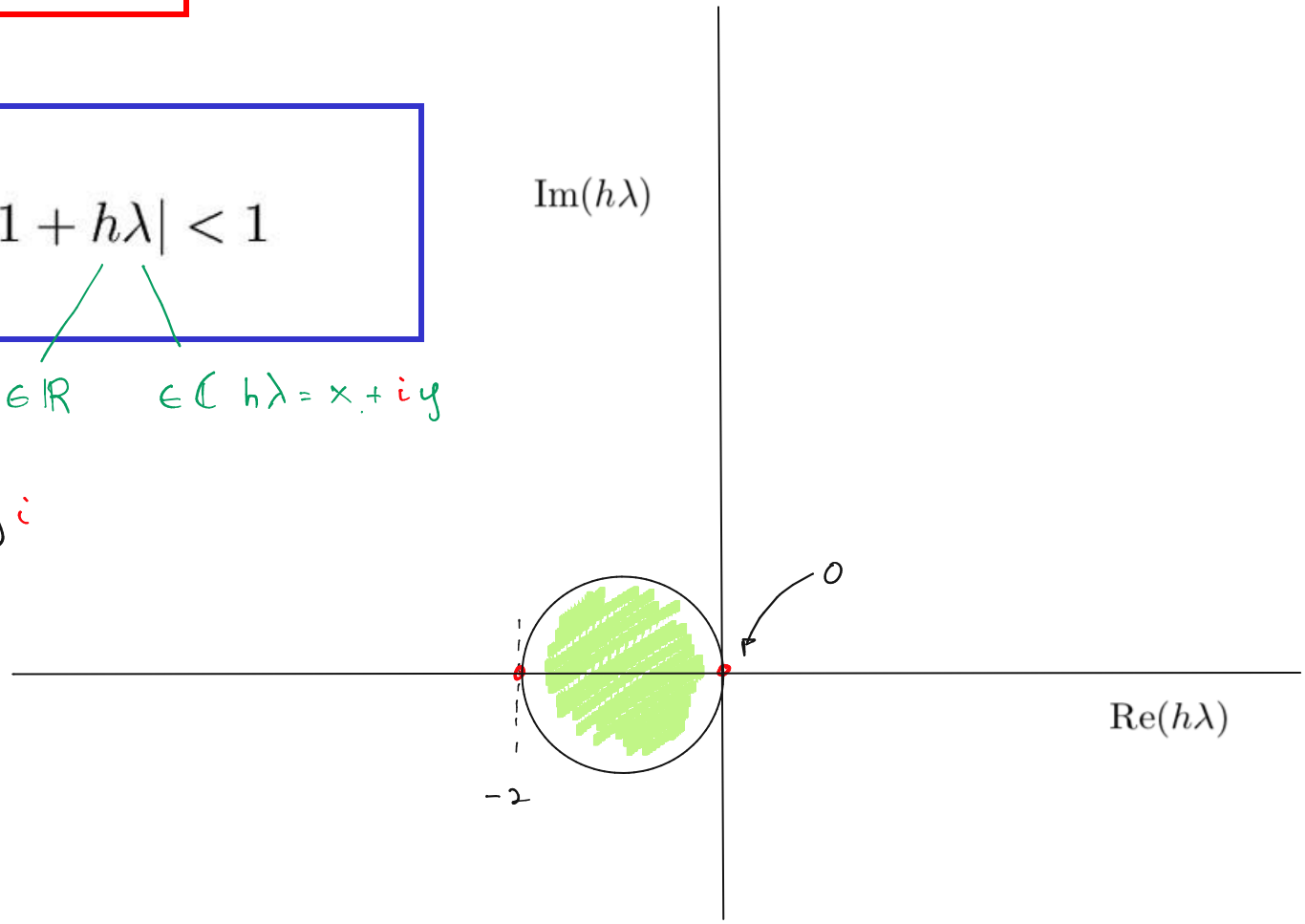
$$|1 + h\lambda| < 1$$

$\in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{C}$ $h\lambda = x + iy$

$h\lambda = x + yi$

$1 + h\lambda = 1 + x + yi$

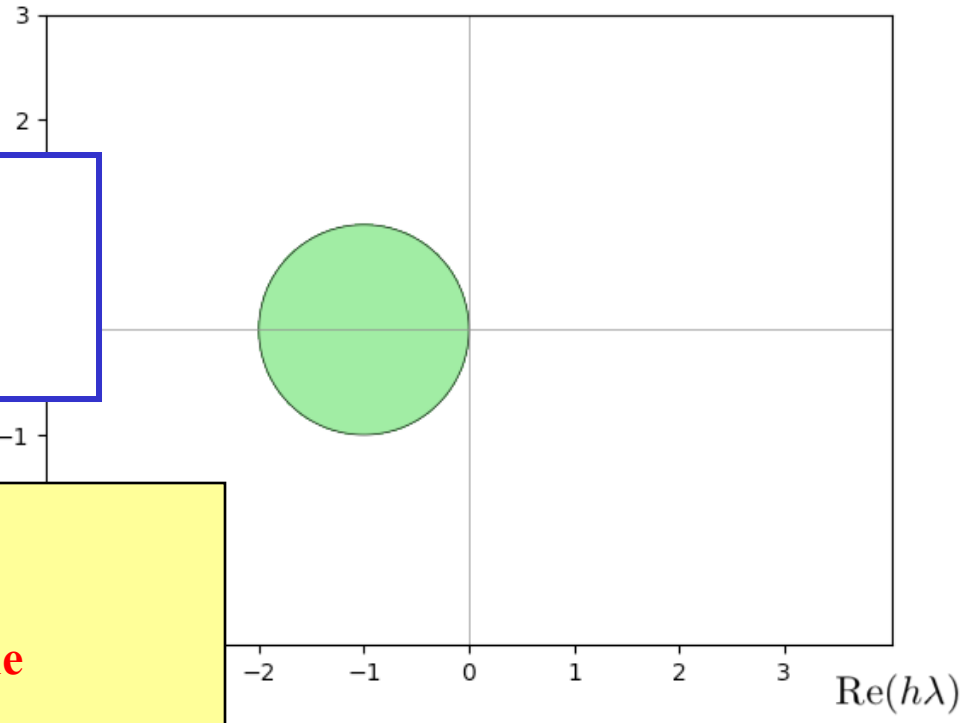
$(1+x^2) + y^2 < 1$



Région de stabilité
Euler explicite

$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda \right) U_i$$

$$|1 + h\lambda| < 1$$

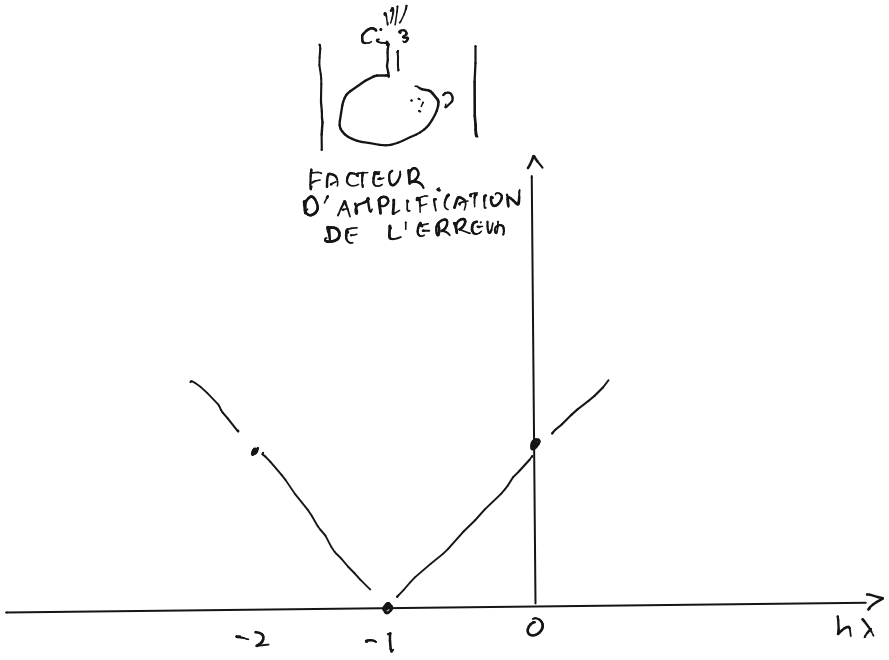


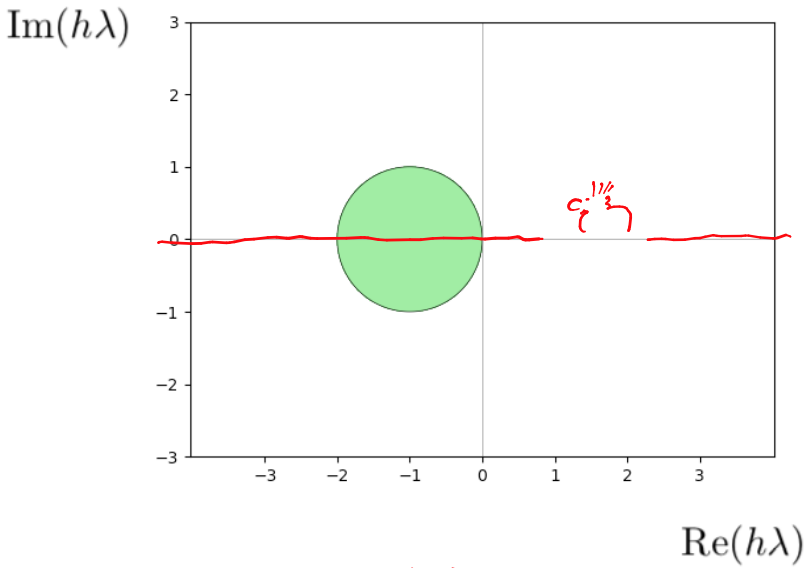
Euler explicite

Ordre de précision linéaire

Méthode conditionnellement stable

Se confiner au centre de la zone stable





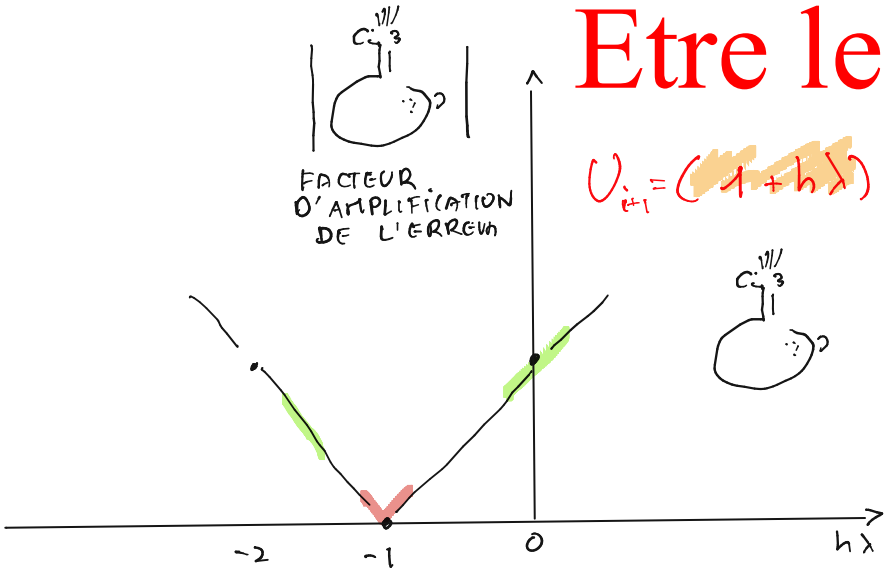
$U' = \lambda U$

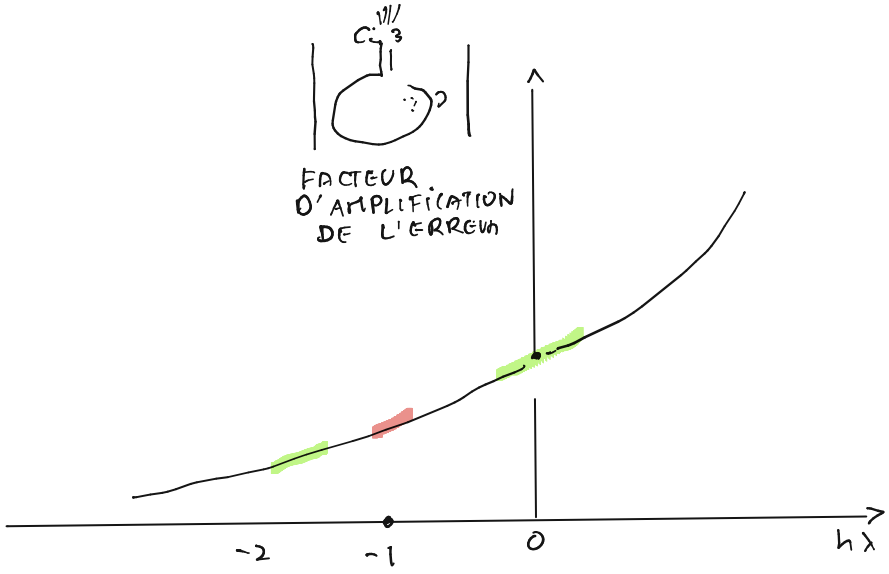
$\varepsilon' = \lambda \varepsilon$

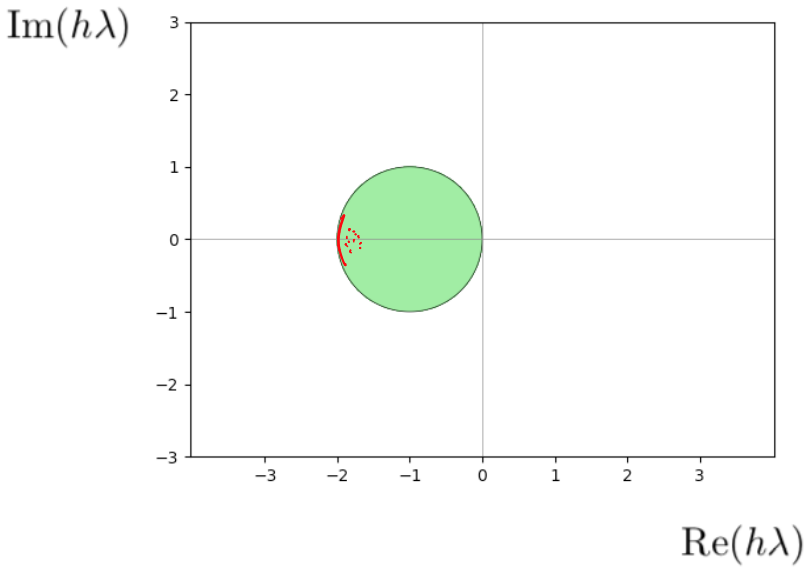
$U_{i+1} = (1 + h\lambda)\, U_i$

Etre le plus loin possible des zombies…

$u_{i+1} = (1 + h\lambda)\, u_i$







$u_{i+1} = u_i \exp(h\lambda)$

Région de stabilité Taylor

$$U_{i+1} = U_i + h\,F_i + \frac{h^2}{2}F_i' + \frac{h^3}{6}F_i'' + \frac{h^4}{24}F_i'''$$

$\hat{f}(x, v(x)) \quad : x \to y \in \mathbb{R}$

$\hat{f} = \lambda v$

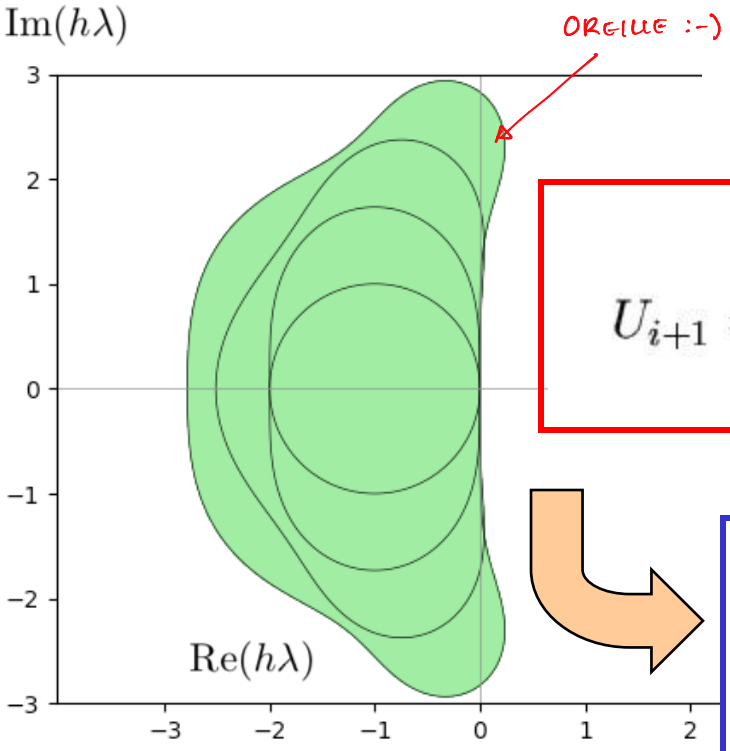
$\hat{f}' = \lambda v' = \lambda^2 v$

$\hat{f}'' = \lambda v'' = \lambda^3 v$

$U_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3} \cdots\right) U_i$

$$\left|1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n\lambda^n}{n!}\right| < 1$$

Région de stabilité Méthodes de Taylor



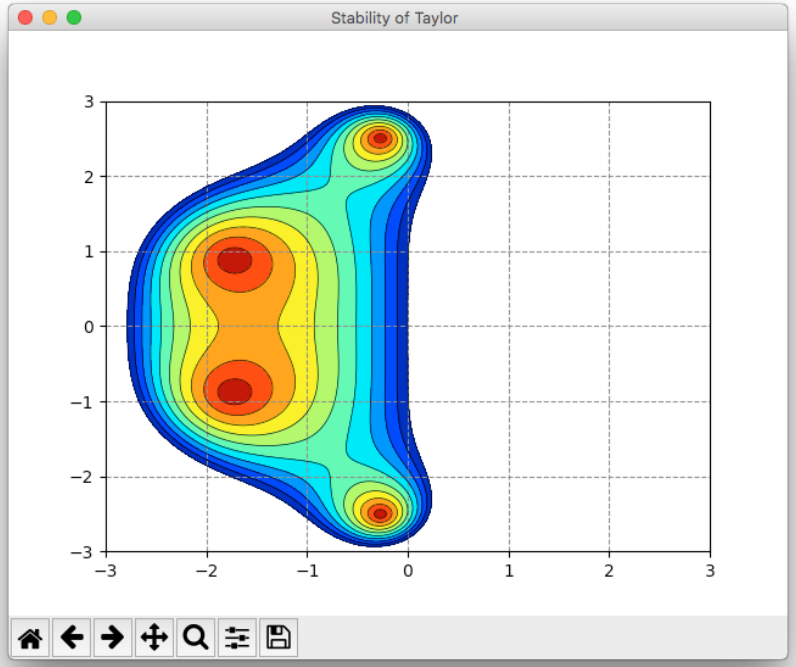
$$U_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n\lambda^n}{n!}\right) U_i$$

$$\left|1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n\lambda^n}{n!}\right| < 1$$

Taylor n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,
Mise en œuvre fastidieuse si n élevé
Conditionnellement stables

Comment obtenir un tel graphe ?



Les couleurs ont du sens !

Bleu : pas d'amplification !

Rouge : amortissement !

Cela concernera l'erreur mais aussi la solution exacte.

Une méthode numérique TROP stable n'a aucun intérêt, puisqu'elle gomme les erreurs mais aussi la solution !

C'est à la frontière que le comportement est optimal.

```
x,y = meshgrid(linspace(-3,3,1000),linspace(-3,3,1000))
z = x + 1j*y

gain = abs(1 + z + z*z/2 + z**3/6 + z**4/24)
plt.contourf(x,y,gain,arange(0,1.1,0.1),cmap=plt.cm.jet_r)
```

Euler explicite revisitée

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, v(x))\,dx = \int_{X_i}^{X_{i+1}} v'(x)\,dx$$

$$[v]_{X_i}^{X_{i+1}} = V_{i+1} - V_i$$

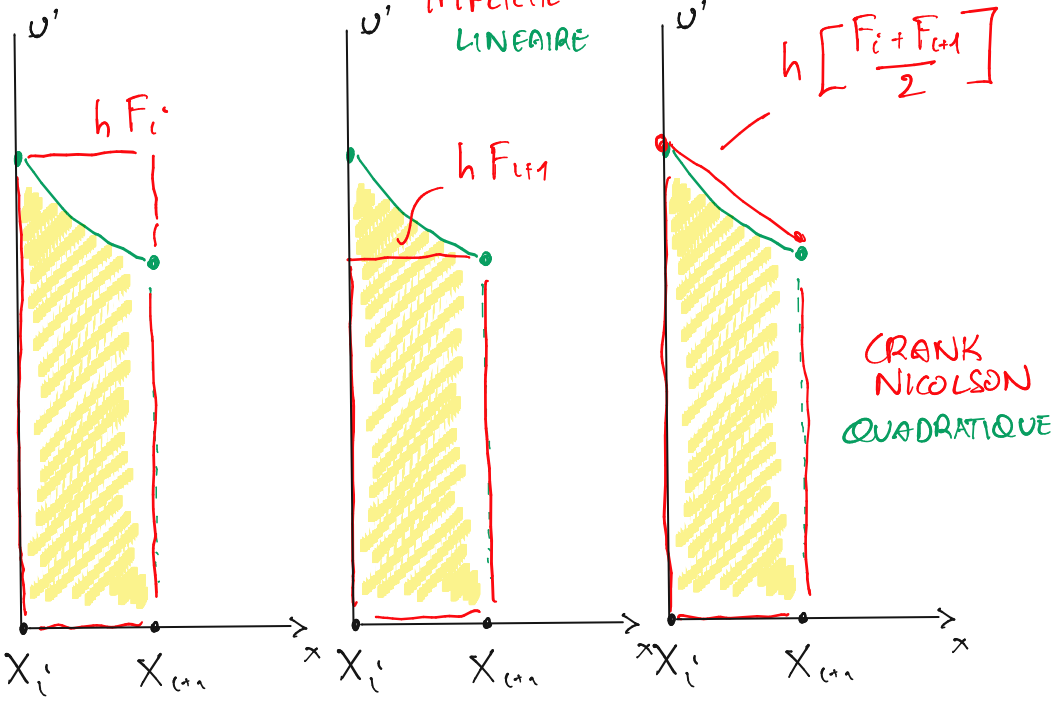
$$\simeq h\,F_i$$
$$\simeq h\,F_{i+1}$$
$$\simeq h\left[\frac{F_i + F_{i+1}}{2}\right]$$

$$F_i = f(X_i, V_i)$$

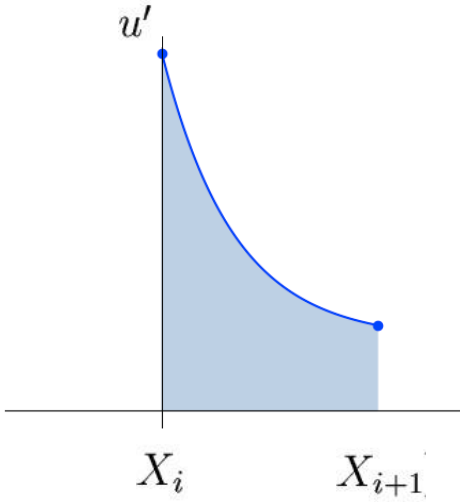
EULER EXPLICITE LINEAIRE

EULER IMPLICITE LINEAIRE

CRANK NICOLSON QUADRATIQUE



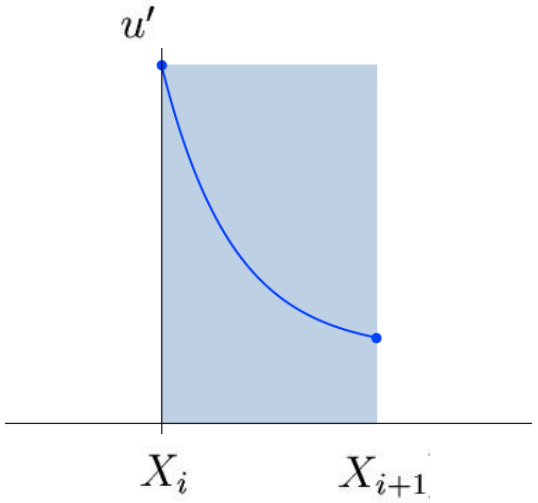
Euler explicite revisitée…



$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x))dx = u(X_{i+1}) - u(X_i)$$

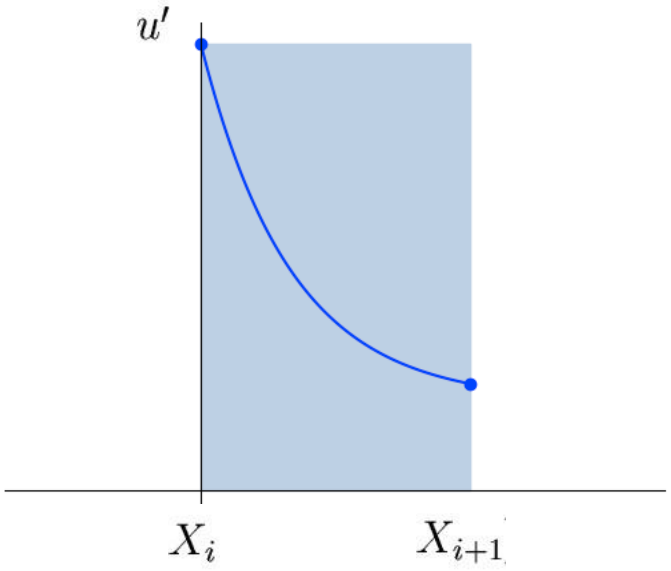
En approximant l'intégrale par un rectangle,

$$h\ f(X_i, U_i) \approx U_{i+1} - U_i$$



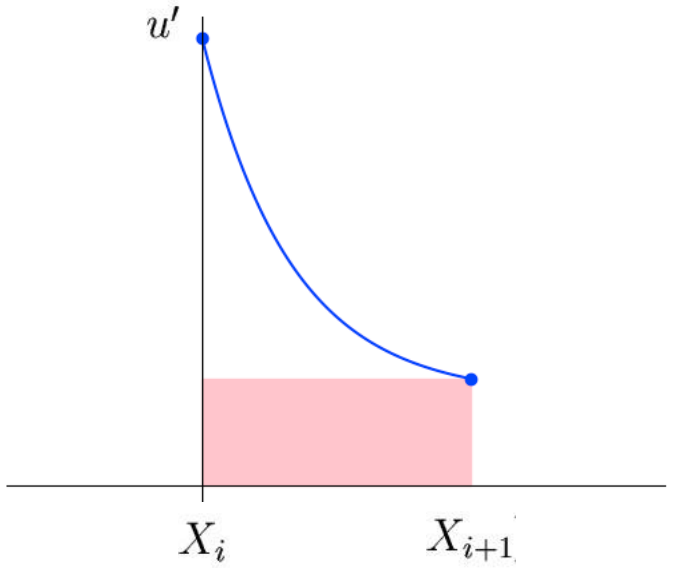
Idée

Il existe d'autres manières d'estimer cette intégrale !



Euler implicite

$$U_{i+1} - U_i = h\lambda\, U_{i+1}$$



$$U_{i+1} - U_i = h\lambda\, U_i$$

Euler explicite

Région de stabilité Euler implicite

$$U_{i+1}\left(1 - h\lambda\right) = U_i$$

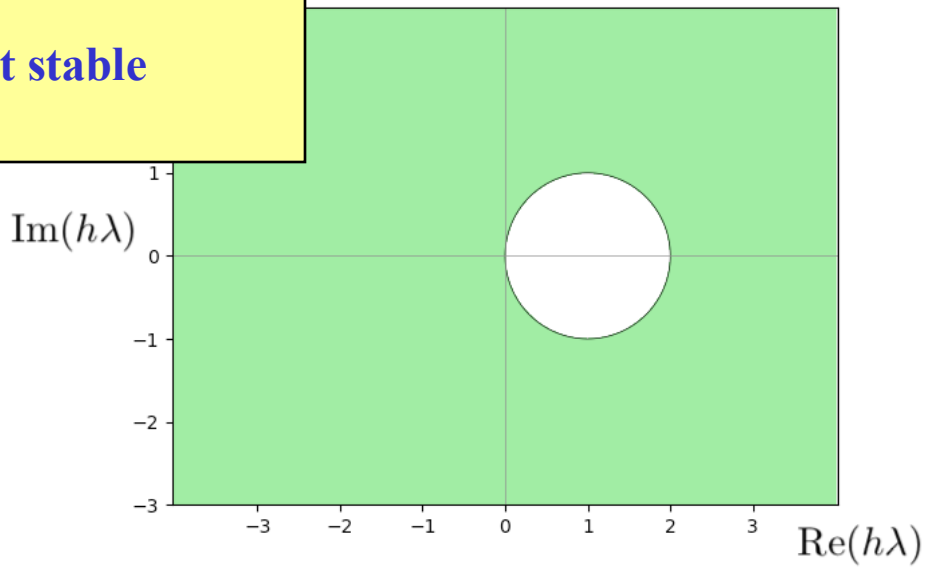
$$\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| < 1$$

Euler implicite

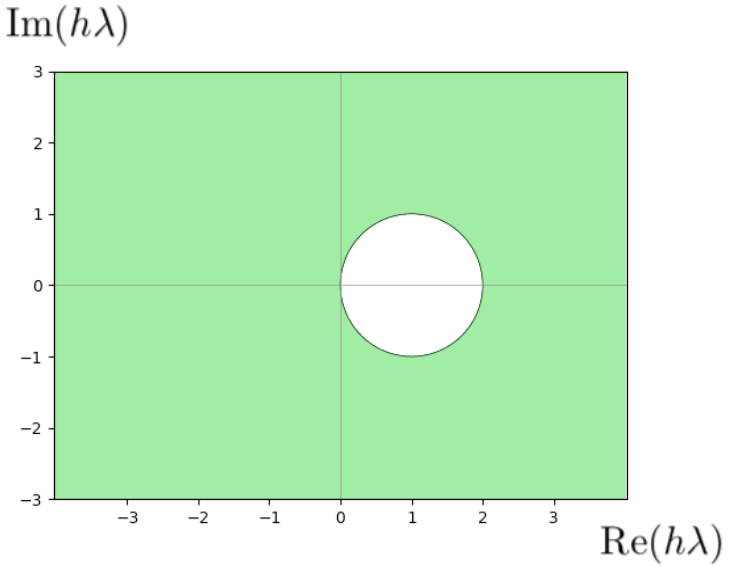
Ordre de précision linéaire

Méthode inconditionnellement stable

$$U_{i+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} U_i$$



La douce illusion de l'inconditionnellement stable...



Exemple :

u'(x) = sin(u(x))

$$U_{i+1} = U_i + h \sin U_{i+1}$$

Difficile, difficile, très difficile !

Euler implicite

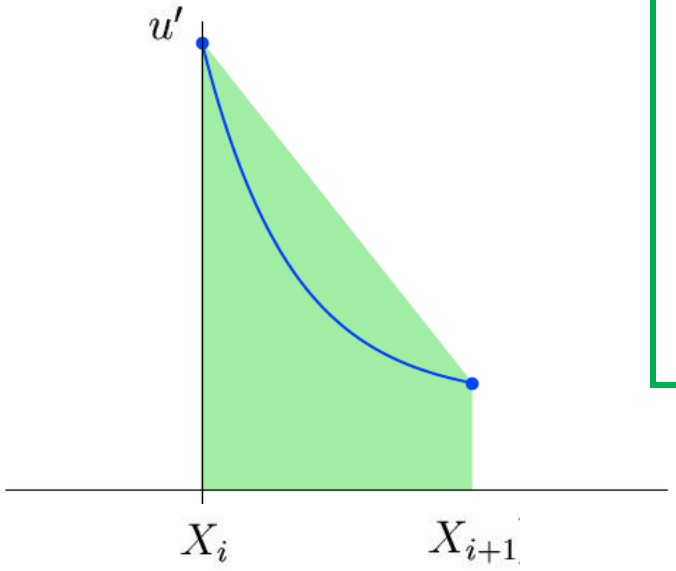
Ordre de précision linéaire

Equation à résoudre à chaque pas de temps

(équation non linéaire, si f non linéaire !)

Inconditionnellement stable

Méthode de Crank-Nicolson



$$U_{i+1} - U_i = h\lambda \left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2} \right)$$

Crank-Nicolson (trapèzes)

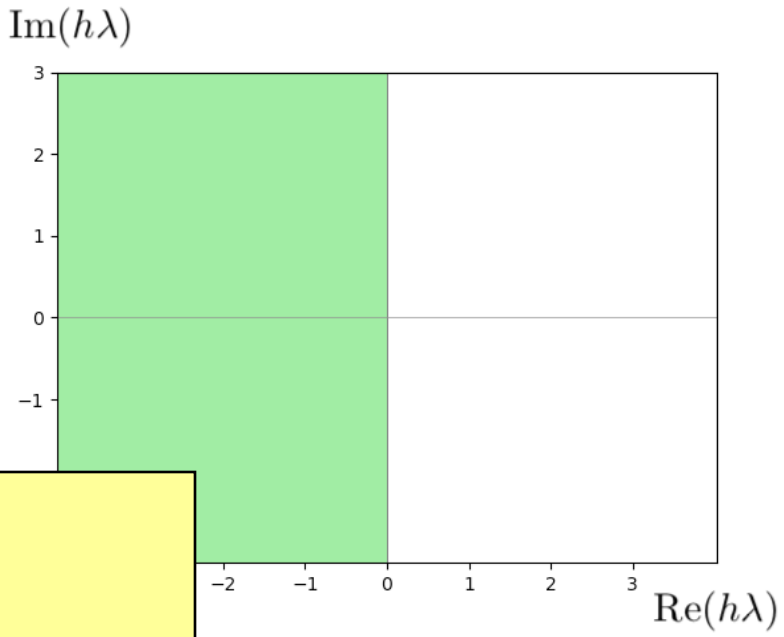
- **Ordre de précision quadratique**
- **Equation à résoudre à chaque pas de temps**
  - **(équation non linéaire, si f non linéaire !)**
- **Inconditionnellement stable**

Stabilité et précision

$$U_{i+1}\left(1 - h\lambda/2\right) = U_i\left(1 + h\lambda/2\right)$$

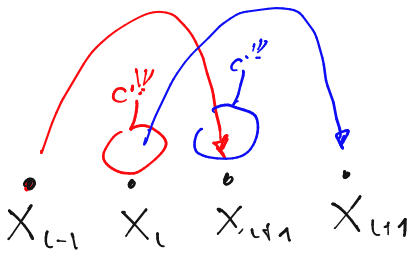
$$\left|\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right| < 1$$

$$\Re(h\lambda) < 0$$



Crank-Nicolson (trapèzes)

- **Ordre de précision quadratique**
- **Equation à résoudre à chaque pas de temps**
  - **(équation non linéaire, si f non linéaire !)**
- **Inconditionnellement stable**



Leapfrog Method

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i)$$

Méthode du Saute-Mouton

- **Méthode à pas liés**
- **Comment démarrer ?**
- **Ordre de précision ?**
- **Stabilité ?**

$$u'(X_i) \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

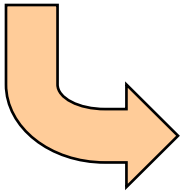
Il s'agit d'une méthode à pas liés car pour calculer U_{i+1}, il est nécessaire de connaître U_i et U_{i-1}.

Comment démarrer ?

Cette méthode peut être utilisée seulement lorsqu'on possède U_0 et U_1.
Il n'est donc pas possible de commencer directement le calcul.

1 pas d'une méthode à pas simple

- **Euler explicite ou implicite**
- **Crank-Nicolson**
- **Méthodes de Taylor d'ordre élevé**
- **Méthodes de Gear : on va y arriver !**



Et puis autant de pas de la méthode à pas double

- **Leapfrog**
- **Méthodes de Adams-Bashfort-Moulton : on va y arriver !**

Précision ?

$$U_{i+1} = U_{i-1} + \overbrace{2hF_i}^{2hF_i}$$

$$f(x_i, U_i) = U_i' \quad \text{avec } f(x_i,U_i) = F_i$$

$$U_{i-1} = U_i - \underbrace{h U_i'}_{-hF_i} + \frac{h^2}{2} U_i'' - \frac{h^3}{6} U_i'''$$

$$U_{i+1} = U_i + \underbrace{h U_i'}_{hF_i} + \frac{h^2}{2} U_i'' + \frac{h^3}{6} U_i'''$$

ERREUR GLOBALE $O(h^2)$

$$2hF_i = 2hF_i - \underbrace{\frac{2h^3}{6} U_i'''}_{\text{ERREUR LOCALE}}$$

ERREUR LOCALE $O(h^3)$

Précision ?

$$u'(X_i) = f(X_i, U_i)$$

$$\downarrow \quad \textit{En approximant } u'(X_i) \textit{ par la différence centrée d'ordre deux}$$

$$\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = f(X_i, U_i)$$

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2hf(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^3)$$

Méthode d'ordre deux

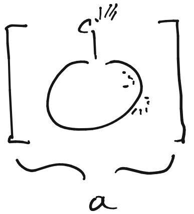
On gagne un ordre de précision en utilisant une différence centrée pour estimer la dérivée, contrairement aux méthodes d'Euler.

Les trapèzes sont une intégration centrée !
Leapfrog est une dérivation centrée !

$$U_{i+1} = U_{i-1} + 2h\lambda U_i$$

Stabilité ?

$$U_{i+1} = \Big[\quad \Big] U_i$$



(crochet : a)

SUPPOSONS CECI !

$$a^{i+1} U_0 = a^{i-1} U_0 + 2h\lambda a^i U_0$$

TROUVONS a SI IL EXISTE !

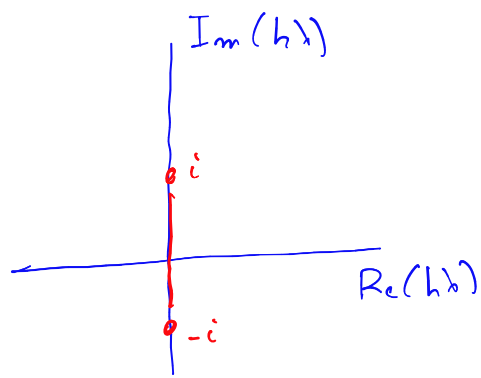
$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

POLYNOME DU SECOND DEGRE EN a

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}$$



Stabilité ?

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

Egalité obtenue pour le segment de –i à i
Dans cette zone, pas d'accroissement ou d'amortissement des perturbations…

Stabilité ?

a = facteur d'amplification de l'erreur initiale à chaque itération

$$U_i = a^i U_0$$

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

Problème modèle correspondant à la linéarisation en un instant

Changement de variable pour l'analyse des schémas à pas liés

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1} U_0 - a^{i-1} U_0$$

$$2h\lambda a^i U_0 = a^{i+1}U_0 - a^{i-1}U_0$$

$\downarrow$ *En simplifiant par* $a^{i-1}U_0$,

$$a^2 - 2h\lambda a - 1 = 0$$

$$a = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}$$

Région stable

$$|h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}| < 1$$

Egalité obtenue pour le segment de –i à i
Dans cette zone, pas d'accroissement ou d'amortissement des perturbations…

Systèmes d'équations différentielles

$$\begin{cases} u_1'(x) &= f_1(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \\ u_2'(x) &= f_2(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \\ \quad\vdots & \\ u_n'(x) &= f_n(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(a) &= \overline{u}_1 \\ u_2(a) &= \overline{u}_2 \\ \quad\vdots & \\ u_n(a) &= \overline{u}_n \end{cases}$$

Notation compacte : les vecteurs sont en gras.

Trouver $\mathbf{u}(x)$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(x) &= \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)), & x \in [a, b] \\ \mathbf{u}(a) &= \overline{\mathbf{u}} \end{cases}$$

C'est exactement la même histoire !

$$U_{ji} = u_j^h(X_i) \approx u_j(X_i)$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{u}^h(X_i) \approx \mathbf{u}(X_i)$$

Notation compacte : les vecteurs sont en gras.

Méthode d'Euler explicite

$$U_{ji+1} = U_{ji} + h f_j(X_i, U_{1i}, \ldots, U_{ni})$$

Tableau à deux indices

On calcule la j-ème composante du vecteur des inconnues à la i-ème abscisse temporelle

Vecteur

On calcule la j-ème composante du vecteur des inconnues.

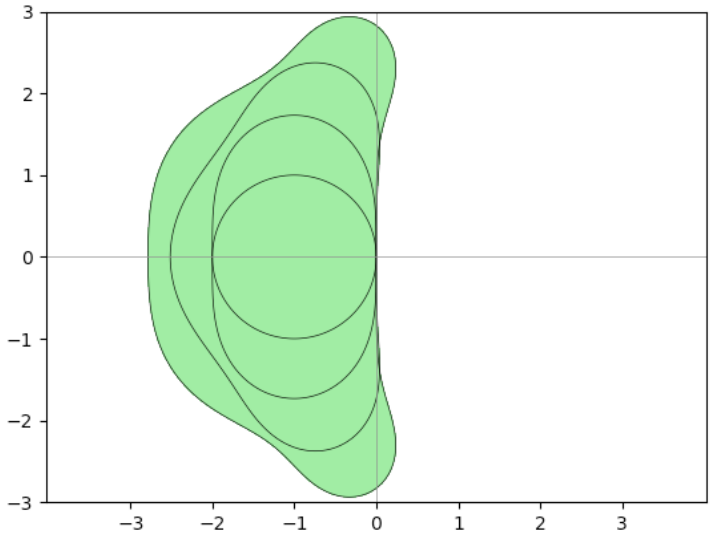
Stabilité des systèmes

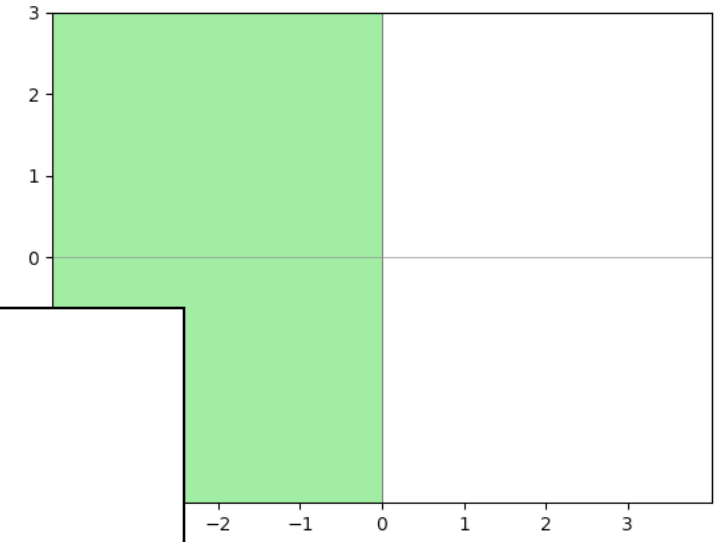
$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}(x)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{D}\mathbf{v}$$

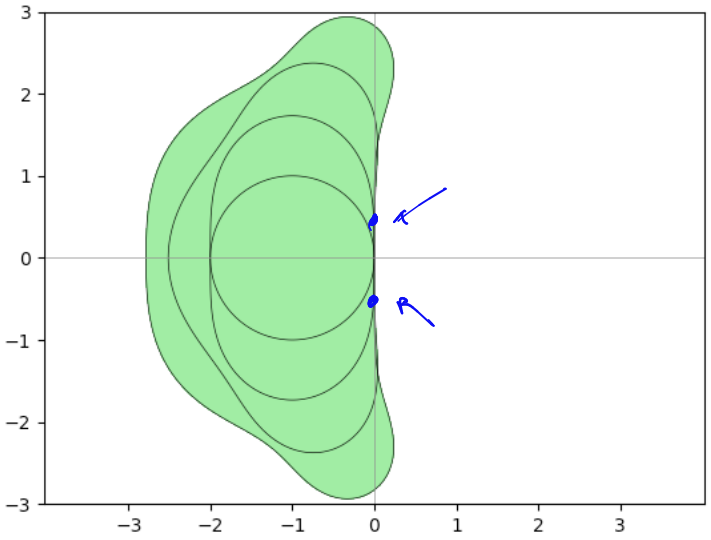




Le problème différentiel initial est équivalent à n équations scalaires

$$v_i'(x) = \lambda_i v_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Les complexes c'est utile !



$$m\,v''(t) = -k\,v(t)$$

$$v''(t) = -\frac{k}{m}\,v(t)$$

$$-\frac{k}{m} = -\omega^2$$

$$v(t) = C\,\exp(\pm i\omega t)$$

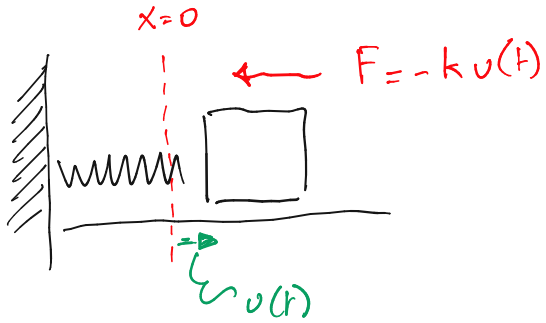
$$\exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t)$$

Thomas !

$$m\,u''(t) = -k\,u(t)$$

$$u''(t) = -\frac{k}{m}\,u(t)$$

$$-\omega^2$$



$$u(t) = C\,\exp(\pm i\omega t)$$

$$\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

LA METHODE
DU LEAP-FROG
EST OPTIMALE !

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) &= f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) &= \bar{u} \end{cases}$$

Problème de Cauchy…

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i + \tfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= f(X_i, U_i) \\ K_2 &= f(X_i + \tfrac{h}{2}, U_i + \tfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 &= f(X_i + \tfrac{h}{2}, U_i + \tfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i + \tfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 &= f(X_i, U_i) \\ K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2}) \end{aligned}$$

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$

… et les méthodes de Runge-Kutta (ode45)

Méthodes explicites de Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i + \tfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\
K_1 &= f(X_i, U_i) \\
K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})
\end{aligned}
$$

Heun (Runge-Kutta n=2)

$$
\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i + \tfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(X_i, U_i) \\
K_2 &= f(X_i + \tfrac{h}{2}, U_i + \tfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 &= f(X_i + \tfrac{h}{2}, U_i + \tfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3)
\end{aligned}
$$

"le classique" (Runge-Kutta n=4)

$$U_{i+1} = U_i + h\ f(X_i, U_i)$$

Euler explicite (Runge-Kutta n=1)

Runge-Kutta n quelconque

- **Ordre de précision arbitrairement élevé,**
- **Facile à mettre en oeuvre**
- **Conditionnellement stables (comme Taylor)**

Méthode de Heun
Comment choisir les paramètres ?

$$
\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2) \\
K_1 &= f(X_i, U_i) \\
K_2 &= f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i + \tfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\
K_1 &= f(X_i, U_i) \\
K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})
\end{aligned}
$$

Il faut la précision requise…

$$U_2 = U_1 + h\left[w_1 K_1 + w_2 K_2\right]$$

$K_1 = f(X_1, U_1) = F_1$

$K_2 = f(X_1 + \alpha h,\ U_1 + \beta h K_1)$

$$U_2 = U_1 + h F_1 + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} F_1\right] + \mathcal{O}(h^3)$$

TAYLOR ORDRE 2

$$U_2 = U_1 + h w_1 F_1 + h w_2 \, f(X_1 + \alpha h,\ U_1 + \beta h F_1)$$

$$f(X_1 + \alpha h,\ U_1 + \beta h F_1) = F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x}\alpha h + \frac{\partial F_1}{\partial u}\beta h F_1 + \mathcal{O}(h^2)$$

$$= U_1 + (h w_1 + h w_2) F_1 + h^2 w_2 \left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\alpha + \beta \frac{\partial F_1}{\partial u} F_1\right] + \mathcal{O}(h^3)$$

3 CONDITIONS

$w_1 + w_2 = 1$

$w_2 \alpha = 1/2$

$w_2 \beta = 1/2$

4 INCONNUES

HEUN

$w_1 = w_2 = 1/2$

$\alpha = \beta = 1$

Il faut la précision requise…

$$U_{i+1} = U_i + h\, f(X_i, U_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i)\; f(X_i, U_i)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$U_{i+1} = U_i + hw_1 f(X_i, U_i) + hw_2 f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

En effectuant un développement en série de Taylor de l'expression $f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$, autour de (X_i, U_i),

$$U_{i+1} = U_i + hw_1\; f(X_i, U_i) + hw_2\left(f(X_i, U_i) + \alpha h\, \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta h\, \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i)\; f(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^2)\right)$$

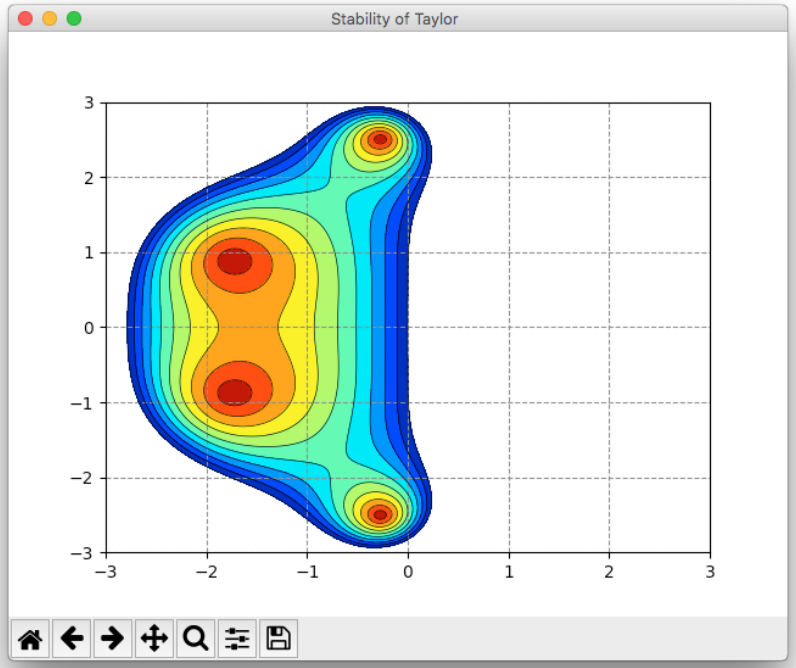
$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 + w_2)\; f(X_i, U_i) + h^2\; w_2\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i)\; f(X_i, U_i)\right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Identification des termes
3 relations à satisfaire
4 paramètres à choisir

Il existe plusieurs possibilités !

Les zones de stabilité de Runge-Kutta et de Taylor sont identiques...

On a construit les méthodes de Runge-Kutta en identifiant les développements en série de Taylor... En conséquence, les méthodes de Runge-Kutta et de Taylor sont IDENTIQUES pour un problème linéaire !

Mais, elles ne sont PAS identiques pour des problèmes non linéaires.

Finalement, comme l'analyse de stabilité se fait sur un problème linéaire, cette analyse fournira des résultats IDENTIQUES... Vérifiez ce résultat par vous-même en reproduisant le calcul effectué pour la méthode Leapfrog :-)