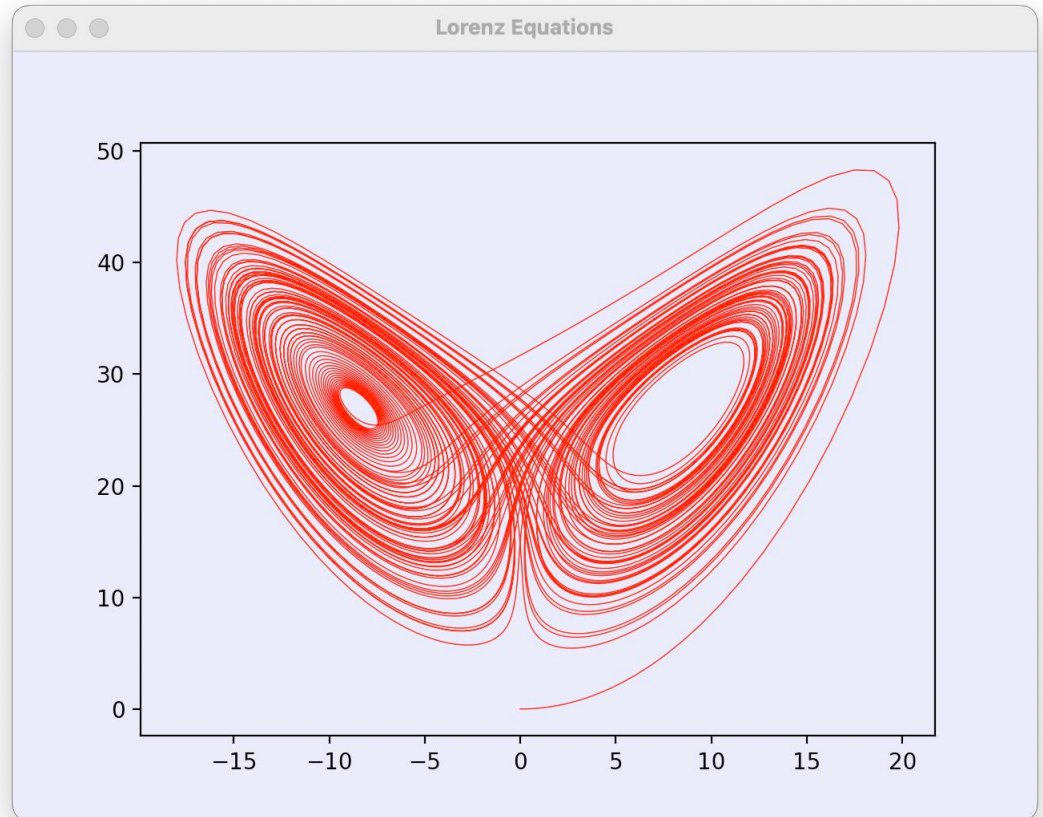
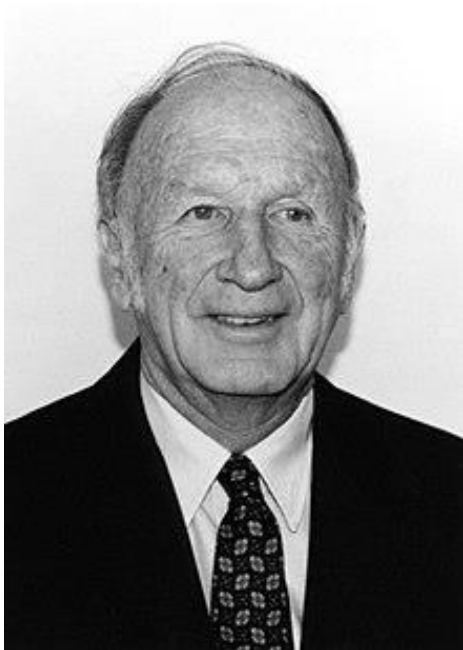
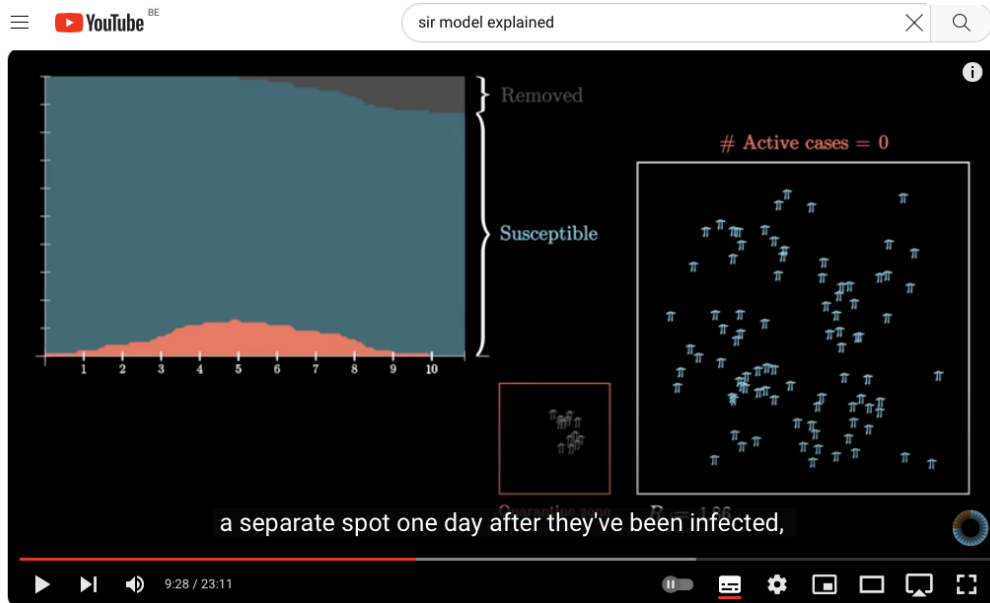
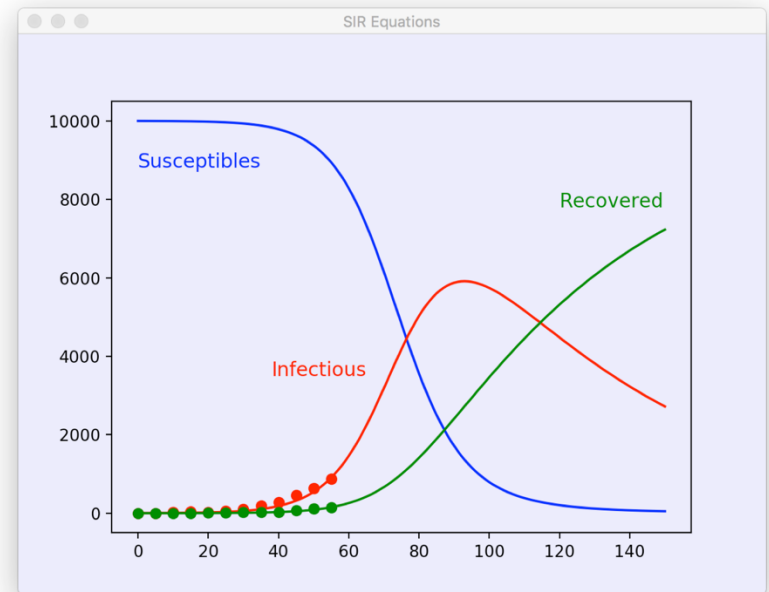


Un attracteur étrange



Une épidémie étrange...



Problème de Cauchy

Méthodes explicites

Rien à résoudre (**cool !**)

Stabilité conditionnelle (**embêtant !**)

Méthodes implicites

Il faut résoudre un problème (**dur, si non-linéaire !**)

Stables (**cool !**) (**parfois trop !**)

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) &= f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) &= \bar{u} \end{cases}$$

Méthodes explicites de Taylor

Il faut disposer de **nombreuses dérivées de f !**

Stabilité conditionnelle

Méthodes explicites de Runge-Kutta

Il faut seulement **disposer de la fonction f**

Stabilité (théoriquement, idem que Taylor)

Valeur exacte



$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$



Approximation numérique

Méthodes explicites de Runge-Kutta

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})\end{aligned}$$

Heun (Runge-Kutta n=2)

$$\begin{aligned}U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\K_1 &= f(X_i, U_i) \\K_2 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1) \\K_3 &= f(X_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2) \\K_4 &= f(X_i + h, U_i + hK_3)\end{aligned}$$

"le classique" (Runge-Kutta n=4)

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

**Euler explicite
(Runge-Kutta n=1)**

Runge-Kutta n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

Facile à mettre en oeuvre

Conditionnellement stables (comme Taylor)

Méthode de Heun

Comment choisir les paramètres ?

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + h, \underbrace{U_i + hK_1}_{P_2})$$

Il faut la
précision
requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$

$$\begin{aligned}
 U_2 &= U_1 + h \underbrace{F_1}_{f(U_1)=U_1'} + \frac{h^2}{2} \underbrace{F_1' F_1}_{f'(U_1) \frac{dU}{dx}|_{U_1}} + \mathcal{O}(h^3) \\
 U_2 &= U_1 + h w_1 F_1 + h w_2 \underbrace{f(U_1 + \beta h F_1)}_{F_1 + \beta h F_1' F_1 + \mathcal{O}(h^2)} \\
 &\quad + h w_2 (F_1 + \beta h F_1 F_1') + \mathcal{O}(h^3) \\
 &= U_1 + h (w_1 + w_2) F_1 + h^2 w_2 \beta F_1' F_1 + \mathcal{O}(h^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_1 + w_2 &= 1 \\
 \beta w_2 &= 1/2
 \end{aligned}$$

2 EQUATIONS
3 INCONNUES

Il faut la précision requisse...

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 K_1 + w_2 K_2)$$

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i) + h w_2 f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$$



En effectuant un développement en série de Taylor
de l'expression $f(X_i + \alpha h, U_i + \beta h K_1)$,
autour de (X_i, U_i) ,

$$U_{i+1} = U_i + h w_1 f(X_i, U_i)$$



$$+ h w_2 \left(f(X_i, U_i) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta h \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) + \mathcal{O}(h^2) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h(w_1 + w_2) f(X_i, U_i)$$

$$+ h^2 w_2 \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(X_i, U_i) + \beta \frac{\partial f}{\partial u}(X_i, U_i) f(X_i, U_i) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Identification des termes
3 relations à satisfaire
4 paramètres à choisir

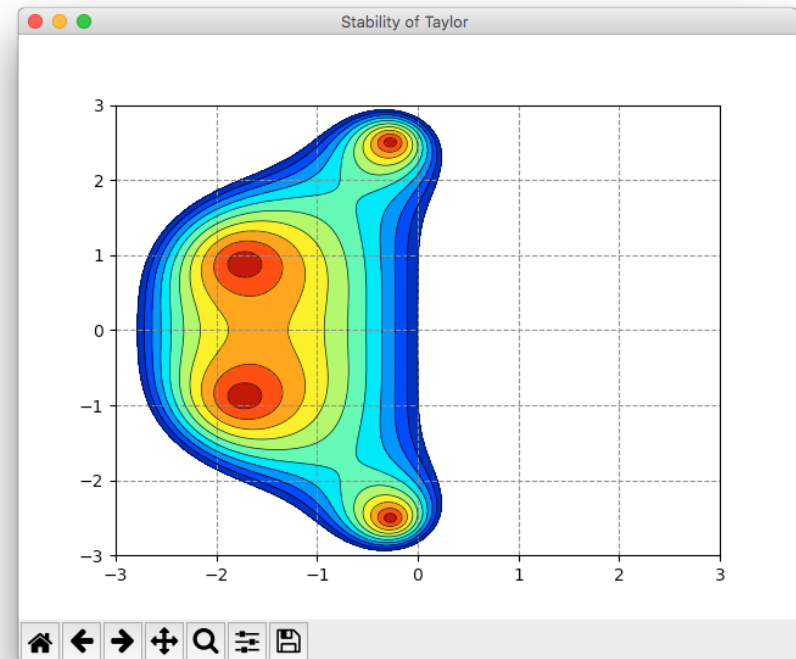
**Il existe plusieurs
possibilités !**

Les zones de stabilité de Runge-Kutta et de Taylor sont identiques...

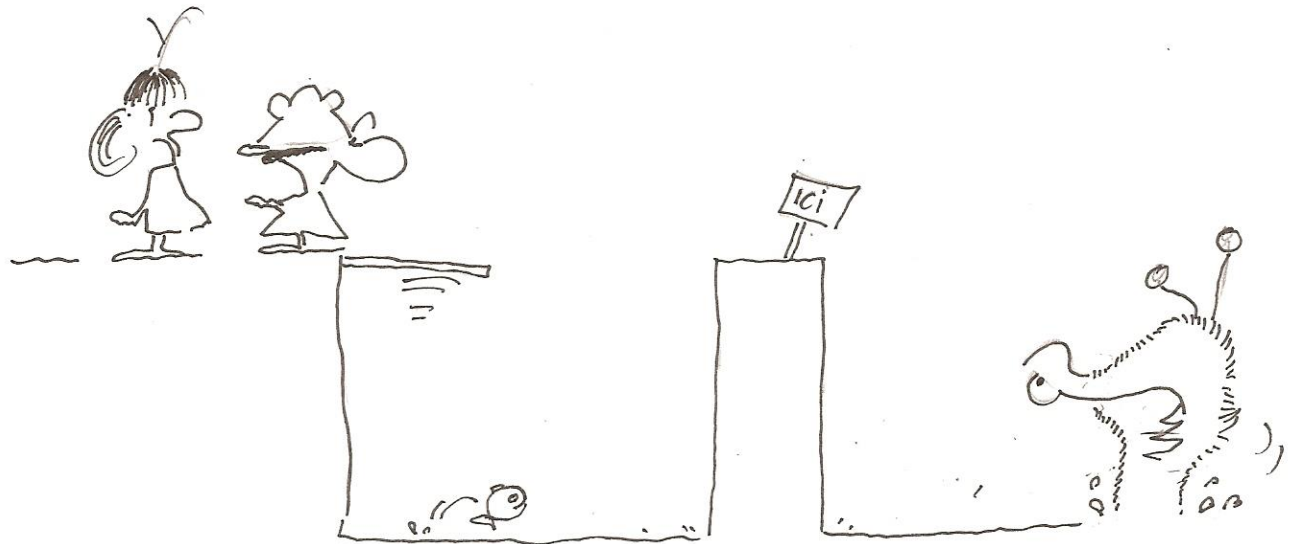
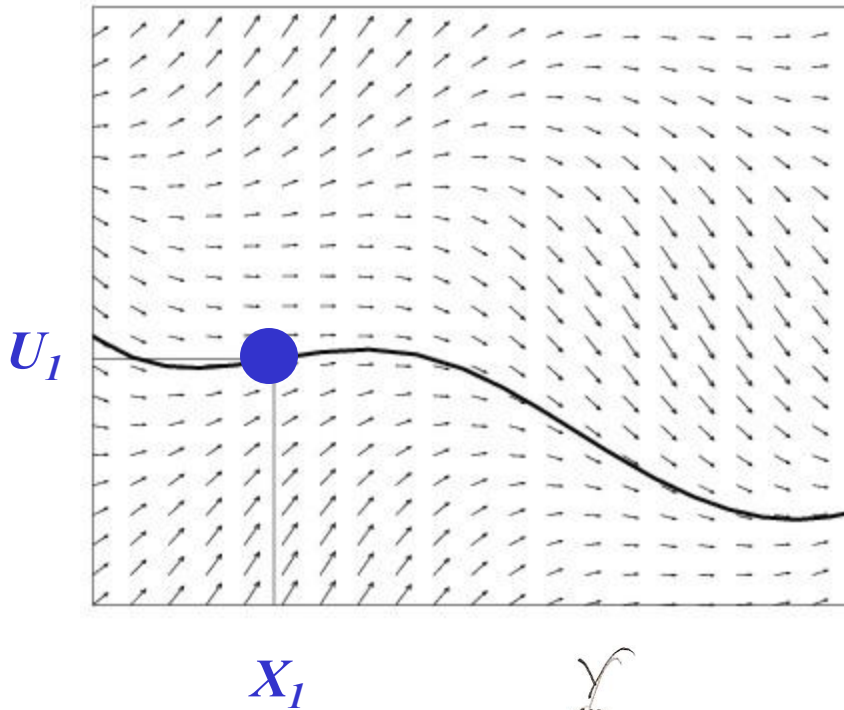
On a construit les méthodes de Runge-Kutta en identifiant les développements en série de Taylor... En conséquence, les méthodes de Runge-Kutta et de Taylor sont **IDENTIQUES** pour un problème linéaire !

Mais, elles ne sont **PAS** identiques pour des problèmes non linéaires.

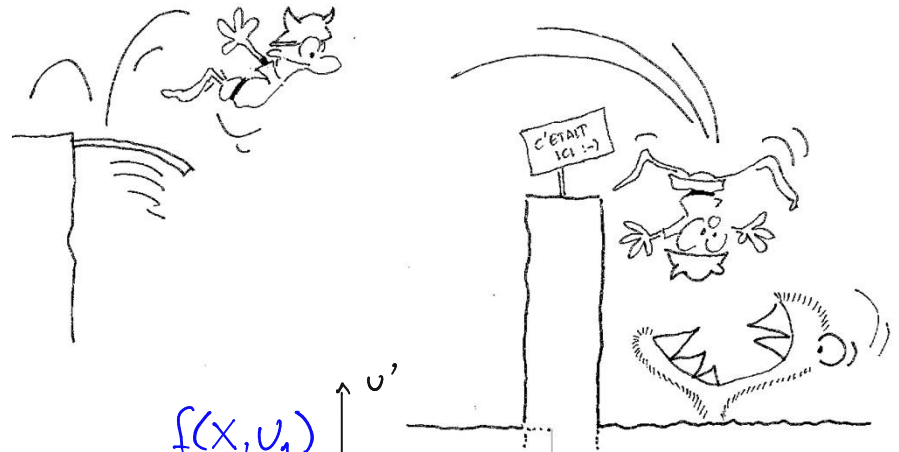
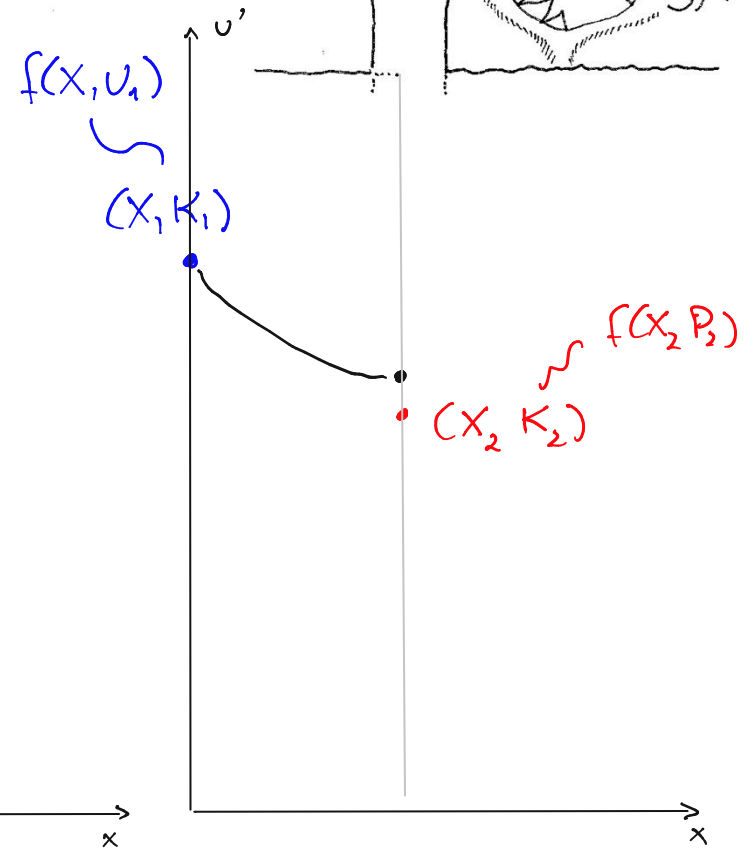
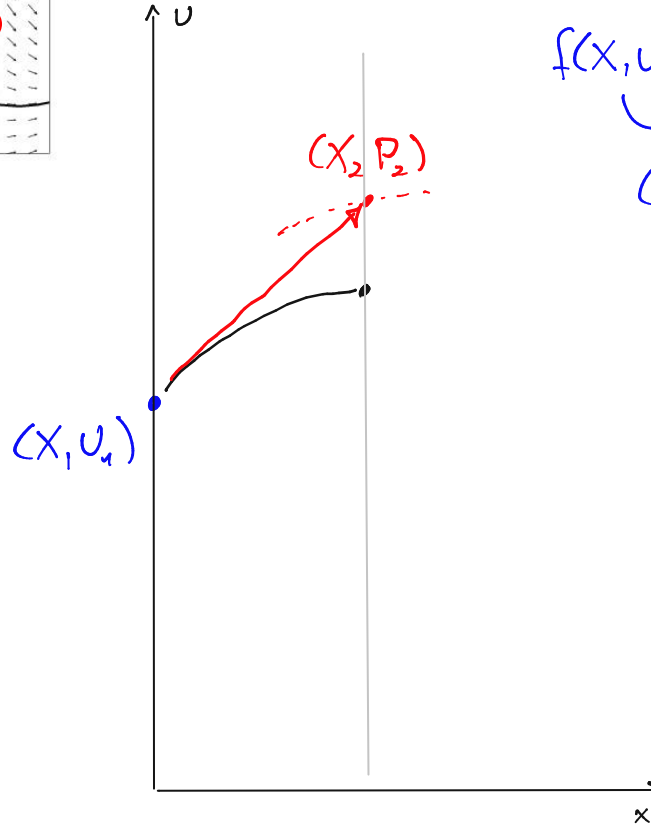
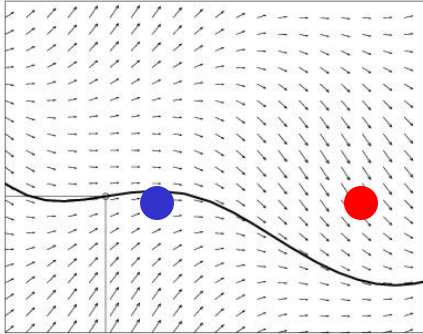
Finalement, comme l'analyse de stabilité se fait sur un problème linéaire, cette analyse fournira des résultats **IDENTIQUES**... **Vérifiez ce résultat par vous-même en reproduisant le calcul effectué pour la méthode Leapfrog :-)**



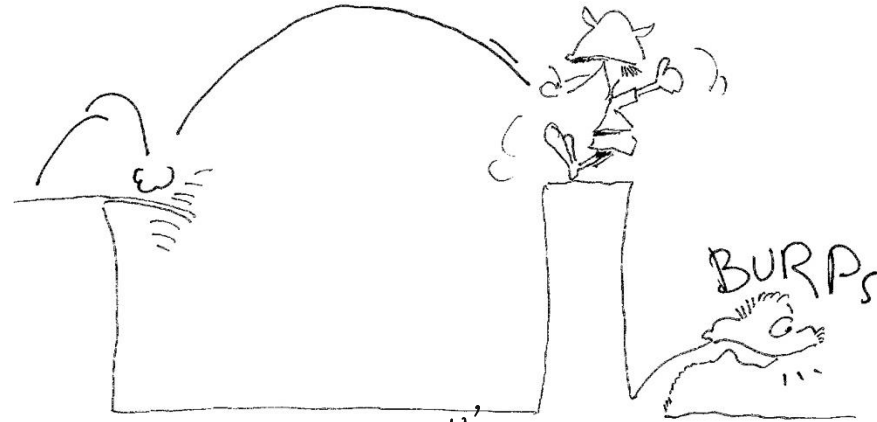
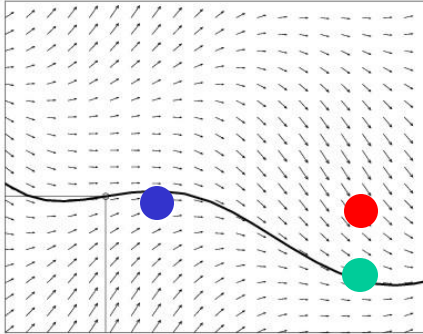
Interprétation des méthodes de Runge-Kutta



Prédiction

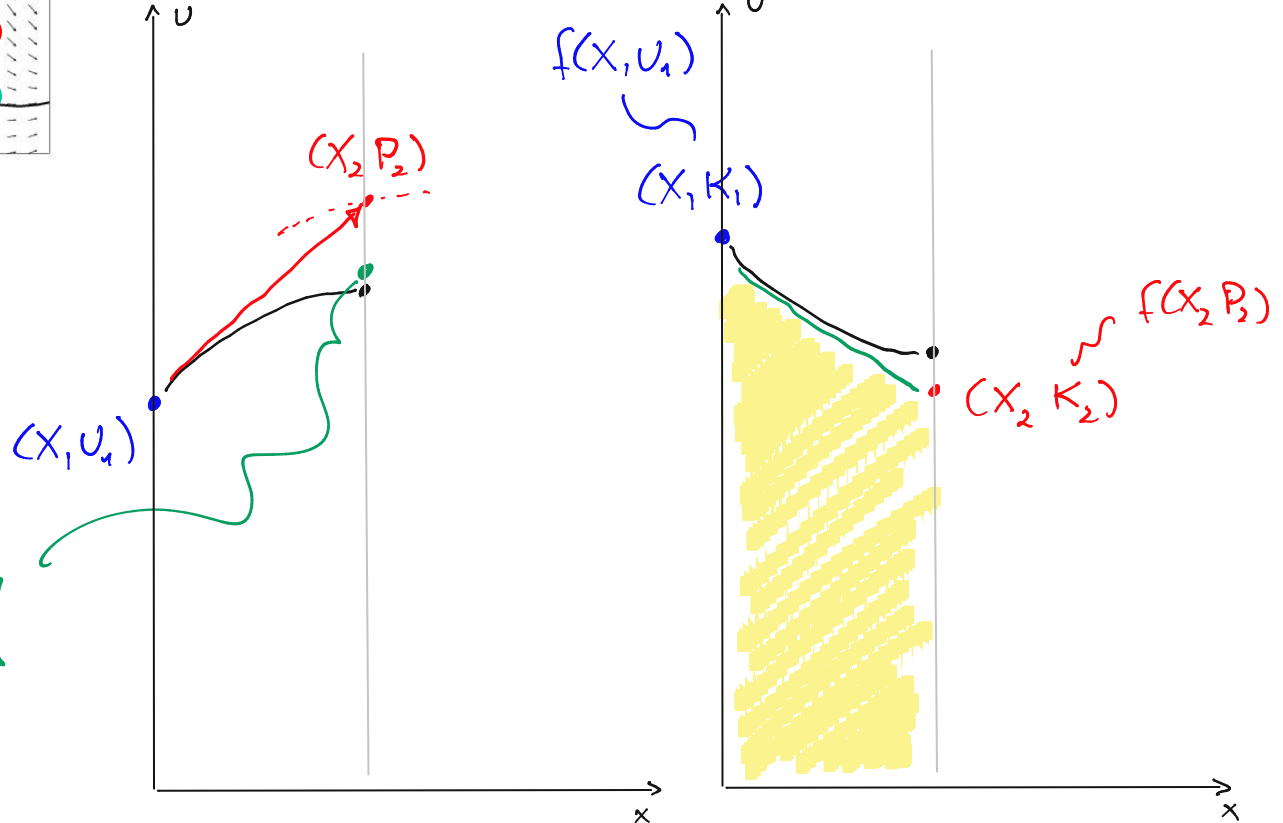


Correction

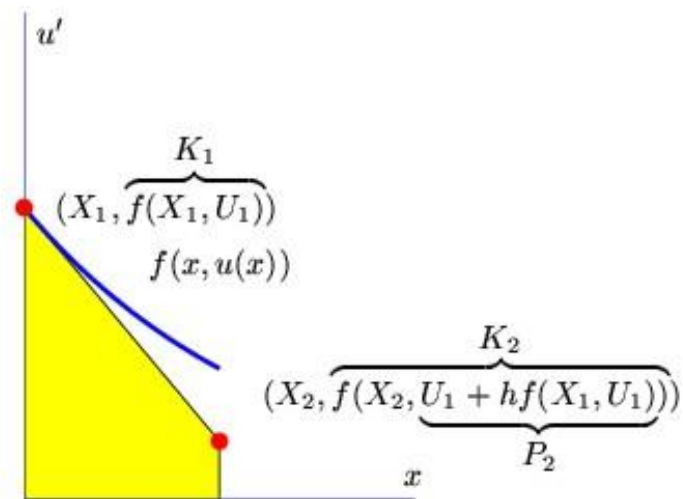
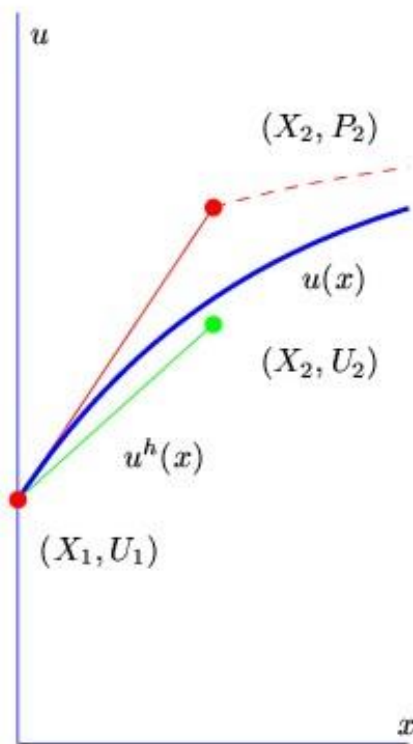
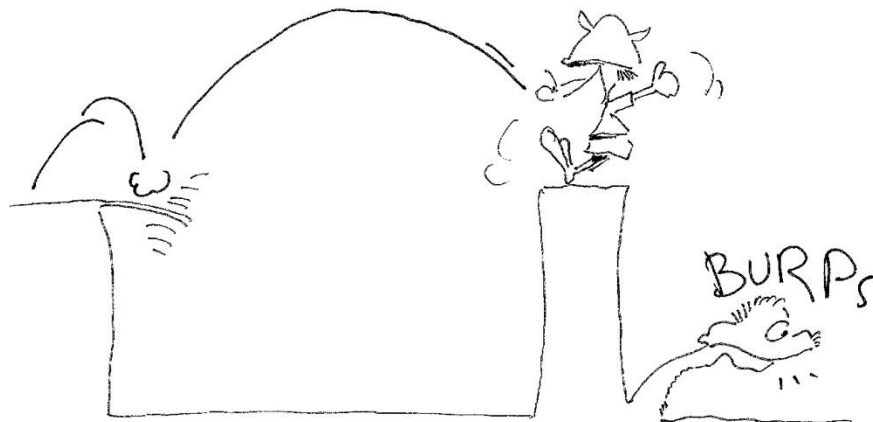
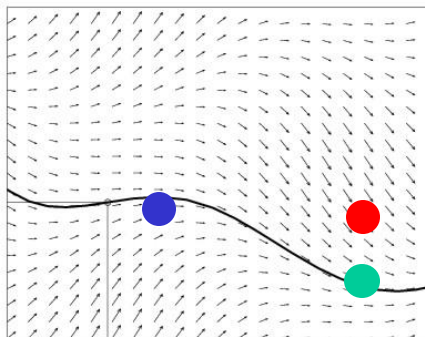


$$U_2 = U_1 + h \left[\frac{K_1 + K_2}{2} \right]$$

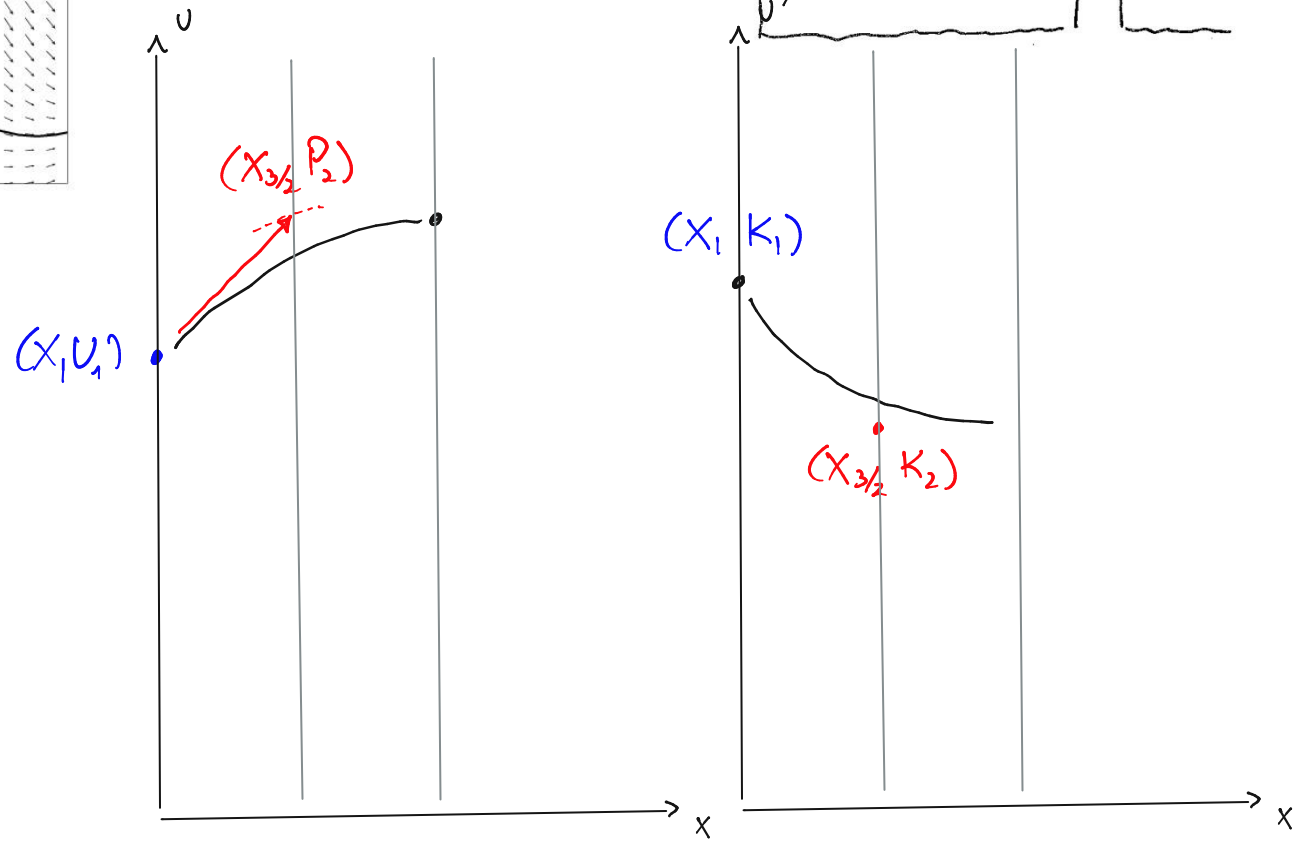
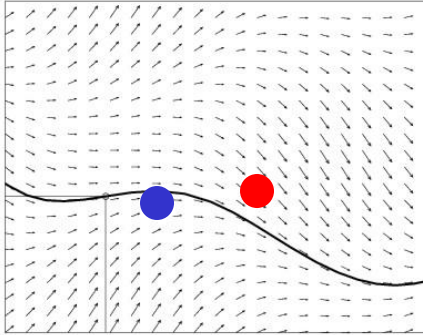
TRAPEZES



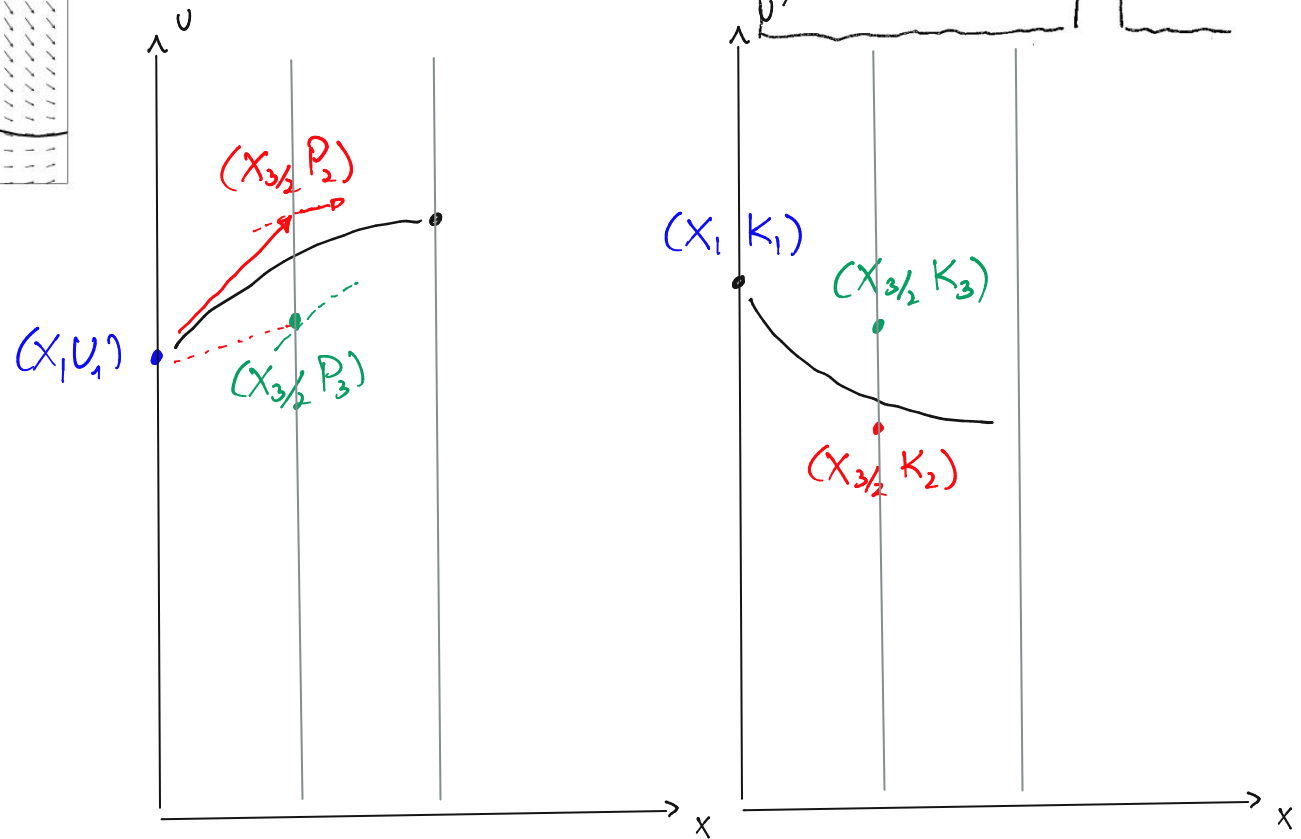
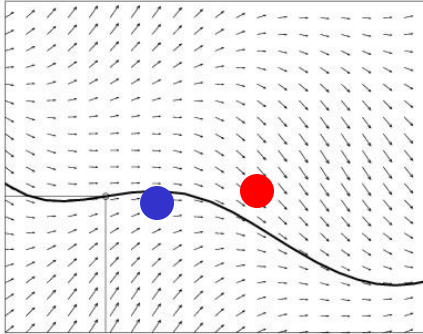
Correction



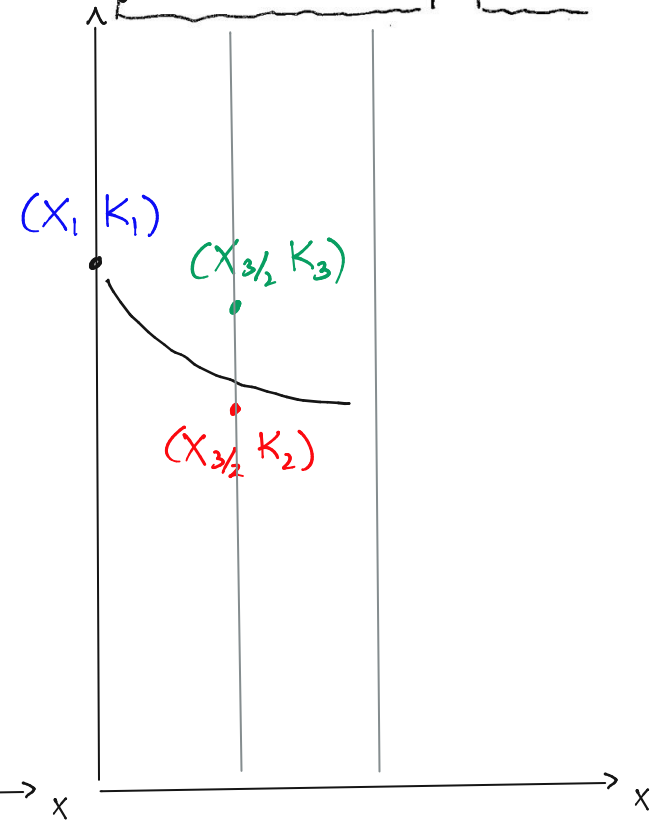
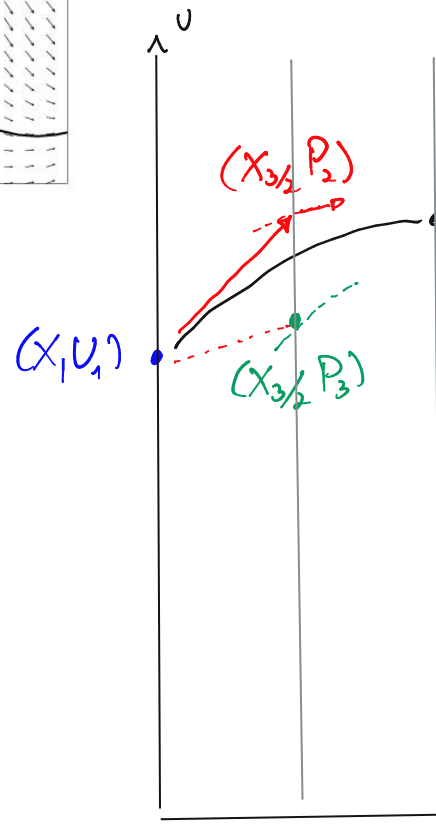
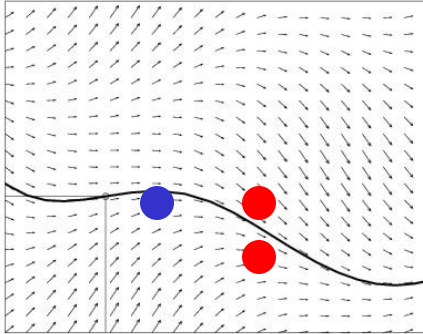
Prédiction



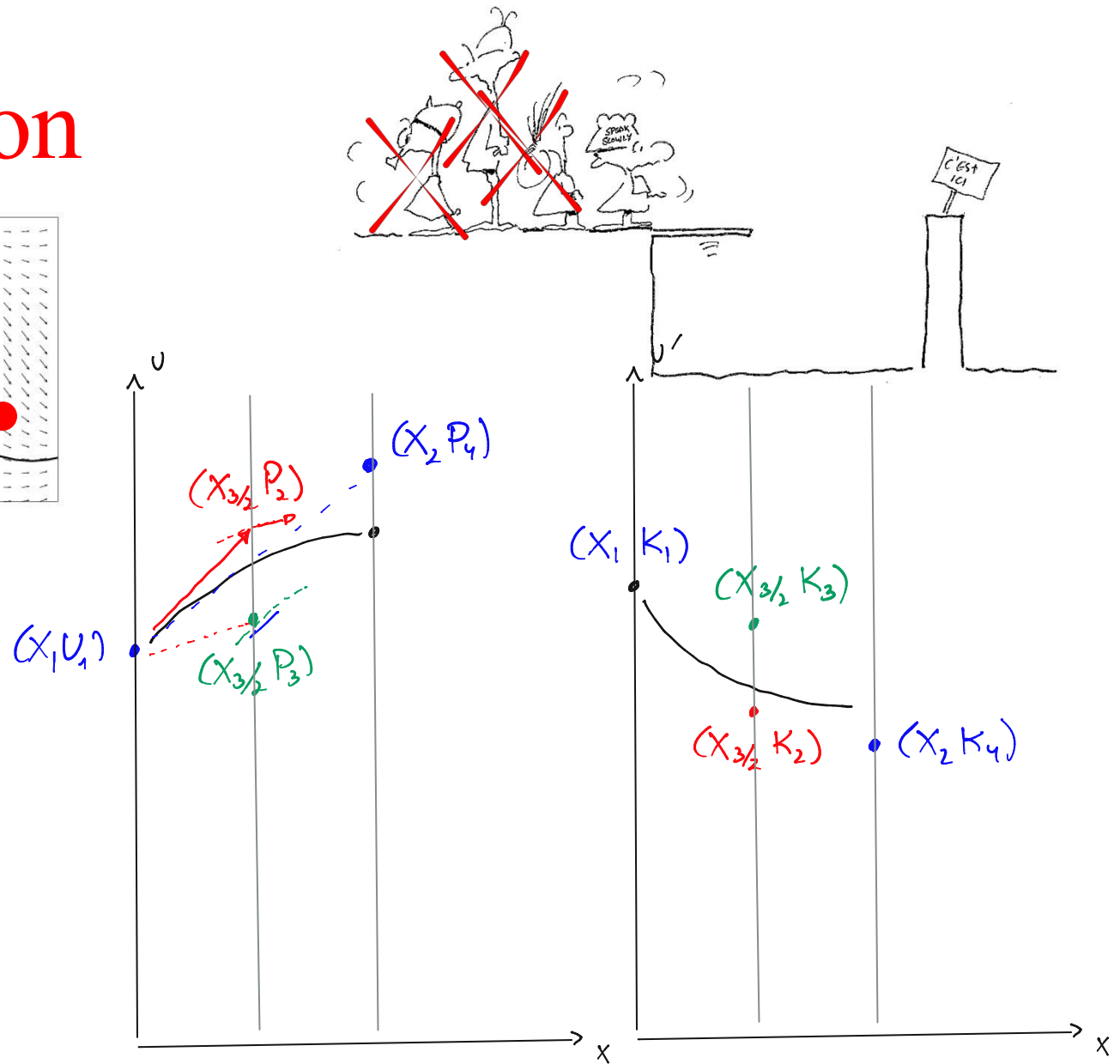
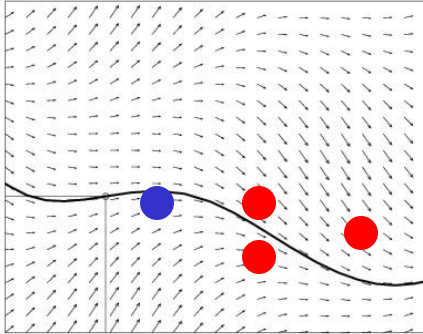
Prédiction



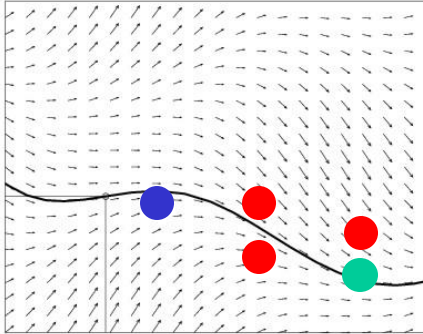
Prédiction



Prédiction

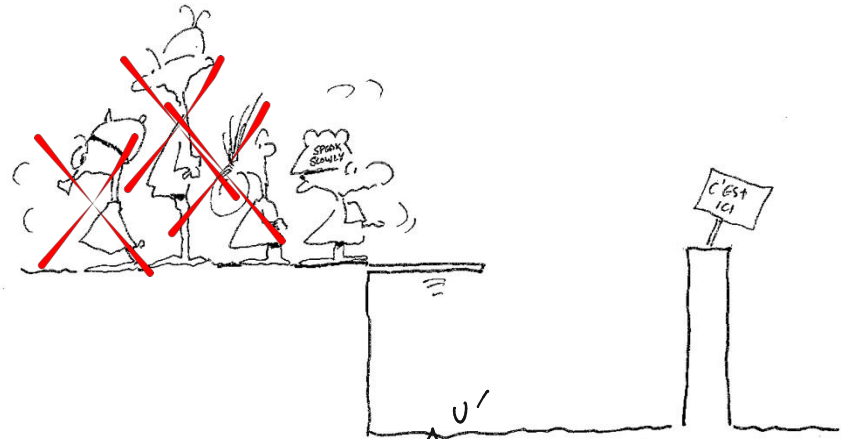
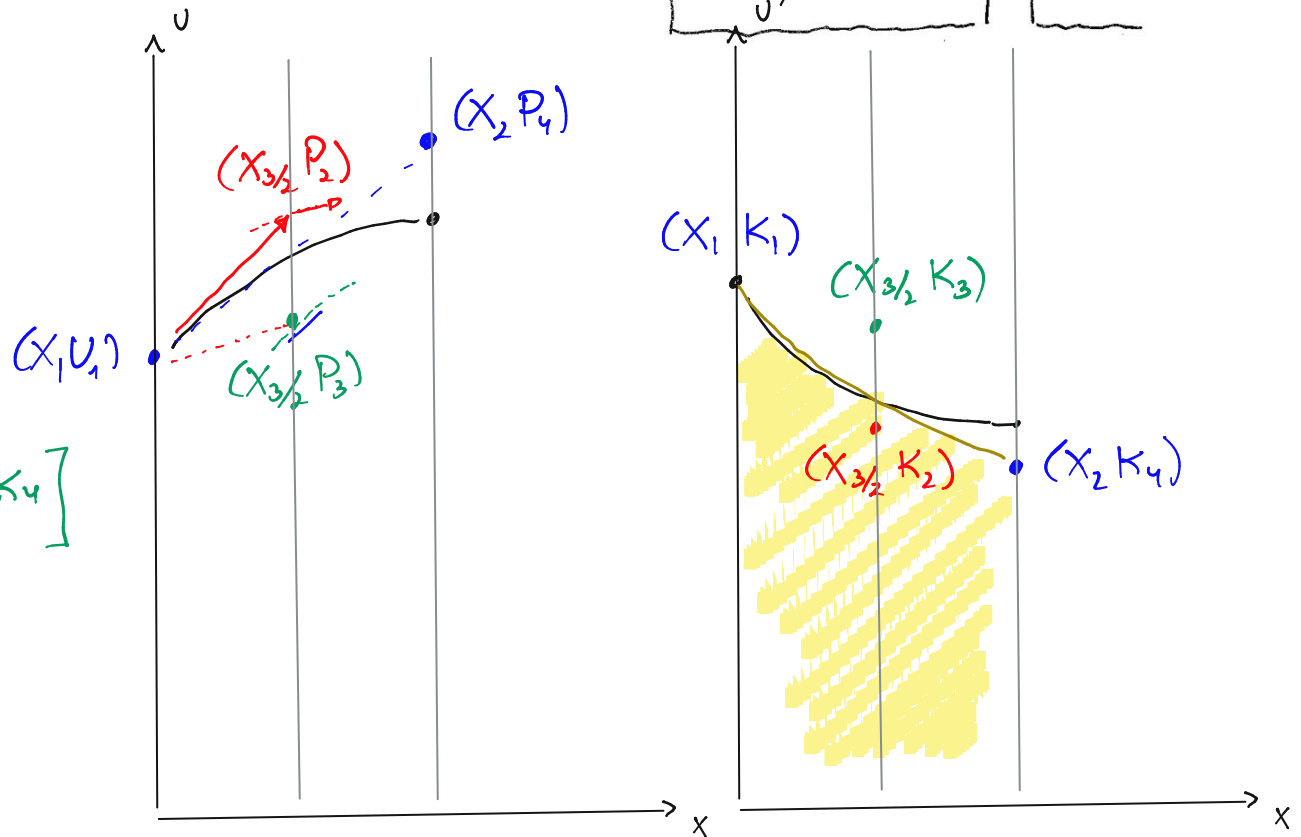


Correction

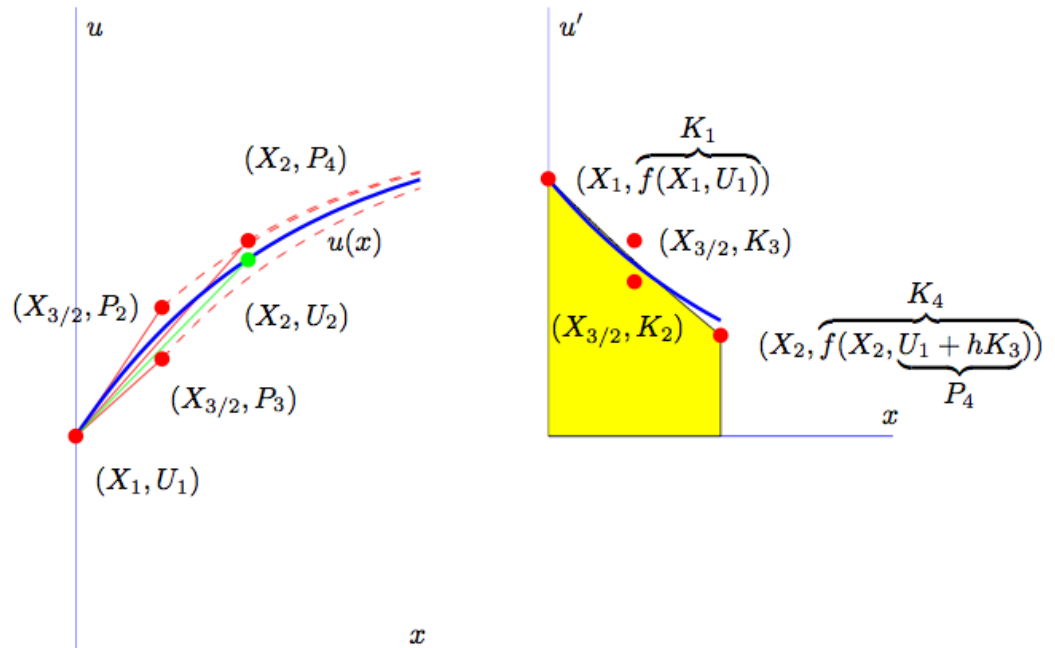
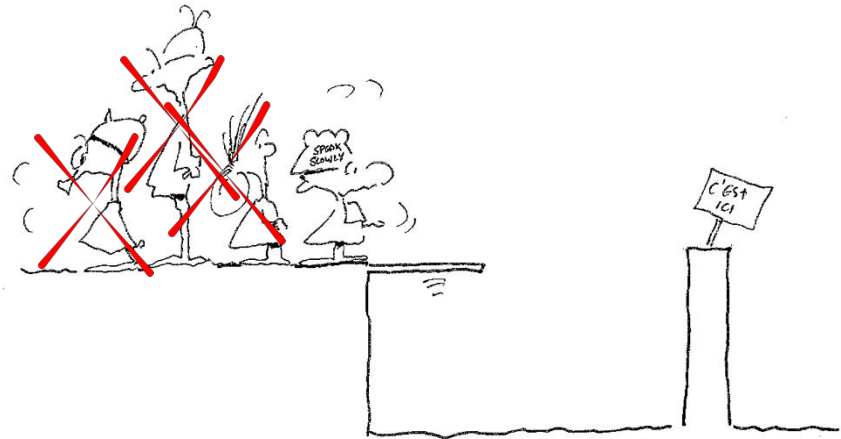
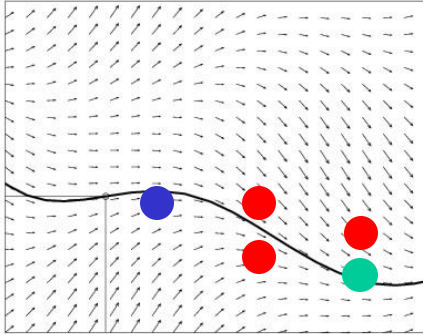


$$U_2 = U_1 + \frac{h}{6} \left[K_1 + 2K_2 + K_4 + 2K_3 \right]$$

SIMPSON



Correction



Runge-Kutta-Fehlberg

$$P_{i+1} = U_i + h\left(\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5\right)$$

$$U_{i+1} = U_i + h\left(\frac{16}{235}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6\right)$$

$$K_1 = f(X_i, U_i)$$

$$K_2 = f\left(X_i + \frac{h}{4}, U_i + \frac{h}{4}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(X_i + \frac{3h}{8}, U_i + \frac{3h}{32}K_1 + \frac{9h}{32}K_2\right)$$

$$K_4 = f\left(X_i + \frac{12h}{13}, U_i + \frac{1932h}{2197}K_1 - \frac{7200h}{2197}K_2 + \frac{7296h}{2197}K_3\right)$$

$$K_5 = f\left(X_i + h, U_i + \frac{439h}{216}K_1 - 8hK_2 + \frac{3680h}{513}K_3 - \frac{845h}{4104}K_4\right)$$

$$K_6 = f\left(X_i + \frac{h}{2}, U_i - \frac{8h}{27}K_1 + 2hK_2 - \frac{3544h}{2565}K_3 - \frac{1859h}{4104}K_4 - \frac{11h}{40}K_5\right)$$

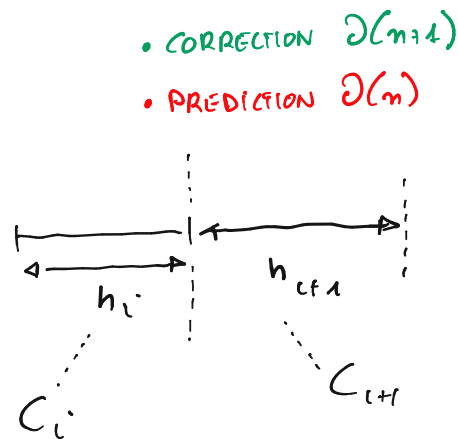
Calcul simultané et efficace de deux approximations de la valeur

P_{i+1} une approximation d'ordre 4

U_{i+1} une approximation d'ordre 5

La différence permet d'obtenir une estimation de l'erreur locale commise

Comment choisir un nouveau pas h_{i+1} ?



ESTIMATION
DE L'ERREUR

$$\Theta_{i+1} < \varepsilon$$

$$\Theta_i = C h_i^{n+1}$$

$$\Theta_{i+1} = C h_{i+1}^{n+1}$$

$|U_i - P_i|$

ERREUR
LOCALE
COMMISE
PAR UNE
METHODE
D'ORDRE n

CE QUE
JE VEUX
OBTENIR

$$\Theta_{i+1} = \Theta_i \left[\frac{h_{i+1}}{h_i} \right]^{n+1}$$

STRATEGIE
ADAPTATIVE
 $C_i \approx C_{i+1}$

$$h_{i+1} = h_i \left[\frac{\varepsilon}{\Theta_i} \right]^{1/n+1}$$

$$h_{i+1} = h_i \left[\frac{\varepsilon}{\theta_i} \right]^{1/n+1}$$

$$\theta_i \simeq 0 \longrightarrow h_{i+1} \simeq \infty$$

On construit une stratégie adaptative basée sur des arguments heuristiques peu rigoureux...

Stratégie **prudente** ou **intrépide** selon votre caractère

Comment choisir un nouveau pas h_{i+1} ?

On construit une stratégie adaptative basée sur des arguments heuristiques peu rigoureux...

Stratégie **prudente** ou **intrépide** selon votre caractère

Estimation de l'erreur locale que l'on vient de commettre au pas précédent h_i

Relations heuristiques

$$\theta_i = Ch_i^{n+1}$$

$$\theta_{i+1} = Ch_{i+1}^{n+1}$$

$$\theta_{i+1} \approx \theta_i \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{n+1}$$

*Tolérance
Erreur acceptable*

$$h_{i+1} \leq h_i \left(\frac{\epsilon}{\theta_i} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Estimation de l'erreur que l'on commettra au pas suivant : elle doit satisfaire le critère

$$\theta_{i+1} \leq \epsilon$$

Stratégie adaptative

- 1 Estimation de l'erreur commise à l'étape courante i avec le pas h_i en effectuant le calcul de θ_i . On utilise la différence entre la prédiction et la correction pour effectuer cette estimation.

$$\theta_i = |U_{i+1} - P_{i+1}|$$

- 2 Est-ce que le critère d'erreur est respecté ? Si $\theta_i > \epsilon$, il faut recommencer le pas courant i avec un plus petit pas de temps. On choisira comme nouveau pas $h = h_i/2$. Il convient aussi de vérifier que le nouveau pas de temps n'est pas inférieur à une limite minimale h_{min} fixée a priori. Si cela arrive, le programme s'arrête de manière définitive avec un constat d'échec !
- 3 Estimation d'un nouveau pas optimal $\hat{h}$ à partir de l'estimation θ_i de l'erreur locale qui vient d'être commise au pas précédent.

$$\hat{h} = h_i \left(\frac{\epsilon}{\theta_i} \right)^{\frac{1}{(n+1)}}$$

- 4 Si $\hat{h} > h_i$, on choisit comme nouveau pas : $h_{i+1} = \min(\hat{h}, \frac{3}{2}h_i, h_{max})$
- 5 Si $\hat{h} < h_i$, on choisit comme nouveau pas : $h_{i+1} = \max(\hat{h}, \frac{1}{2}h_i, h_{min})$



Méthodes d'Adams

Idée 0

Méthodes à pas liés

On souhaite exploiter
la connaissance des valeurs passées.

$$U_{i+1} = U_i + h \sum_{j=-1}^n \beta_j \underbrace{f(X_{i-j}, U_{i-j})}_{F_{i-j}} \quad (i \geq n).$$

*On utilise $n+1$ valeurs précédentes :
Méthodes à pas liés*

Adams-Bashfort-Moulton n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,
Prédicteur explicite à pas liés,
Correcteur (semi-)implicite à pas liés,
Conditionnellement stables

Interpolation

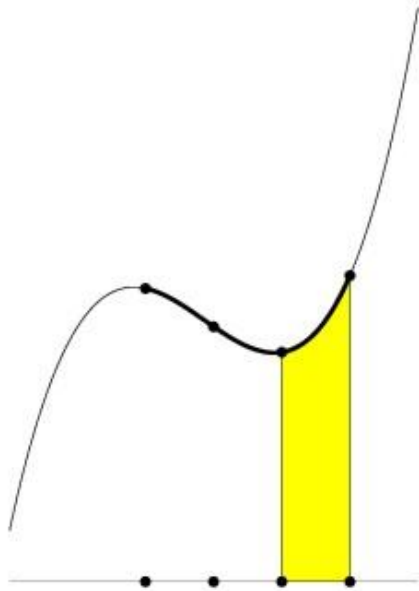
$$U_{i+1} = U_i + \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx$$

Extrapolation

Interpolation

$$U_{i+1} = U_i + h F_i$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} (3 F_i - F_{i-1})$$



Adams-Moulton $\mathcal{O}(h^4)$

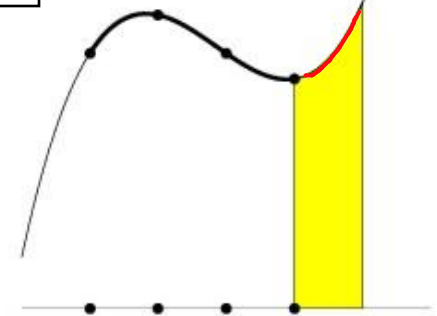
Implicite

$$U_{i+1} = U_i + \int_{X_i}^{X_{i+1}} f(x, u(x)) dx$$

$$U_{i+1} = U_i + h F_{i+1}$$

$$U_{i+1} = U_i + h \left[\frac{F_i + F_{i+2}}{2} \right]$$

Explicite



Adams-Bashforth $\mathcal{O}(h^4)$

Extrapolation

Estimer l'erreur à un pas

Méthodes prédicteur-correcteur

On souhaite obtenir une estimation
de l'erreur locale.

Idée 1

$\dot{U}_0$
 P_1 ~ METHODE EXPLICITE
 $\dot{U}_1$ ~ METHODE IMPLICITE

$$P_1 = U_0 + \frac{h}{24} [-9F_3 + 37F_2 - 59F_1 + 55F_0]$$

ADAMS
BASHFORTH
ORDRE 4

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{24} \int$$

ADAMS
MOULTON
ORDRE 4

$$F_2 - 5F_1 + 19F_0 + 9F_1$$

$\hookrightarrow f(X_1, P_1)$

Estimer le terme implicite

Méthodes prédicteur-correcteur

Obtenir une estimation de U_{i+1} pour les
formules des méthodes implicites

Idée 2

$$\boxed{P_1} = U_0 + \frac{h}{2} [3F_0 - F_{-1}]$$

PREDICTION
ADAMS
BASHFORTH
ORDRE 2

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} \left[F_0 + \underbrace{f(P_1)}_{\approx F_1} \right]$$

CORRECTION
ADAMS
MOULTON
ORDRE 2

LE TERME IMPLICITE
EST APPROCHE AVEC $U_1 \approx P_1$

Mais est-ce encore implicite ?

Méthodes prédicteur-correcteur

Obtenir une estimation de U_{i+1} pour les formules des méthodes implicites

Idée 2

$$[P_1] = U_0 + \frac{h}{2} [3F_0 - F_{-1}]$$

PREDICTION
ADAMS
BASHFORTH
ORDRE 2

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} \left[F_0 + \underbrace{f(P_1)}_{\approx F_1} \right]$$

CORRECTION
ADAMS
MIDPOINT
ORDRE 2

LE TERME IMPLICITE
EST APPROCHE AVEC $U_1 \approx P_1$

$$U' = \lambda U$$

$$U_1 = U_0 + \frac{h}{2} \left[\lambda U_0 + \lambda \left[\underbrace{U_0 + \frac{h\lambda}{2} [3U_0 - U_{-1}]}_{f(P_1)} \right] \right]$$

$$U_1 = U_0 + h\lambda U_0 + \frac{h^2\lambda^2}{2} \left[\frac{3U_0 - U_{-1}}{2} \right]$$

Pratiquement...

$$U_{i+1} = U_i + h F_i$$

$$|e_i| \leq \frac{C_2}{2} h^2 \quad (\text{Euler explicite - Adams-Bashforth d'ordre 1}) \quad \mathcal{O}(h)$$

$$U_{i+1} = U_i + h F_{i+1}$$

$$|e_i| \leq \frac{C_2}{2} h^2 \quad (\text{Euler implicite - Adams-Moulton d'ordre 1}) \quad \mathcal{O}(h)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \left(-F_{i-1} + 3F_i \right)$$

$$|e_i| \leq \frac{5C_3}{12} h^3 \quad (\text{Adams-Bashforth d'ordre 2}) \quad \mathcal{O}(h^2)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \left(F_i + F_{i+1} \right)$$

$$|e_i| \leq \frac{C_3}{12} h^3 \quad (\text{trapèzes - Adams-Moulton d'ordre 2}) \quad \mathcal{O}(h^2)$$

Estimer l'erreur à un pas

$$(u(X_{i+1}) - U_{i+1})^2 \approx \underbrace{\left(\frac{-19}{270} (U_{i+1} - P_{i+1}) \right)^2}_{\theta_{i+1}^2}$$

$$P_{i+1} = U_i + \frac{h}{24} \left(-9f(X_{i-3}, U_{i-3}) + 37f(X_{i-2}, U_{i-2}) - 59f(X_{i-1}, U_{i-1}) + 55f(X_i, U_i) \right)$$

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{24} \left(f(X_{i-2}, U_{i-2}) - 5f(X_{i-1}, U_{i-1}) + 19f(X_i, U_i) + 9f(X_{i+1}, P_{i+1}) \right)$$

$$u(X_{i+1}) - P_{i+1} = \frac{251h^5}{720} u^{(5)}(\xi_{i+1}),$$

$$u(X_{i+1}) - U_{i+1} = \frac{-19h^5}{720} u^{(5)}(\zeta_{i+1}).$$

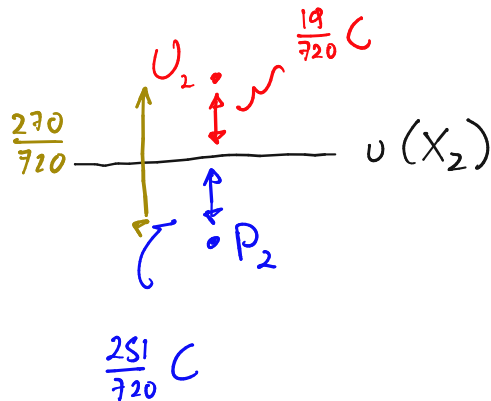
Estimer l'erreur à un pas

$$\frac{-19}{720} C = -\frac{19}{720} \frac{720}{270} (U_2 - P_2)$$

$$(u(X_{i+1}) - U_{i+1})^2 \approx \underbrace{\left(\frac{-19}{270} (U_{i+1} - P_{i+1}) \right)^2}_{\theta_{i+1}^2}$$

$$\begin{aligned} u(X_2) - U_2 &= -\frac{19}{720} C \\ - [u(X_2) - P_2 &= \frac{251}{720} C] \\ \hline P_2 - U_2 &= \left(-\frac{251}{720} - \frac{19}{720} \right) C \end{aligned}$$

$$C = \frac{720}{270} [U_2 - P_2]$$



$$\begin{aligned} u(X_{i+1}) - P_{i+1} &= \frac{251h^5}{720} u^{(5)}(\xi_{i+1}), \\ u(X_{i+1}) - U_{i+1} &= \frac{-19h^5}{720} u^{(5)}(\zeta_{i+1}). \end{aligned}$$

Méthodes de Gear

$$u_{i+1}^h(x) = \sum_{j=0}^n U_{i+1-j} \phi_j(x)$$

$$\begin{aligned} u'(X_{i+1}) &= \underbrace{f(X_{i+1}, \overbrace{u(X_{i+1})}^{U_{i+1}})}_{F_{i+1}} \\ &\downarrow \\ (u_{i+1}^h)'(X_{i+1}) &\approx F_{i+1} \\ &\downarrow \\ \sum_{j=0}^n U_{i+1-j} \phi_j'(X_{i+1}) &\approx F_{i+1} \\ &\downarrow \\ U_{i+1} &\approx \frac{1}{\phi_0'(X_{i+1})} \left(- \sum_{j=1}^n U_{i+1-j} \phi_j'(X_{i+1}) + F_{i+1} \right) \end{aligned}$$

Gear n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,

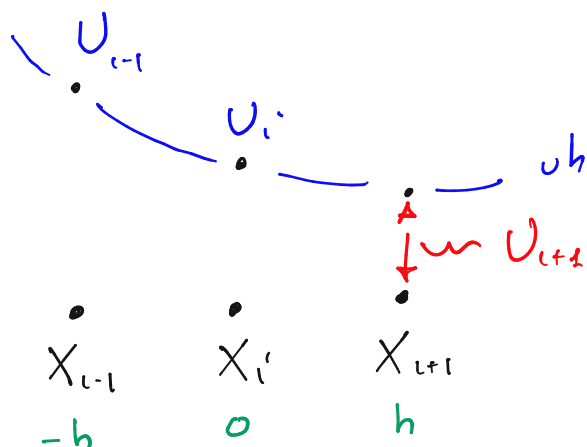
Implicites à pas liés

Très stables sur l'axe réel (ok pour problèmes réels raides)

Calcul des coefficients

$$o^h(x) = U_{i+1} \underbrace{\text{graph}}_{\frac{(x+h)x}{2h^2}} + U_i \underbrace{\text{graph}}_{\frac{(x-h)(x+h)}{-h^2}} + U_{i-1} \underbrace{\text{graph}}_{\frac{(x-h)x}{2h^2}} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$\left. (o^h)'(x) \right|_{x=X_{i+1}} = U_{i+1} \underbrace{\left. \frac{2x+h}{2h^2} \right|_h}_{\frac{3h}{2h^2}} + U_i \underbrace{\left. \frac{2x}{-h^2} \right|_h}_{\frac{2h}{-h^2}} + U_{i-1} \underbrace{\left. \frac{2x-h}{2h^2} \right|_h}_{\frac{h}{2h^2}} + \mathcal{O}(h^2)$$



$$h F_{i+1} = \frac{3}{2} U_{i+1} - 2 U_i + \frac{1}{2} U_{i-1} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i-1} + \frac{2}{3} h F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

Gear-2

$$u_{i+1}^h(x) = U_{i+1} \phi_0(x) + U_i \phi_1(x) + U_{i-1} \phi_2(x)$$

$$= U_{i+1} \frac{(x - X_i)(x - X_{i-1})}{2h^2}$$

$$+ U_i \frac{(x - X_{i+1})(x - X_{i-1})}{-h^2} + U_{i-1} \frac{(x - X_{i+1})(x - X_i)}{2h^2}$$



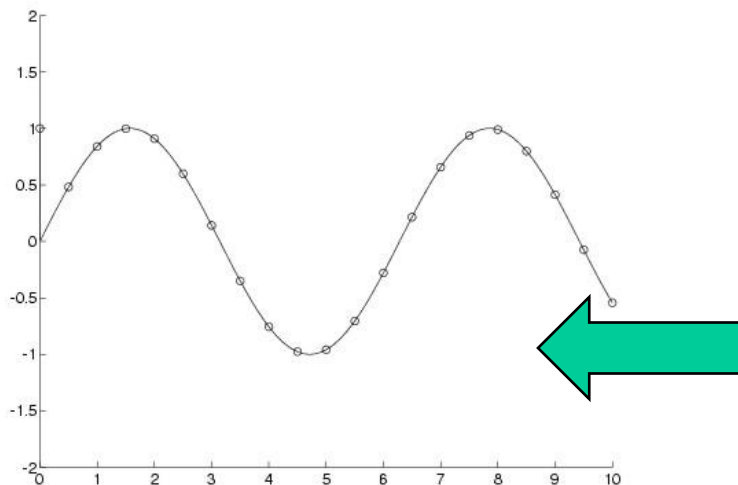
$$(u_{i+1}^h)'(x) = U_{i+1} \frac{(2x - X_i - X_{i-1})}{2h^2}$$

$$+ U_i \frac{(2x - X_{i+1} - X_{i-1})}{-h^2} + U_{i-1} \frac{(2x - X_{i+1} - X_i)}{2h^2}$$



$$(u_{i+1}^h)'(X_{i+1}) = U_{i+1} \left(\frac{3h}{2h^2} \right) + U_i \left(\frac{-2h}{h^2} \right) + U_{i-1} \left(\frac{h}{2h^2} \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}U_{i+1} - 2U_i + \frac{1}{2}U_{i-1} \right)$$



$$U_{i+1} = \frac{4}{3}U_i - \frac{1}{3}U_{i-1} + \frac{2h}{3}F_{i+1}.$$

Précision ?

ERREUR
LOCALE

$$\mathcal{O}(h^3)$$

ERREUR
GLOBALE

$$\mathcal{O}(h^2)$$

METHODE
ORDRE 2

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i-1} + \frac{2}{3} h F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = a U_i$$

Stabilité ?

$$U_{i+1} = \frac{4}{3} U_i - \frac{1}{3} U_{i+1} + \frac{2}{3} h F_{i+1} + \mathcal{O}(h^3)$$

$$v' = \lambda v$$

$$a^{i+1} \cancel{U_0} = \frac{4}{3} a^i \cancel{U_0} - \frac{1}{3} a^{i+1} \cancel{U_0} + \underbrace{\frac{2h\lambda}{3} a^{i+1} \cancel{U_0}}_{\frac{2}{3} h F_{i+1}}$$

$$a^2 = \frac{4}{3} a - \frac{1}{3} + \frac{2h\lambda}{3} a^2$$

$$\max(|a'|, |a''|)$$

