Journée des droits des femmes

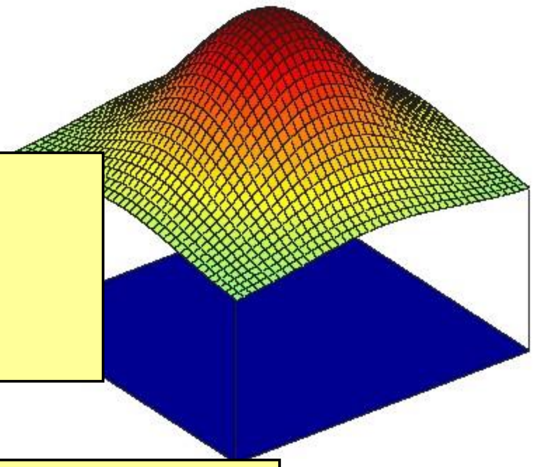
Margaret Heafield Hamilton, née le 17 août 1936,
est une informaticienne et ingénieure système.
Elle était directrice du département software engineering
qui conçut le système embarqué du programme spatial Apollo

https://www.youtube.com/watch?v=4sKY6_nBLG0

Journée des droits des femmes

Comment communiquer en écrivant
des textes lisibles et inclusifs
en n’invisibilisant pas les femmes
et les personnes non-binaires…

Plan du cours de méthodes numériques



Comment résoudre numériquement un problème aux valeurs initiales ?

Comment interpoler une fonction ?

Comment approximer une fonction ?

Comment dériver numériquement une fonction ?

Comment résoudre numériquement un problème aux conditions frontières ?

Comment intégrer numériquement une fonction ?

Et les équations non linéaires ?

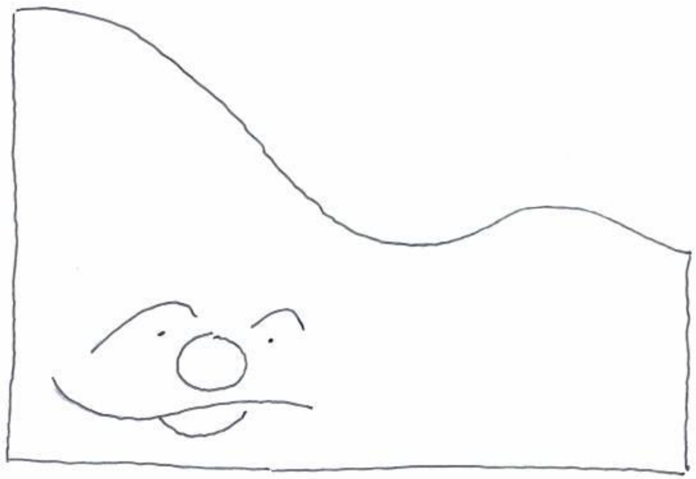
Et les méthodes itératives ?

Comment résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Comment résoudre numériquement une équation aux dérivées partielles ?

Une surface à intégrer….



Comment l'intégrer sur un ordinateur ?

Intégration numérique

Quadrature :

On estime l'intégrale définie I en effectuant une somme pondérée des valeurs u(X_i)

$$I = \int_a^b u(x)\, dx$$

Abscisses d'intégration calculées a priori

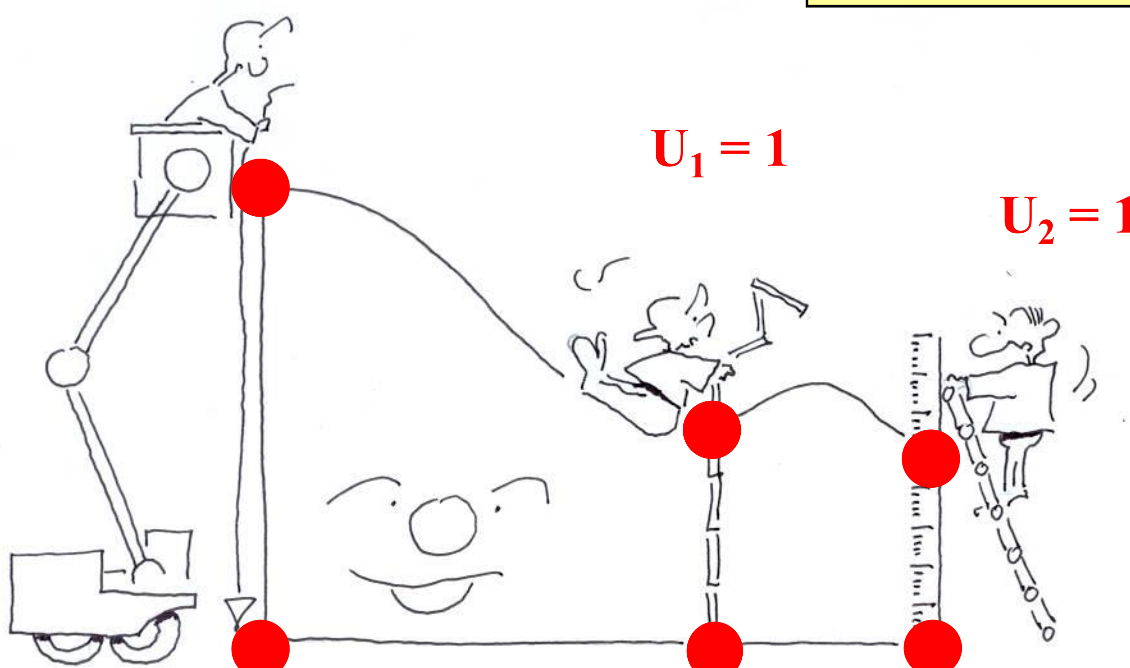
$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{m} w_i\, u(X_i)$$

Poids calculés a priori

$$E^h = I - I^h$$

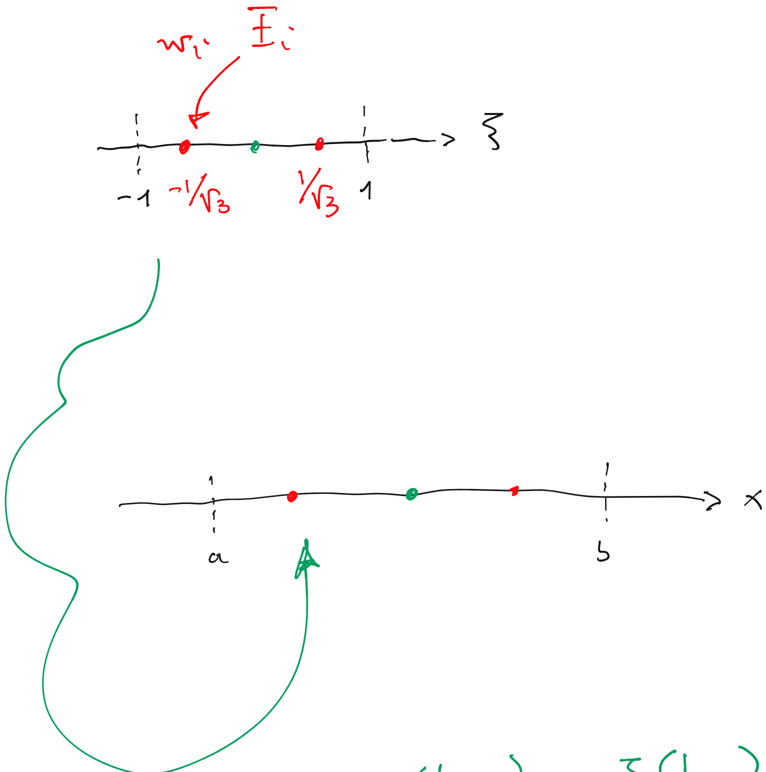
Prise de mesures…

Si $X_0 = a$ et $X_n = b$,	**méthode fermée**
Sinon,	**méthode ouverte**



Standardisons !

$$I^h = \sum w_i f(x_i)$$



$$x(\xi) = \frac{(b+a)}{2} + \xi \frac{(b-a)}{2}$$

$$\int_a^b u(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u(\xi) \underbrace{\frac{dx}{d\xi}}_{\frac{(b-a)}{2}} d\xi$$

Aussi :-)

$$x(\xi) = a \underbrace{\phi_{-1}(\xi)}_{\frac{1-\xi}{2}} + b \underbrace{\phi_1(\xi)}_{\frac{1+\xi}{2}}$$

$$= a\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + b\left(\frac{1+\xi}{2}\right)$$

$$= \frac{(b+a)}{2} + \xi \frac{(b-a)}{2}$$

Simplifions, standardisons, …

$$\boxed{x(\xi) = \frac{(b-a)}{2}\,\xi + \frac{(b+a)}{2}}$$

$$I = \int_a^b u(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u(x(\xi))\frac{dx}{d\xi}d\xi = \underbrace{\int_{-1}^{1} u(x(\xi))\,d\xi}_{\approx \sum_{i=0}^{m} w_i\,u(x(\Xi_i))} \; \frac{(b-a)}{2}$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :
Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :
Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :
Extrapolation de Richardson
Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :
ou les méthodes numériques intelligentes…

Avec l'interpolation polynomiale, tout est facile…

$$I \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)\,dx}^{I^h}$$

$$\downarrow$$

$$\approx \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{m} u(X_i)\phi_i(x)\,dx$$

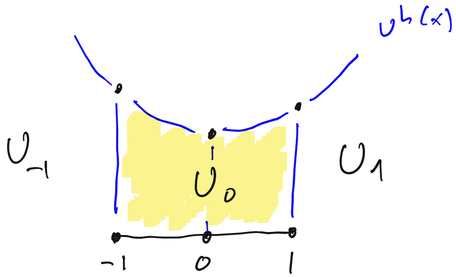
$$\downarrow$$

$$\approx \sum_{i=0}^{m} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\,dx}_{w_i}$$

$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx U_{-1} + U_1$ (méthode des trapèzes) $d = 1$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{3}\,U_{-1} + \frac{4}{3}\,U_0 + \frac{1}{3}\,U_1$ (méthode de Simpson) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{1}{4}\,U_{-1} + \frac{3}{4}\,U_{-1/3} + \frac{3}{4}\,U_{1/3} + \frac{1}{4}\,U_1$ (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) $d = 3$
$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \frac{7}{45}\,U_{-1} + \frac{32}{45}\,U_{-1/2} + \frac{12}{45}\,U_0 + \frac{32}{45}\,U_{1/2} + \frac{7}{45}\,U_1$ (méthode de Boole) $d = 5$

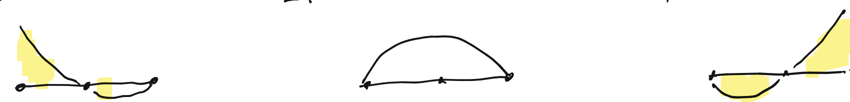
Quelques pages du grimoire de Gargamel

Sur l'intervalle standard…



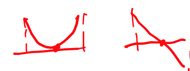
Simpson

$$I^h = U_{-1}\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)x}{2} + U_0\int_{-1}^{1}\frac{(x-1)(x+1)}{-1} + U_1\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)x}{2}$$



$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2} = \underbrace{\left[\frac{x^3}{6}\ \cdots\right]_{-1}^{1}}_{\frac{1}{3}}$$

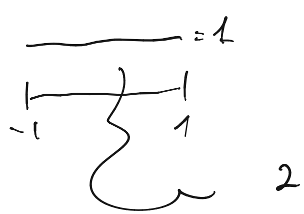
$= \frac{1}{3}$

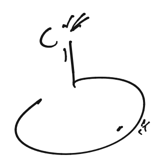


$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{-1}+\frac{-1}{-1} = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{I^h = \frac{U_{-1}+4U_0+U_1}{3}}$$

SANITY CHECK $\quad u = 1$





Comment obtenir les formules magiques ?

$$\int_{-1}^{1} u(x)dx \approx \overbrace{\int_{-1}^{1} u^h(x)dx}^{I^h}$$

$$\downarrow$$

$$\approx \sum_{i=0}^{2} u(X_i) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi_i(x)dx}_{w_i}$$

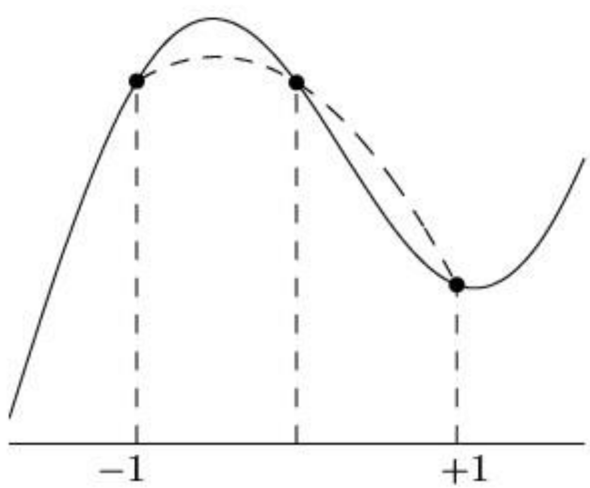
En fixant $X_0 = -1$, $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$

$$\downarrow$$

$$\approx U(-1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\,dx}_{w_0}$$

$$+\, U(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x-1)(x+1)}{-1}\,dx}_{w_1}$$

$$+\, U(1) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\,dx}_{w_2}$$



Calcul des poids

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_{-1}^{1} \frac{(x-1)x}{2}\, dx &&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} &&= \frac{1}{3} \\
w_1 &= \int_{-1}^{1} 1 - x^2\, dx &&= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} &&= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
w_2 &= \int_{-1}^{1} \frac{(x+1)x}{2}\, dx &&= \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} &&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Avec une interpolation de degré 2, on intègre exactement un polynôme de degré 3….

$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \; x^i \; dx \;=\; \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j} \; x^{2j} dx \;+\; \underbrace{\int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \; x^{2j+1} \; dx}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2n} a_i \; x^i \; dx$$

Une formule symétrique développée pour un degré n pair a un degré de précision n+1

L'intervalle d'intégration ne doit pas être symétrique !
Le changement de variable ne change en rien la précision de la méthode.

Introduisons le symbole h

Trapèzes ***h = (b-a)***
Simpson ***h = (b-a)/2***
Boole ***h = (b-a)/4***

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx \approx \tfrac{h}{2} \left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right)$$

(méthode des trapèzes) $d = 1$

$-h/2$ $h/2$ h

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx \approx \tfrac{h}{3} \left(U_{-h} + 4\, U_0 + U_h\right)$$

(méthode de Simpson) $d = 3$

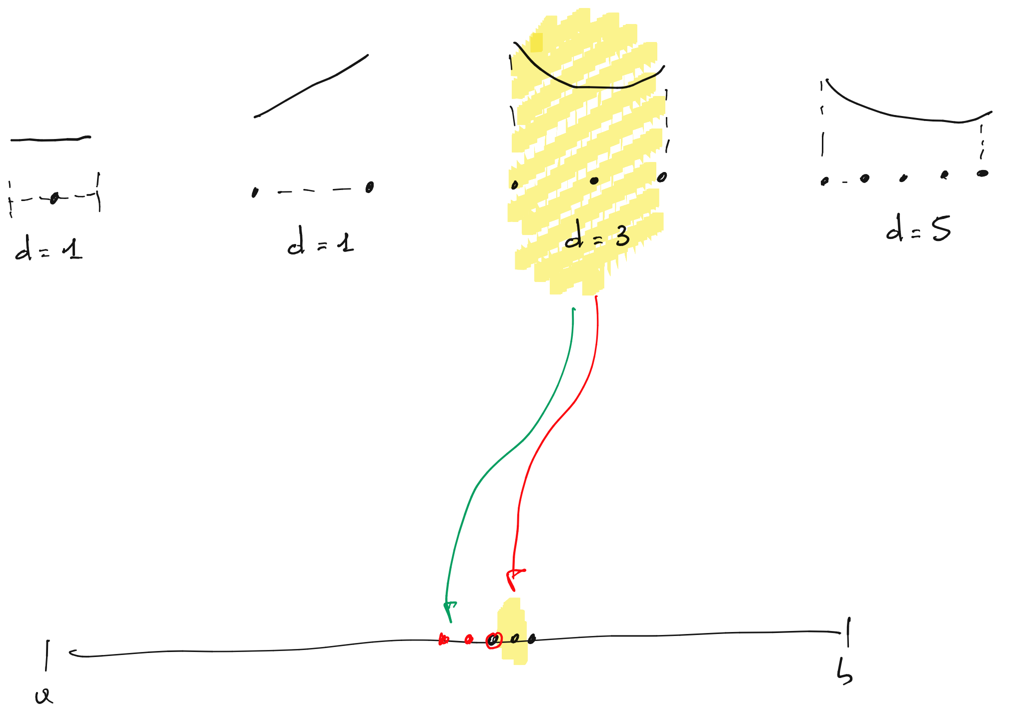
$-h$ 0 h

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx \approx \tfrac{2h}{45} \left(7\, U_{-2h} + 32\, U_{-h} + 12\, U_0 + 32\, U_h + 7\, U_{2h}\right)$$

(méthode de Boole) $d = 5$

$-2h$ $-h$ 0 h $2h$

Méthodes composites

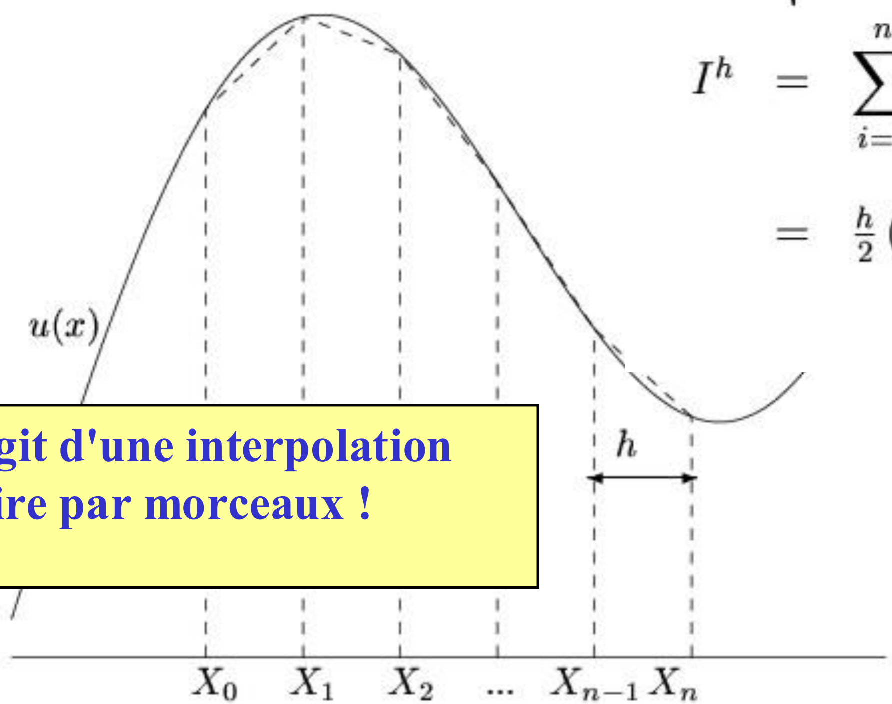


Méthode composite des trapèzes

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{X_0}^{X_n} u(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{i-1}}^{X_i} u(x)\,dx
\end{aligned}
$$

En utilisant la règle des trapèzes (2.7) pour chaque sous-intervalle

$$
\begin{aligned}
I^h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\,(U_{i-1} + U_i) \\
&= \tfrac{h}{2}\,(U_0 + 2U_1 + 2U_2 + \ldots + 2U_{n-1} + U_n)
\end{aligned}
$$



Il s'agit d'une interpolation linéaire par morceaux !

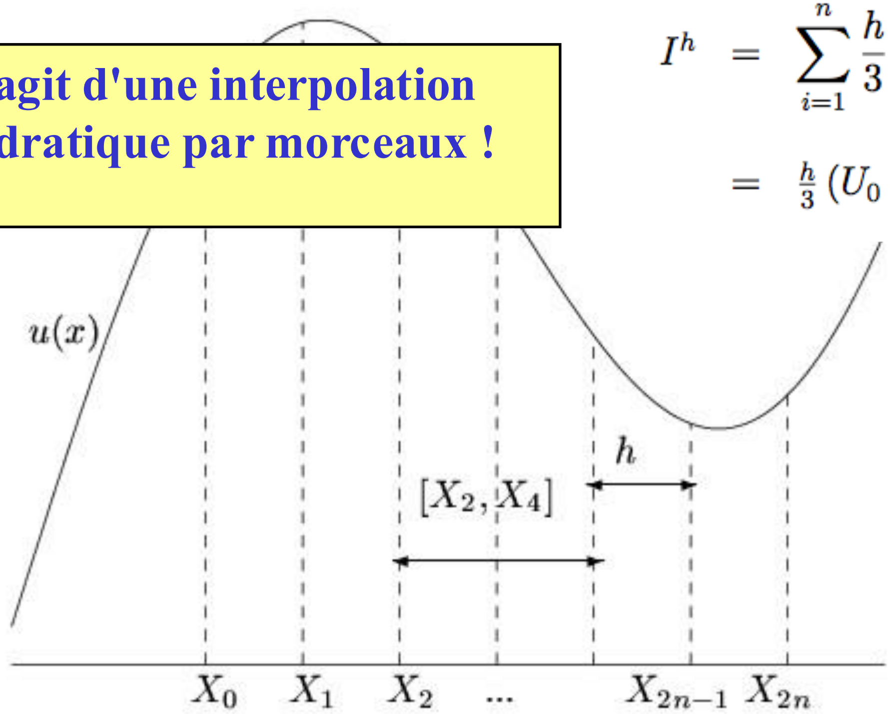
Méthode composite de Simpson

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{X_0}^{X_{2n}} u(x)\; dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{X_{2i-2}}^{X_{2i}} u(x)\; dx
\end{aligned}
$$

En utilisant la règle de Simpson (2.4)
pour chaque sous-intervalle

$$
\begin{aligned}
I^h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{3}\; (U_{2i-2} + 4\; U_{2i-1} + \; U_{2i}) \\
&= \tfrac{h}{3}\,(U_0 + 4U_1 + 2U_2 + 4U_3 + 2U_4 + \ldots + 4U_{2n-1} + U_{2n})
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'une interpolation quadratique par morceaux !



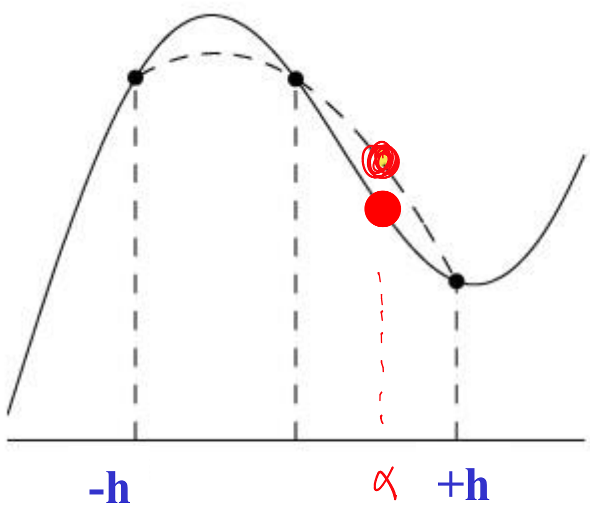
n intervalles juxtaposés de longueur 2h
2n+1 abscisses d'intégration

Comment estimer l'erreur d'intégration ?

Erreur de l'interpolation polynomiale $e^h(x)$

Erreur de l'intégration numérique $E^h(x)$

Simpson intègre parfaitement un polynôme de degré 3…



Erreur d'interpolation

$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

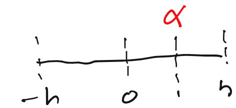
où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.

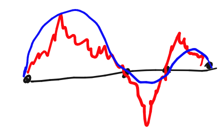
Erreur d'intégration pour Simpson !

$h \to 0$
ERREUR ASYMPTOTIQUE

$$e^h(x) = \frac{u^{(4)}(\xi)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\alpha)$$

où ξ est un point particulier de l'intervalle $[-h, h]$.





$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u''''(\xi_i)}{4!} (x-h)\, x\, (x+h)(x-\alpha)\, dx$$

$\xi_i(x)$
EST APPROCHEE PAR UNE VALEUR ξ_i.

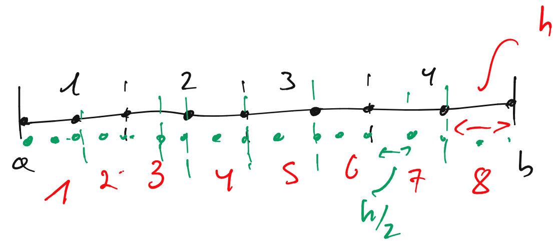
$$\leq \frac{n\, C_4}{24} \left| \int_{-h}^{h} \underbrace{(x-h)\, x^2 (x+h)}_{x^4 - h^2 x^2}\, dx - \alpha \underbrace{\int_{-h}^{h} \underbrace{(x-h)\, x\, (x+h)}_{x^3 - h^2 x}\, dx}_{=0} \right|$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{h^2 x^3}{3} \right]_{-h}^{h}$$

$$= h^5 \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right] = h^5\, \frac{6-10}{15} = -\frac{4}{15} h^5$$

$$\leq \frac{n\, C_4\, h^5}{90}$$

Ordre de précision



$$E^h \le \frac{\underbrace{n}_{n(h)} C_4 h^5}{90}$$

$\cancel{\mathcal{O}(h^5)}$ No!

$2nh = (b-a)$

$n = \frac{(b-a)}{2h}$

$$E_h \le \underbrace{\frac{(b-a)C_4}{180}h^4}_{\mathcal{O}(h^4)}$$

ORDRE DE PRECISION SIMPSON $= 4$

$\underbrace{\text{DEGRE DE PRECISION}}_{3}$

$4 = 3 + 1$

EN GENERAL !

Degré de précision

Ordre de précision de Simpson

$$E^h = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{h} \frac{u^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x-h)x(x+h)(x-\boxed{\alpha})\,dx$$

En définissant $C_4 = \max_i \left|u^{(4)}(\xi_i)\right|$

$$\begin{aligned}
\left|E^h\right| &\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h}(x-h)x(x+h)(x-\boxed{\alpha})\,dx\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\int_{-h}^{h}x^2(x-h)(x+h)\,dx - \boxed{\alpha}\underbrace{\int_{-h}^{h}(x-h)x(x+h)\,dx}_{=0}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{4!}\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{h^2x^3}{3}\right]_{-h}^{h}\right| \\
&\leq n\frac{C_4}{90}h^5
\end{aligned}$$

O(h⁵), Monsieur ?

Nenni, nein, neen : O(h^4) only !

$$\leq \quad n\frac{C_4}{90}h^5$$

Car $2nh = (b-a)$ pour une méthode composite de Simpson

$$\leq \quad (b-a)\frac{C_4}{180}h^4$$

n et h sont deux paramètres liés entre eux !
En d'autres mots, n n'est pas une constante, mais une fonction de h !

n(h) = (b-a)/2h

$$\boxed{|E^h| \quad \leq \quad \frac{C_4(b-a)}{180}\; h^4}$$

Degré de précision = 3
Ordre de précision = 4

Combien de sous-intervalles pour obtenir une précision donnée ?

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)dx = \frac{h}{2}\left(U_{-h/2} + U_{h/2}\right) - \frac{h^3}{12}u^{(2)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{C_2(b-a)}{12}\, h^2 \qquad \text{(méthode des trapèzes)} \quad \mathcal{O}(h^2)$$

$$\int_{-h}^{h} u(x)dx = \frac{h}{3}\left(U_{-h} + 4\,U_0 + U_h\right) - \frac{h^5}{90}u^{(4)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{C_4(b-a)}{180}\, h^4 \qquad \text{(méthode de Simpson)} \quad \mathcal{O}(h^4)$$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)dx = \frac{2h}{45}\left(7\,U_{-2h} + 32\,U_{-h} + 12\,U_0 + 32\,U_h + 7\,U_{2h}\right) - \frac{8h^7}{945}u^{(6)}(\xi)$$

$$|E^h| \leq \frac{2C_6(b-a)}{945}\, h^6 \qquad \text{(méthode de Boole)} \quad \mathcal{O}(h^6)$$

$$\frac{C_2}{12}\, n\, \frac{(b-a)^3}{n^3} \leq \epsilon$$

$$\sqrt{\frac{C_2(b-a)^3}{12\epsilon}} \leq n$$

Méthodes d'intégration

Méthodes à pas égaux :

Règles de Newton-Cotes

Méthodes à pas inégaux :

Règles de Gauss-Legendre

Méthodes récursives :

Extrapolation de Richardson

Méthodes de Romberg

Méthodes adaptatives :

ou les méthodes numériques intelligentes…

Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k\, p(X_k)$$

$n+1$

IL DEVRAIT ÊTRE POSSIBLE D'INTÉGRER UN POLYNÔME DE DEGRÉ $2n+1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a_i \int_{-1}^{1} x^i\,dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+i} a_i X_k^i$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^{2j}}_{\frac{2}{2j+1}}} + \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} \underbrace{\int_{-1}^{1} x^{2j+1}}_{=0}} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j}} + \boxed{\sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2}{2j+1} &= \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} w_k X_k^{2j+1} \\ & \qquad j = 0 \dots n \end{aligned}}$$

ÉQUATIONS À RÉSOUDRE

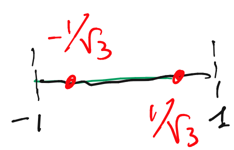
CAS PARTICULIER

$n = 1$

$$\left\{ \begin{aligned} X_0^3 w_0 + X_1^3 w_1 &= 0 \quad \checkmark \\ X_0^2 w_0 + X_1^2 w_1 &= \frac{2}{3} \quad \checkmark \\ X_0 w_0 + X_1 w_1 &= 0 \quad \checkmark \\ w_0 + w_1 &= 2 \quad \checkmark \end{aligned} \right.$$

$$2X_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$X_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$X_1 = -X_0$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

Méthodes à pas inégaux : Gauss-Legendre

Simpson sur un intervalle
Degré de précision = 3
Nombre de points = 3

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k p(X_k) \ ,$$

Choisir des abscisses équidistantes n'est pas le meilleur choix !

En développant le polynôme,

$$\sum_{i=0}^{2n+1} \int_{-1}^{1} a_i\ x^i\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{i=0}^{2n+1} a_i\ X_k^i$$

Gauss-Legendre sur un intervalle
Degré de précision = 2n+1
Nombre de points = n+1

En séparant les termes pairs et impairs,

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j} x^{2j}\, dx + \sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} a_{2j+1} x^{2j+1}\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

GAUSS
LEGENDRE
$n = 2$

DEGRÉ = 5

En effectuant les intégrales,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2}{(2j+1)} a_{2j} + 0 = \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j} X_k^{2j} + \sum_{k=0}^{n} w_k \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} X_k^{2j+1}$$

Calcul des abscisses de Gauss-Legendre

$$
\begin{aligned}
(X_0^3\ w_0 + X_1^3\ w_1) &= 0,\\
(X_0^2\ w_0 + X_1^2\ w_1) &= 2/3,\\
(X_0\ w_0 + X_1\ w_1) &= 0,\\
(w_0 + w_1) &= 2,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
w_0 &= w_1 = 1,\\
-X_0 &= X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
}
$$

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

63$

$n = 62$

POLYNOME 125 = 1$

La manière la plus efficace et la plus précise d'intégrer sur un intervalle donné (et borné!) un polynôme de degré 2n+1 dont on connaît les coefficients est d'utiliser une règle de Gauss-Legendre avec n+1 points.

Vrai ou Faux ?

2$

$n+1$	$X_k, -X_{n-k}$	w_k, w_{n-k}
1	0.000000000000000	2.000000000000000
2	0.577350269189626	1.000000000000000
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889
6	0.932469514203152	0.171324492379170
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.238619186083197	0.467913934572691

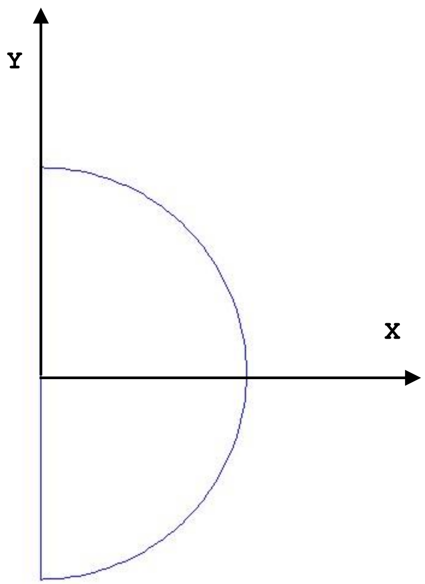
Evaluation S7 : vrai ou faux…

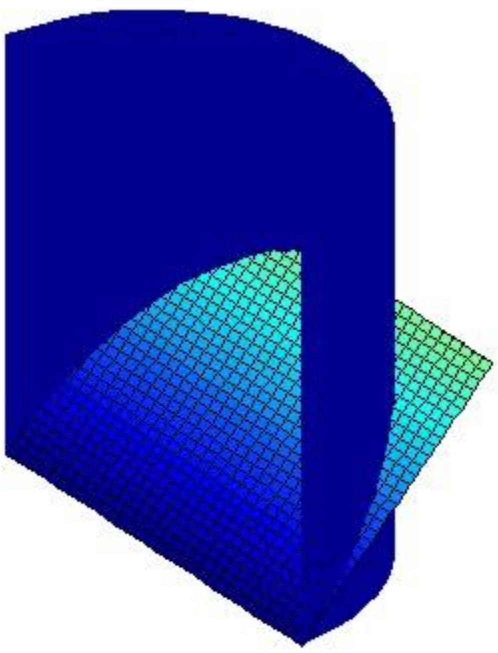
Un petit exemple en 2D…

Quelle est la valeur de l'intégrale double

$$I = \int_D x \; dx \; dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$?

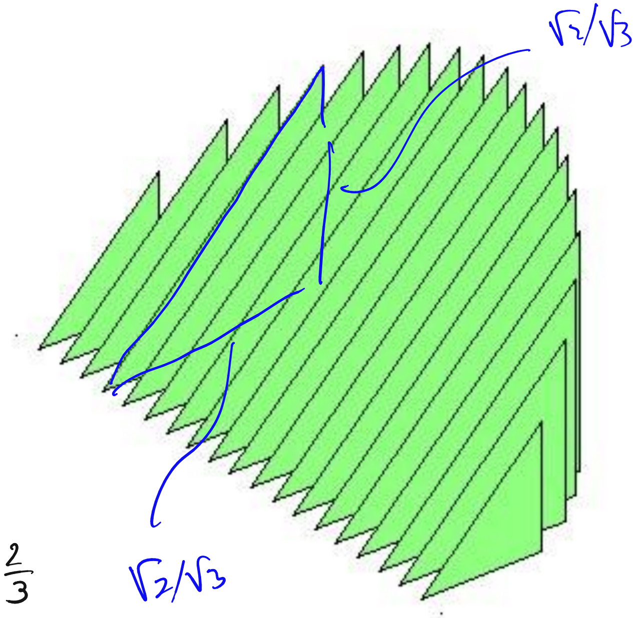


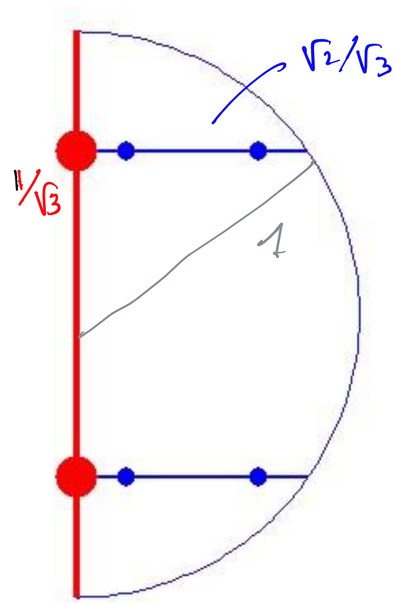


D'abord les x, puis les y…

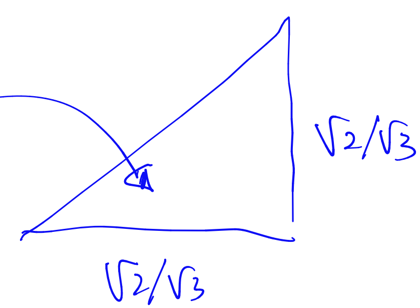
$$I = \int_{-1}^{1} \underbrace{\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}} \, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

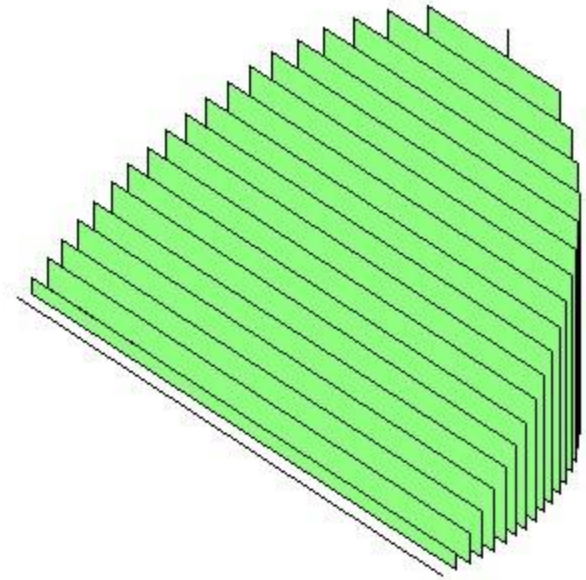




$$I_h = 2 \, \frac{1}{2} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$



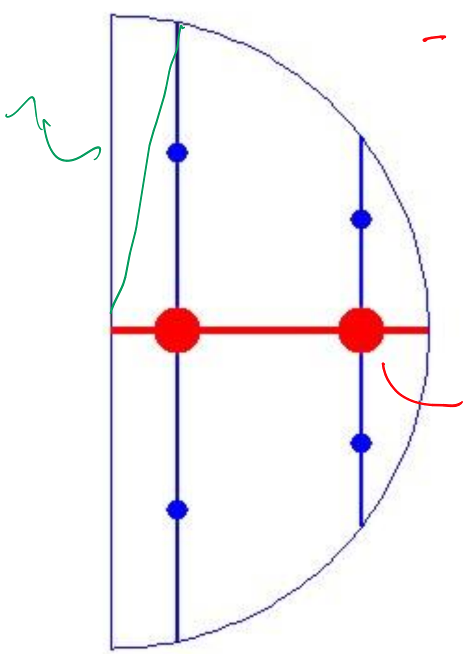
D’abord les y, puis les x…



$$I = \int_0^1 x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \; dx$$

$$= -\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2} \; dx$$

$$-\left[(1-x^2)^{3/2}\,\frac{2}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$



$1/2 \pm \sqrt{3}/6$

$$I_h = 0{,}69 \simeq \frac{2}{3}$$

D'abord les x puis les y…

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy$$

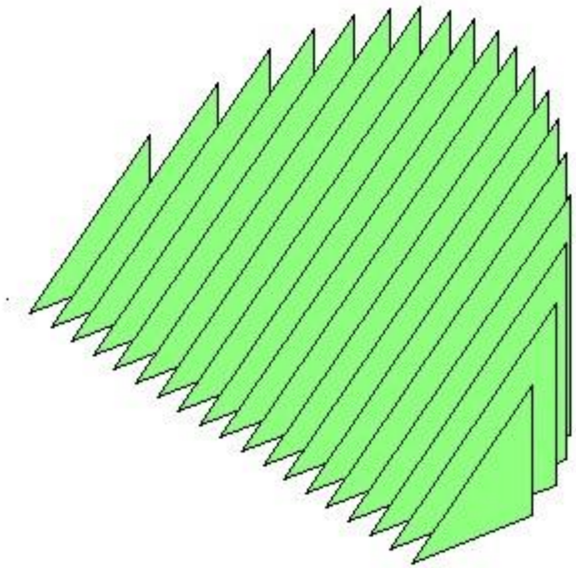
$\downarrow$ En intégrant le long de x pour chaque y

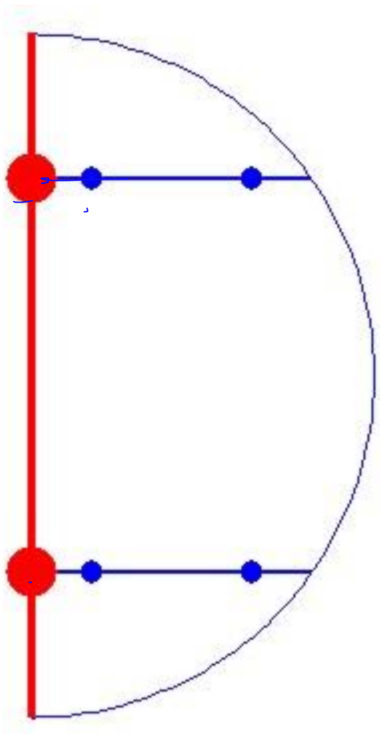
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2} \, dy$$

$\downarrow$ En intégrant le long de y

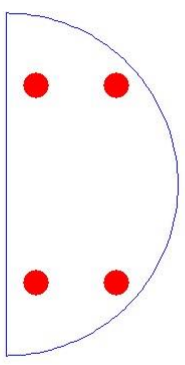
$$= \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_{y=-1}^{y=1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$





…et numériquement ?

$$
\begin{aligned}
I &= \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du triangle en}\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du triangle en}\\ y=+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}}\\
&= 2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$



D’abord les y, puis les x…

$$I = \int_0^1 x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

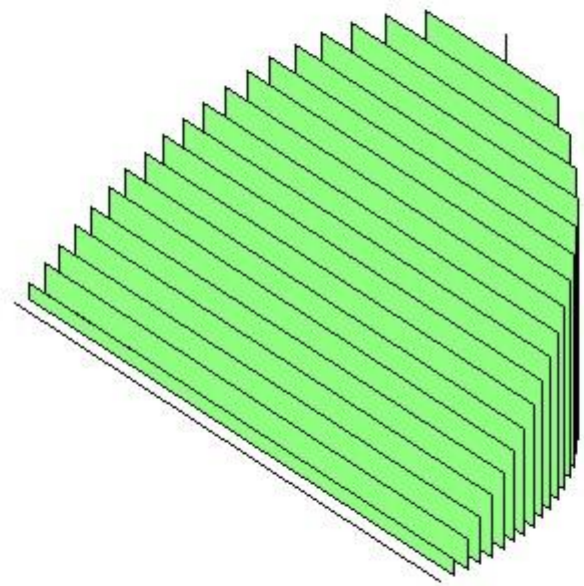
$\big\downarrow$ En intégrant le long de y pour chaque x

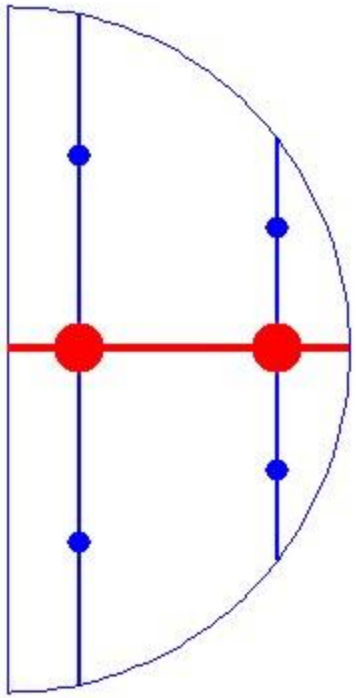
$$= \int_0^1 x \Big[y \Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

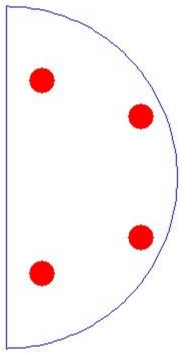
$\big\downarrow$ En intégrant le long de x

$$= \left[\frac{-2}{3} \left(1-x^2\right)^{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$$





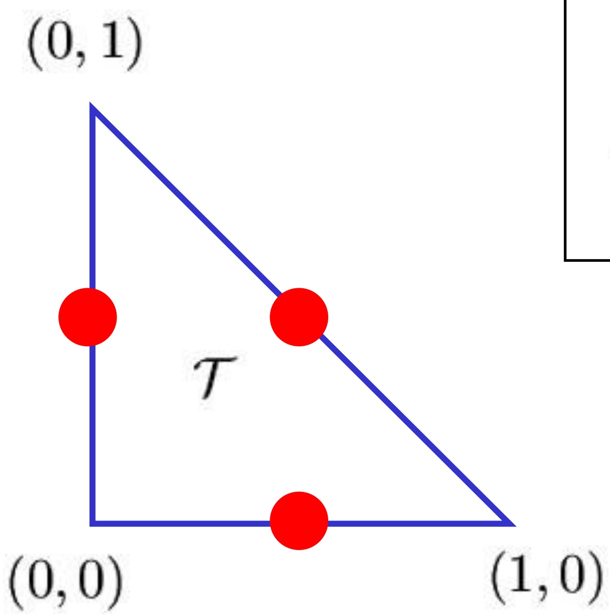
…et numériquement ?



$$I = \frac{1}{2}\left(\boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du rectangle en}\\ x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Surface du rectangle en}\\ x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\end{array}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.6914 \simeq \frac{2}{3}$$

Intégration sur un triangle : Règle de Hammer à 3 points



$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x,y)\ dx\ dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^{3} w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}$$

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

Interrogation (mai 2003)

Démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux : $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$

Question

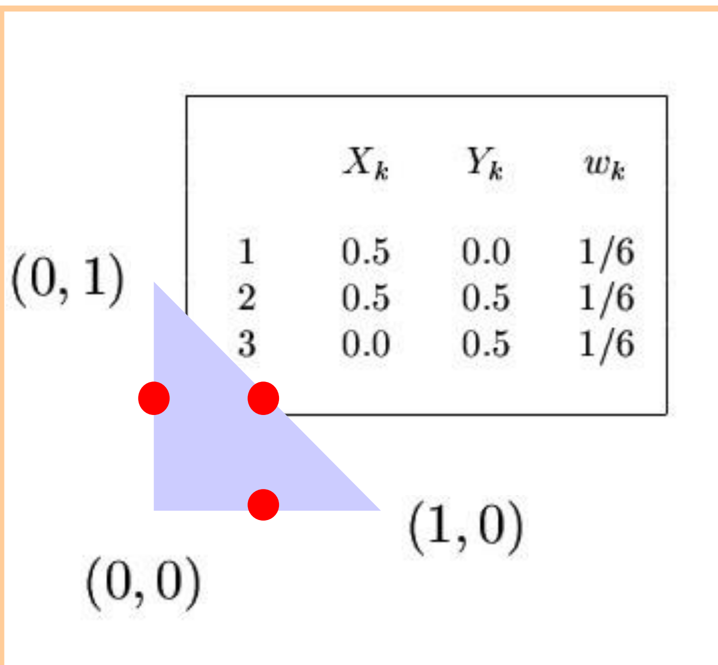
$$
\begin{aligned}
I &= \frac{a}{2} + b\int_0^1 x \int_0^{1-x} dy\ dx + c\int_0^1 y \int_0^{1-y} dx\ dy \\
&\quad + d\int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy\ dx + e\int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} dx\ dy + f\int_0^1 x \int_0^{1-x} y\ dy\ dx \\
&= \frac{a}{2} + b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + c\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\
&\quad + d\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + e\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 + f\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 \\
&= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24} \\
&= I^h
\end{aligned}
$$

$\square$

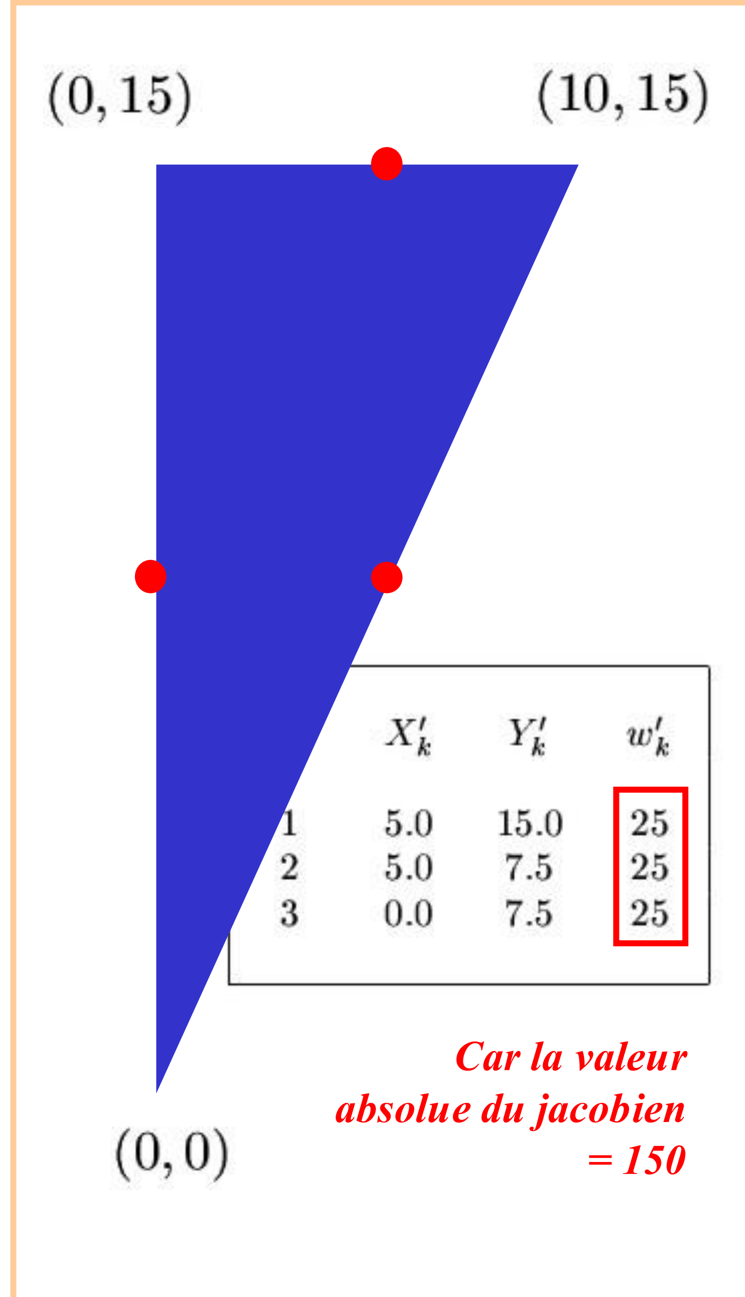
Degré de précision

Et un autre triangle ?

$$
\begin{aligned}
x' &= 10x \\
y' &= 15 - 15y
\end{aligned}
$$



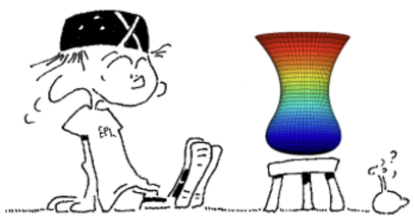
	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6



	X'_k	Y'_k	w'_k
1	5.0	15.0	25
2	5.0	7.5	25
3	0.0	7.5	25

Car la valeur absolue du jacobien = 150

Interrogation du 18 mars !



Méthodes numériques (LEPL1104)

Vincent Legat
Louvain School of Engineering
Université catholique de Louvain

Il faut d'abord t'identifier :-)

News | Documents | Videos & podcasts ! | Installer vscode et copilot sur votre ordinateur ! | Installer Python | Programmes Python | Homeworks | Interrogation du 18 mars 2026

Quelques rappels utiles pour l'interrogation du mercredi 18 mars 2026

A connaître pour le jour de l'examen :
Votre noma : **il faut vous identifier pour l'obtenir :-)**
Votre auditoire : **il faut vous identifier pour l'obtenir :-)**
Votre numéro magique pour le classement des copies : **il faut aussi vous identifier... :-)**

Pour remettre (et éventuellement reprendre) une feuille blanche pour l'interrogation, il ne faut surtout pas se déplacer le jour de l'interrogation...

- Tout d'abord, il faut vous identifier à droite...
- Dans un second temps, cliquer sur le lien qui apparaîtra ici, si vous êtes inscrit au cours :-) :-)
- Les étudiants qui se présentent dans les salles d'examen devront obligatoirement rester une heure dans la salle d'examen, même si ils souhaitent juste remettre une feuille blanche.
- Il faut vraiment utiliser le formulaire électronique pour remettre virtuellement votre feuille blanche.

Etudiants dans l'auditoire SUD11

Etudiants dans l'auditoire SUD19

Etudiants dans l'auditoire BARB92

Etudiants dans l'auditoire A02

Etudiants dans l'auditoire A10

Etudiants remettant une feuille blanche

Consignes
Tuyaux

Deux vilains complices : Donald et Vladimir...
Lequel est le plus vilain ?

	X_i	w_i
0	-1	$1-\alpha$
1	$-1/\sqrt{5}$	α
2	$1/\sqrt{5}$	α
3	1	$1-\alpha$

L'interrogation commence à 16 heures 30 précises et se terminera à 17 heures 30 précises.

L'interrogation de METHODES NUMERIQUES se composera d'une question ouverte sur les SEPT premiers cours, sur les QUATRE devoirs soumis avant l'interrogation et les SIX premières séances tutorées.

Si la participation à l'interrogation n'est pas obligatoire, mais la remise virtuelle d'une feuille blanche via le site web pour les étudiants qui ne souhaitent pas présenter l'interrogation est obligatoire !

Pour les étudiants PEPS, l'interro commence à 16h10

Consignes
Tuyaux

Deux vilains complices : Donald et Vladimir...
Lequel est le plus vilain ?

Pour estimer l'intégrale de la fonction $u(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$, Donald et Vladimir ont écrit une quadrature définie par :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{3} w_i\, u(X_i)$$

	X_i	w_i
0	-1	$1-\alpha$
1	$-1/\sqrt{5}$	α
2	$1/\sqrt{5}$	α
3	1	$1-\alpha$

où α est un nombre magique que Vladimir refuse de fournir.
Donald a péniblement commencé à écrire une fonction `python` :

Pour les fans des tuyaux, quelques interrogations des années précédentes !

- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2025)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2024)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2023)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2022)
- Interrogation EPL1104 S7 (mars 2019)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2018)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2017)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2016)
- Interrogation FSAB1104 S5 (octobre 2015)
- Interrogation FSAB1104 S7 (octobre 2014)