

Plan du cours de méthodes numériques

Comment résoudre
numériquement un
problème aux
valeurs initiales ?

Comment interpoler
une fonction ?

Comment dériver
numériquement
une fonction ?

Comment approximer
une fonction ?

Comment intégrer
numériquement
une fonction ?

Comment résoudre
numériquement un
problème aux
conditions frontières ?

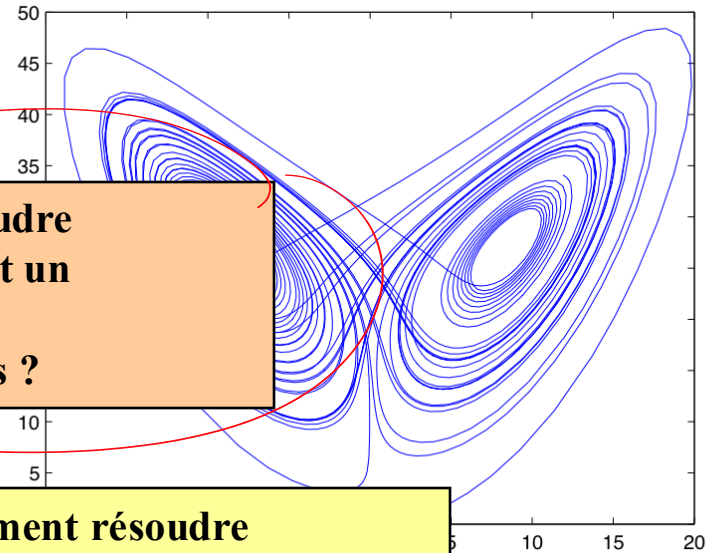
Et les équations
non linéaires ?

Et les méthodes itératives ?

*Comment résoudre numériquement
une équation différentielle ordinaire ?*

*Comment résoudre numériquement
une équation aux dérivées partielles ?*

Comment résoudre
numériquement une
équation aux dérivées
partielles ?



IN CONNU

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

CONNU :-)

Applications :
très nombreuses dans tous les domaines

Problème de Cauchy

Questions théoriques

Existence, unicité et régularité d'une solution
Stabilité d'une équation différentielle

Méthodes numériques

Stabilité d'une méthode
Précision d'une méthode

Valeur exacte



$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$



Approximation numérique

$$v'(x) = \frac{\cosh(x^3) v(x)}{\log(\exp(\sqrt{x}))}$$

LINÉAIRE
HOMOGÈNE
SCALAIRE
ORDRE 1

$$v'(x) = 2[v(x)]^2 + 6x^2$$

NON-LIN
NON-HOMO

$$v''(x) = \exp[v(x)]$$

NON-LIN
HOMO
ORDRE 2

$$v''(x) = v^2(x)$$

ORDRE 2
SCALAIRE

TRUC

$$v'(x) = v^2(x)$$

$$u'(x) = v(x)$$

NON-LIN
HOMO
ORDRE 1
VECTORIELLE

$$u = \begin{bmatrix} v \\ v' \end{bmatrix}$$

Problème de Cauchy...

Problème **linéaire** ou **non linéaire** ?

Problème **homogène** ou **non homogène** ?

Problème **scalaire** ou **vectoriel** ?

Ordre d'une équation différentielle ?

Savez-vous si...

Problème **linéaire** ou **non linéaire** ?

Est-ce que f est une fonction linéaire de u ?

Est-ce que f est une fonction linéaire de x ?

Problème **homogène** ou **non homogène** ?

Dépendance explicite ou non de f par rapport à x ?

Solution particulière et solution du problème homogène

Problème **scalaire** ou **vectériel** ?

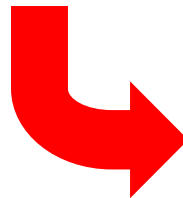
u scalaire ou u vecteur ?

x scalaire : équation différentielle ordinaire ($x =$ le temps très souvent)

x vecteur : équation aux dérivées partielles (CM10-CM11-CM12)

Ordre d'une équation différentielle ?

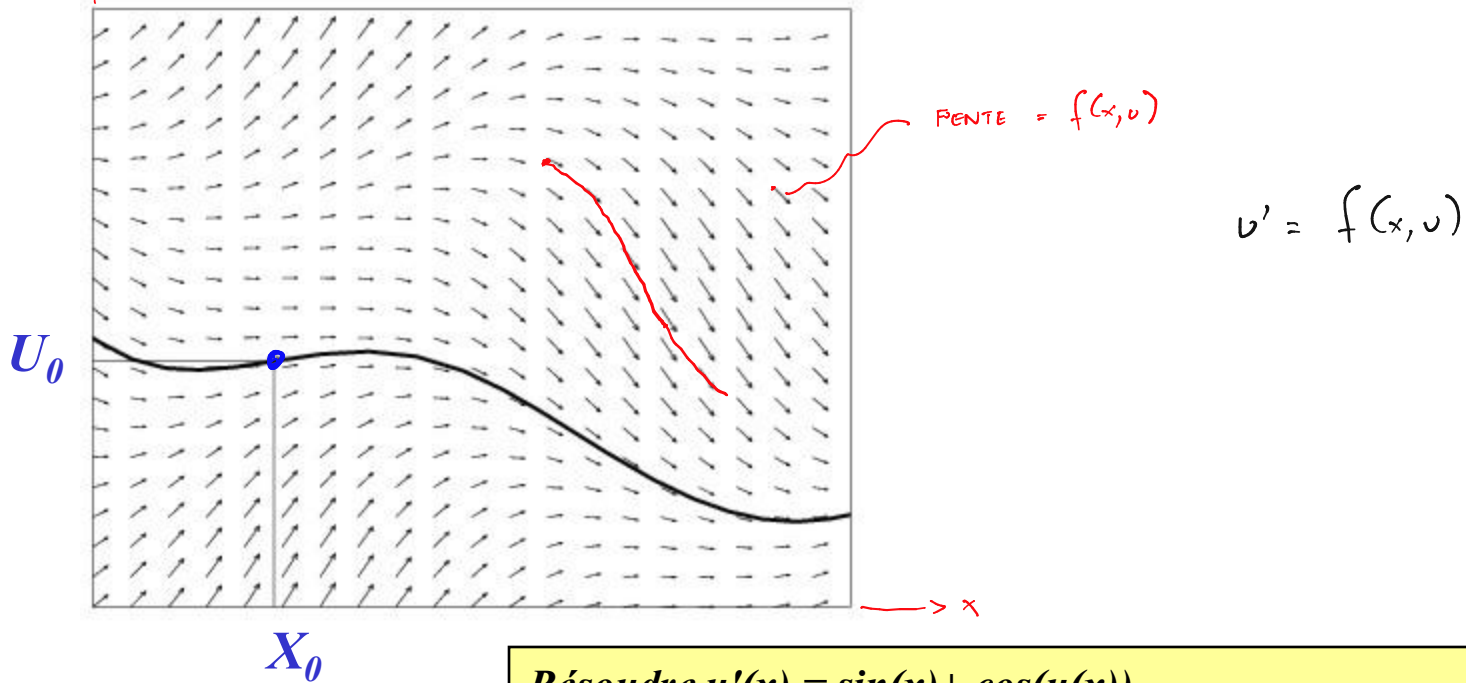
problème scalaire d'ordre $n =$ système de n équations d'ordre un



Nous allons juste construire des méthodes pour résoudre des systèmes d'équations d'ordre 1

u

Interprétation graphique



**Résoudre $u'(x) = \sin(x) + \cos(u(x))$
avec $u(X_0) = U_0$**

est équivalent à

***Construire une courbe
qui passe par (X_0, U_0)
qui a une pente en tout point x qui vaut $\sin(x) + \cos(u(x))$***

Equation stable

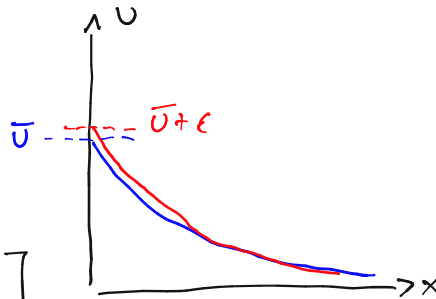
PROBLEME STABLE

$$u'(x) = -u(x)$$

$$u(0) = \bar{u}$$

$$u(x) = \bar{u} \exp(-x)$$

C^1



PROBLEME DE L'ERREUR

$$(u - u_\epsilon)' = -e$$

$$e(0) = \epsilon$$

PROBLEME PERTURBE

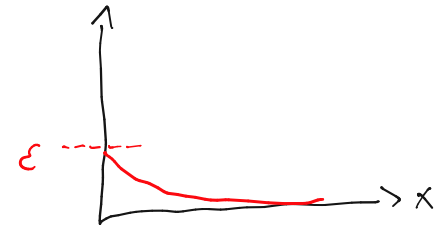
$$u'_\epsilon(x) = -u_\epsilon(x)$$

$$u_\epsilon(0) = \bar{u} + \epsilon$$

$$u(x) = (\bar{u} + \epsilon) \exp(-x)$$

C^1
DONALD

C^1
DONALD - C^1
 $e(x)$



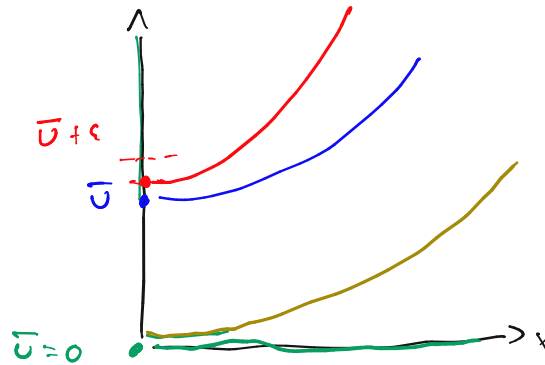
Equation instable

$$u'(x) = u(x)$$
$$u(0) = \bar{u}$$

PROBLEME
INSTABLE

$\left[\frac{C}{\epsilon} \right]$

$$u(x) = \bar{u} \exp(x)$$

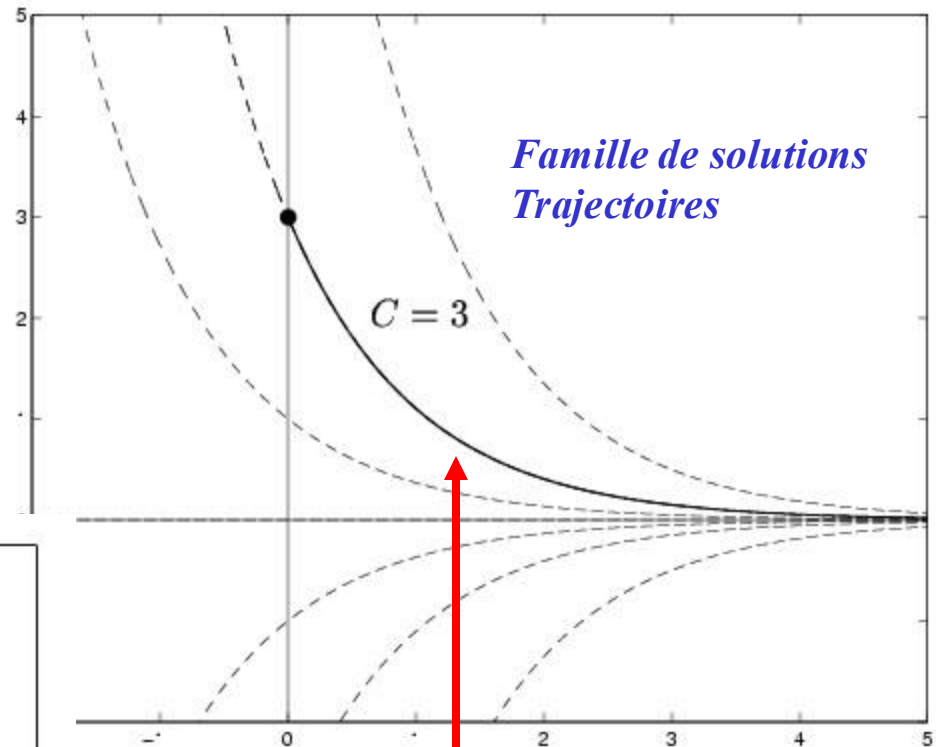


$u'(x) = -u(x)$
est une équation
différentielle
stable...

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = -u(x), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

Lorsque les solutions se rejoignent lorsque x tend vers l'infini, on dit que le problème différentiel est **stable** ou **bien posé**



Solution vérifiant la condition initiale

$$u(x) = \bar{u} e^{-(x-a)}$$

Sensibilité à une perturbation de la condition initiale

Problème non perturbé

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = -u(x), & x \in [a, b] \\ u(a) = \bar{u} \end{cases}$$

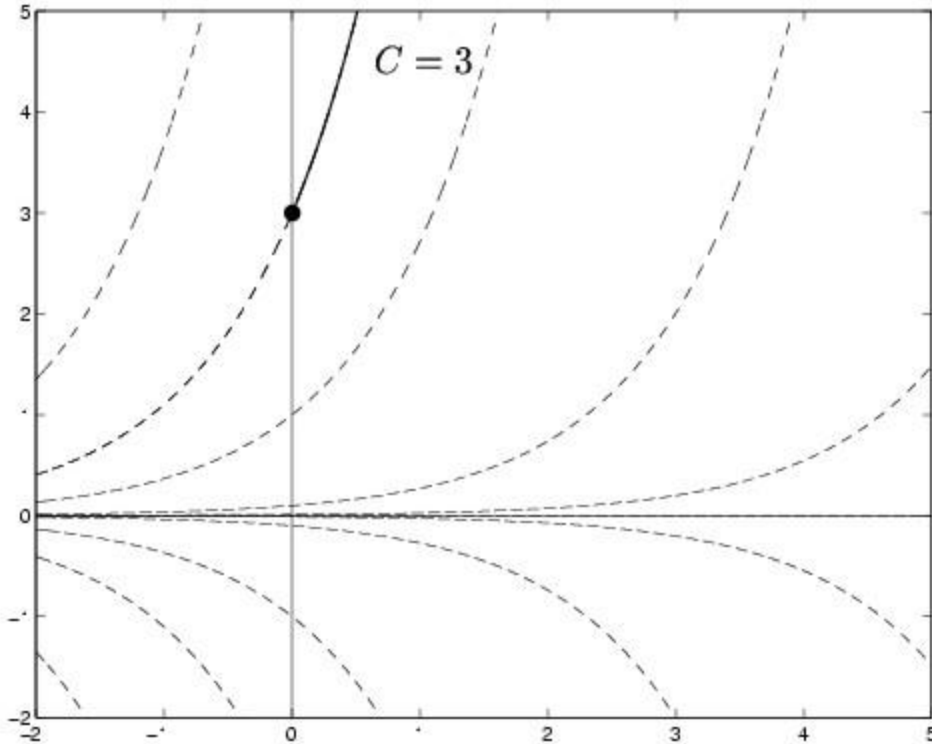
Trouver $u_\epsilon(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'_\epsilon(x) = -u_\epsilon(x), & x \in [a, b] \\ u_\epsilon(a) = \bar{u} + \epsilon \end{cases}$$

Problème perturbé

$$\underbrace{u_\epsilon(x) - u(x)}_{e_\epsilon(x)} = \epsilon e^{-(x-a)}$$

L'écart entre la solution du problème perturbé et la solution du problème non perturbé diminue progressivement de manière exponentielle...

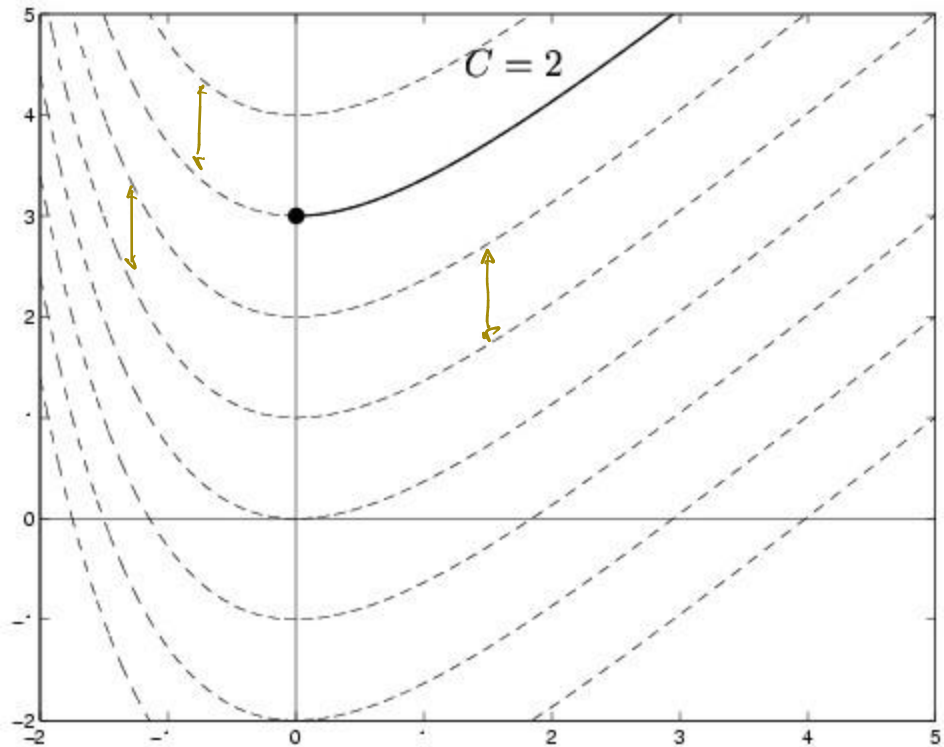


$$u(x) = \bar{u} e^{(x-a)}$$

$u'(x) = u(x)$
 est une équation
 différentielle instable.

*Si la solution analytique est déjà instable,
 il semble illusoire de croire que la
 solution discrète sera stable par rapport
 aux erreurs d'arrondi !*

$u'(x) = 1 - e^{-x}$
n'est
ni stable,
ni instable.

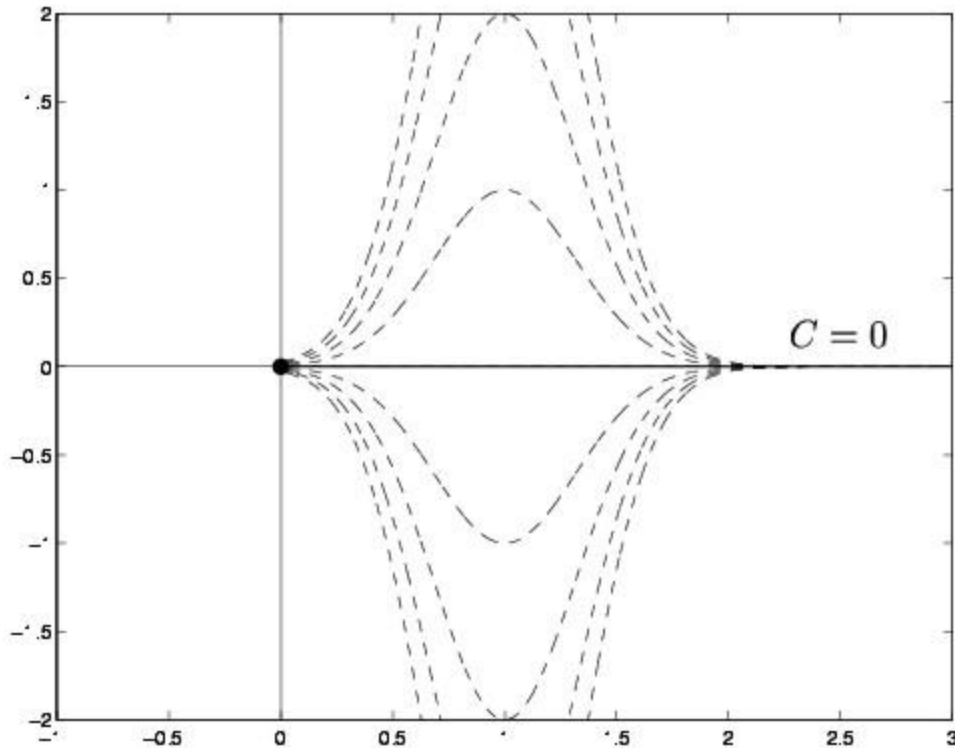


L'écart dû à une perturbation reste constant

Au bénéfice du doute, on dit classiquement que le problème est encore stable

$$u(x) = C + x + e^{-x}$$

$u'(x) = -10(x-1)u(x)$
est un peu stable
et un peu instable...



$$u(x) = Ce^{-5(x-1)^2}$$

Ni stable

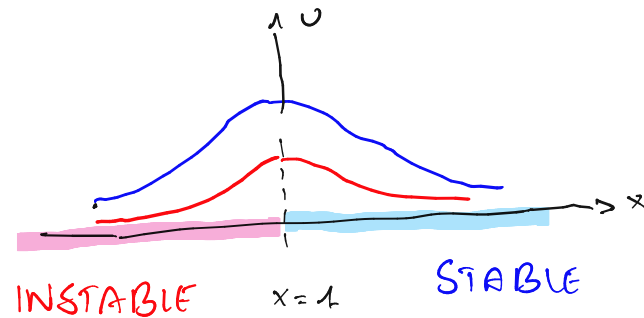
Ni instable

$$u'(x) = \underbrace{-10(x-1)}_{g'(x)} u(x)$$

$$g(x) = -5(x-1)^2$$
$$g'(x) = -10(x-1)$$

$$u(x) = C \exp(-5(x-1)^2)$$

↑
VALEUR
EN $x=1$



En général

$$e(x) = v_\varepsilon(x) - v(x)$$

$$e'(x) = f(x, v_\varepsilon) - f(x, v)$$

↓

$$= \cancel{f(x, v)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}}_{(x, v)} \underbrace{(v_\varepsilon - v)}_{e(x)} - \cancel{f(x, v)}$$

$\mathcal{J}(x, v(x))$

JACOBIEN

> 0 ECART GRANDIT

INSTABLE

< 0 ECART DIMINUE

STABLE

Comment savoir dans le cas général ?

Idée

Presque toute l'information locale est
contenue dans le *jacobien*.

*Equation différentielle pour la différence entre solution du
problème perturbé et solution du problème non-perturbé*

$$e'_\epsilon(x) = f(x, u_\epsilon(x)) - f(x, u(x))$$

En effectuant un développement de Taylor de $f(x, v)$
pour la seconde variable v autour du point $(x, u(x))$,

$$\approx f(x, u(x)) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x,u(x))} (u_\epsilon(x) - u(x)) - f(x, u(x))$$

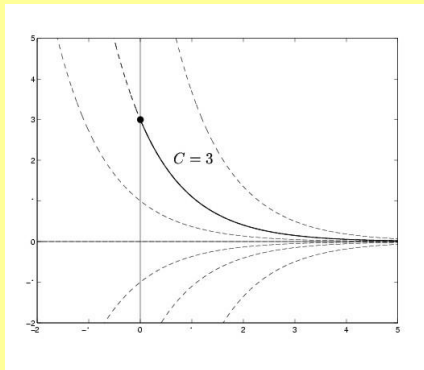
$$\approx \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x,u(x))} e_\epsilon(x)$$

$$J(x, u(x)) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u(x))}$$

↑
jacobien

Bilan

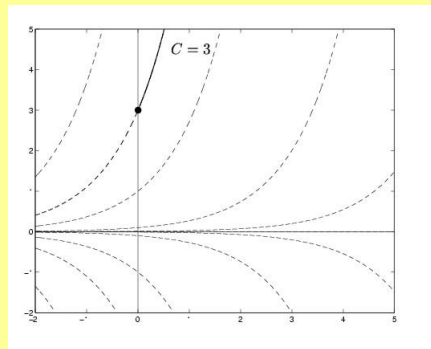
$$u'(x) = -u(x)$$



$$J = -1$$

stable

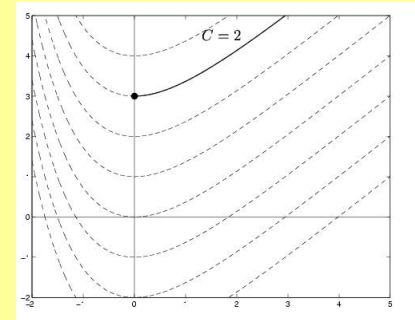
$$u'(x) = u(x)$$



$$J = 1$$

instable

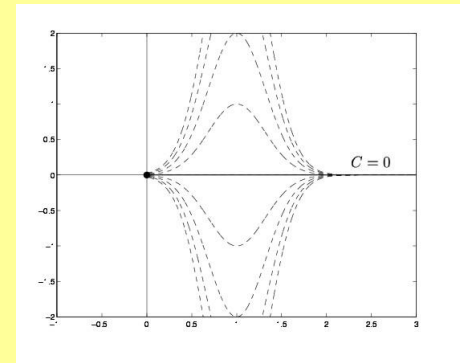
$$u'(x) = f(x)$$



$$J = 0$$

écart constant

$$u'(x) = -10(x-1)u(x)$$



$$J > 0 \quad \text{si } x < 1 \quad \text{instable}$$

$$J < 0 \quad \text{si } x > 1 \quad \text{stable}$$

Stable mais raide !

$$u'(x) = -\alpha \left[u(x) - \sin(x) \right] + \cos(x)$$

EQUATION HOMO

$$u(x) = u_{\text{homo}}(x) + u_p(x)$$

UNE SOLUTION PARTICULIERE DU PROBLEME NON HOMOGENE

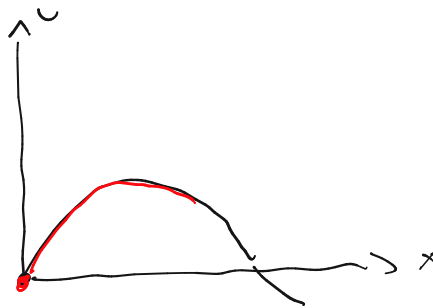
EQUATION HOMO

$$u' = -\alpha u$$

$$u(x) = C \exp(-\alpha x)$$

$$\alpha \gg 1$$

$$u(x) = C \exp(-\alpha x) + \sin(x)$$

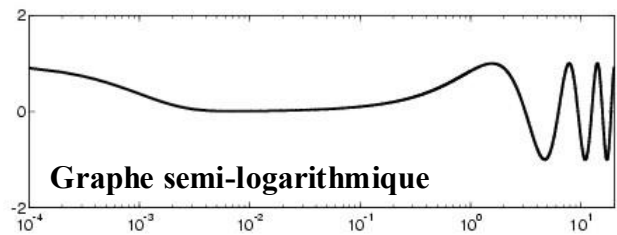
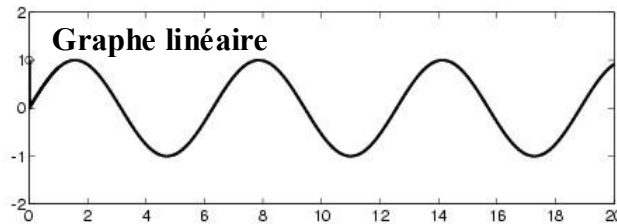
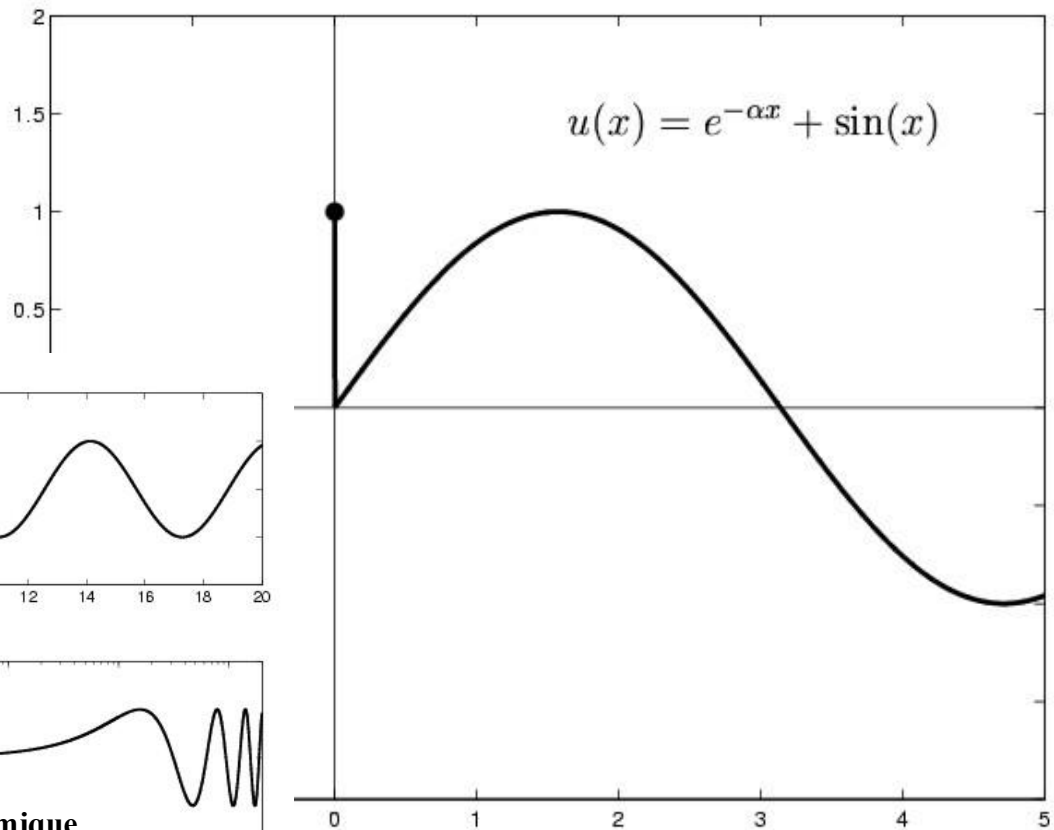


Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = -\alpha (u(x) - \sin(x)) + \cos(x), & x \in [0, 5] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

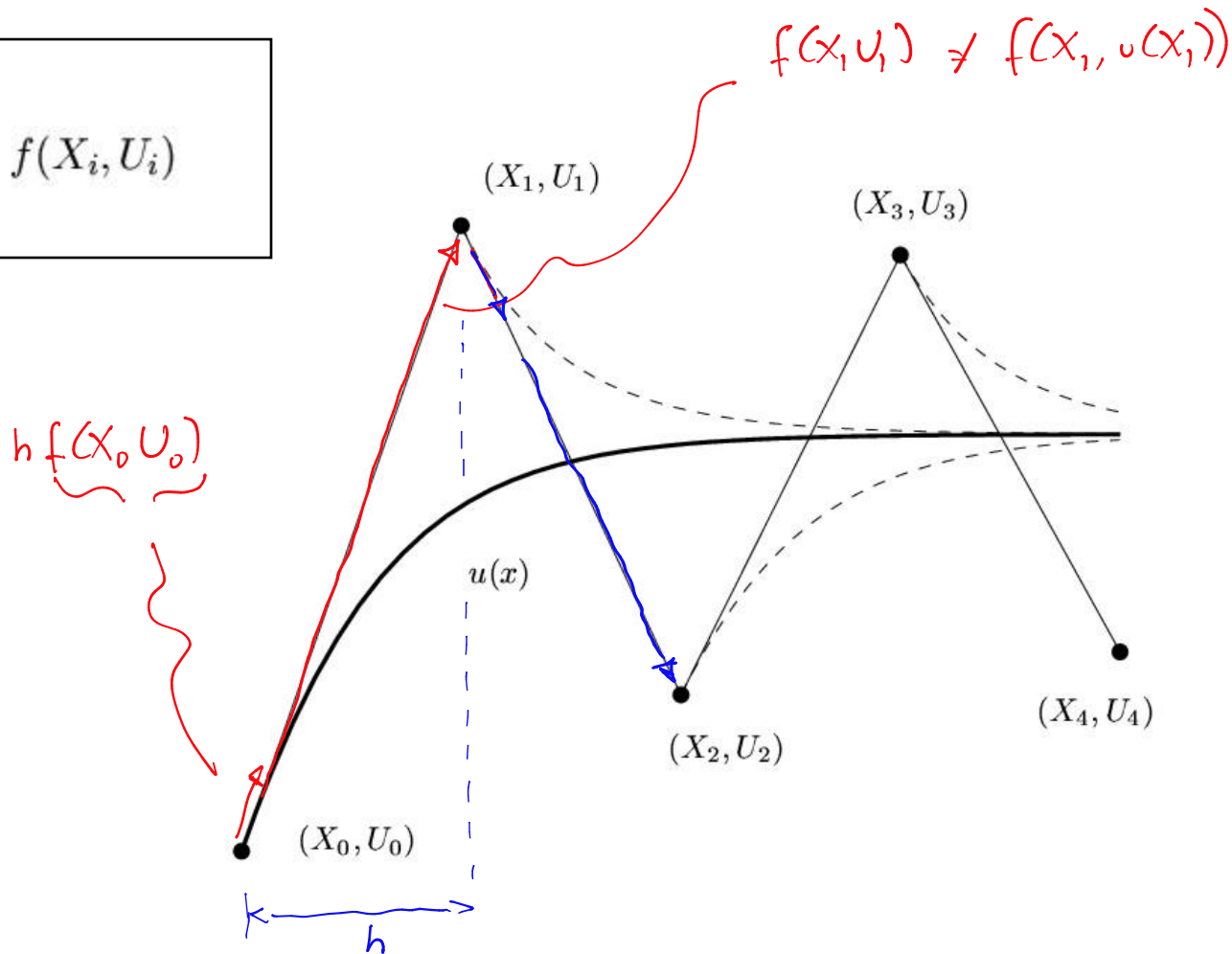
*Très difficile à résoudre
pour beaucoup de méthodes numériques*

**Problème
stable mais
raide**

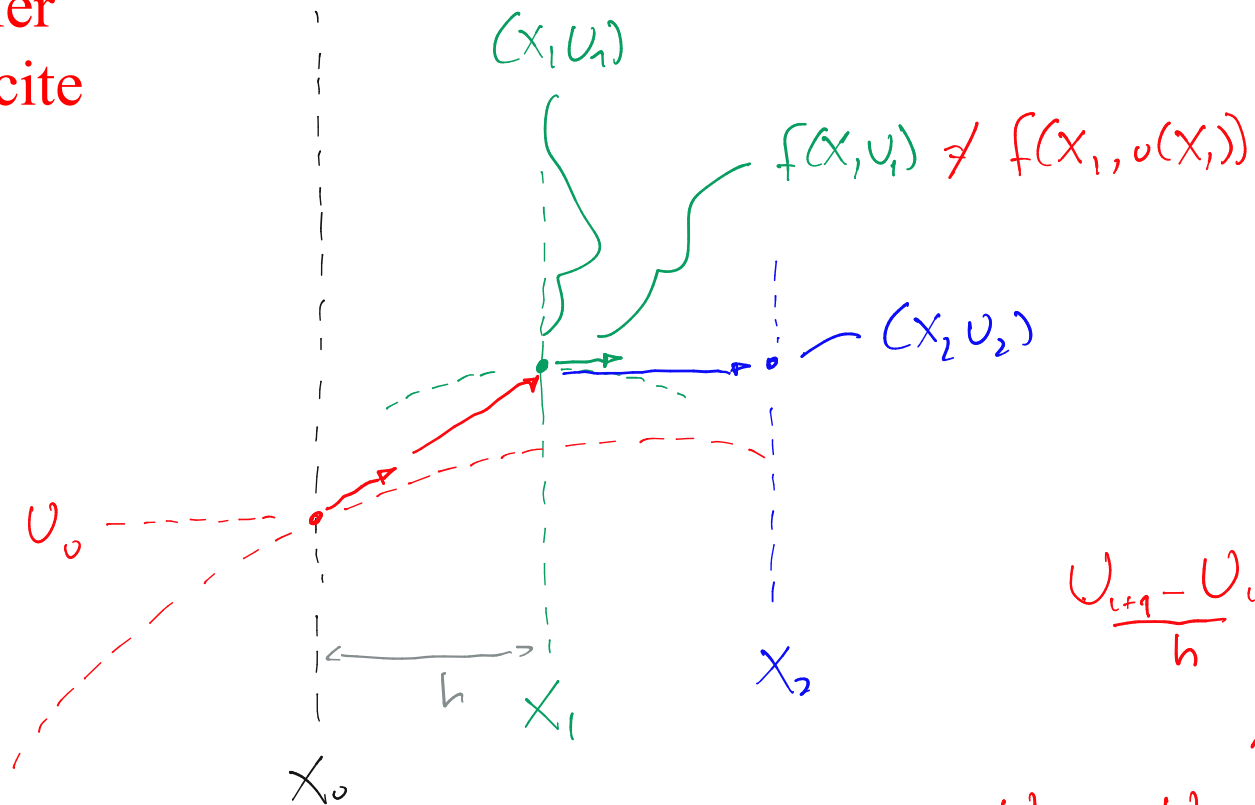


Méthode d'Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$



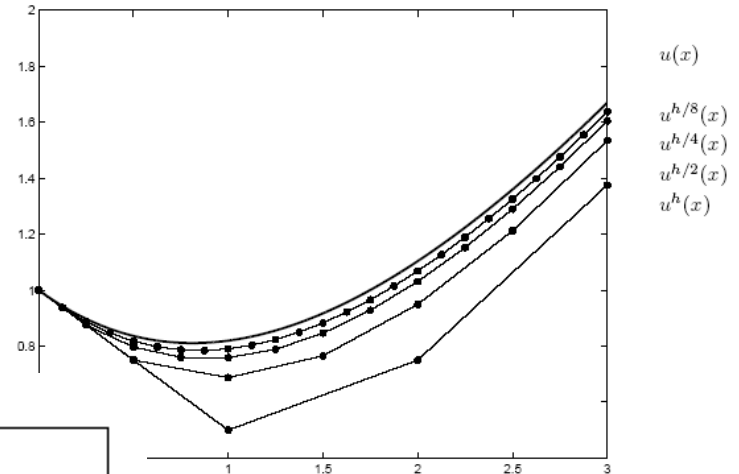
Méthode d'Euler explicite



$$\frac{U_{i+1} - U_i}{h} \approx f(x_i, u_i)$$

$$U_{i+1} = U_i + h f(x_i, u_i)$$

Euler explicite...

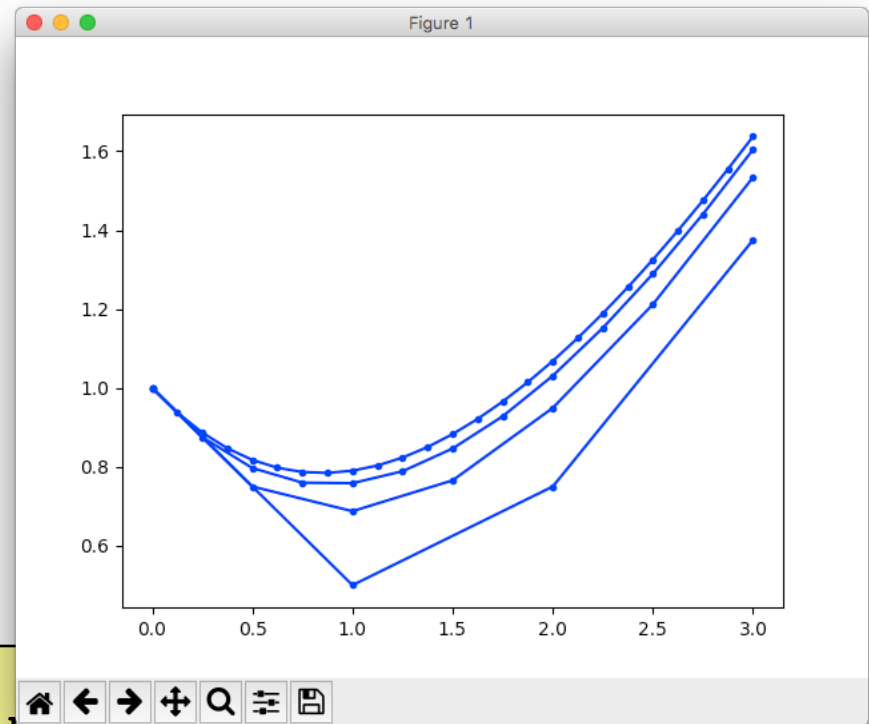


Méthode d'Euler explicite pour $u' = (x - u)/2$

X_i	$u^h(X_i)$	$u^{h/2}(X_i)$	$u^{h/4}(X_i)$	$u^{h/8}(X_i)$	$u(X_i)$
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1250				0.9375	0.9432
0.2500			0.8750	0.8867	0.8975
0.3750				0.8469	0.8621
0.5000		0.7500	0.7969	0.8174	0.8364
0.7500			0.7598	0.7868	0.8119
1.0000	0.5000	0.6875	0.7585	0.7902	0.8196
2.0000	0.7500	0.9492	1.0308	1.0682	1.1036
3.0000	1.3750	1.5339	1.6043	1.6374	1.6694

... converge

Euler explicite $u' = (x-u)/2$



```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

Xstart = 0; Xend = 3; Ustart = 1;
for n in [3,6,12,24]:
    h = (Xend-Xstart)/n
    X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
    U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
    for i in range(n):
        U[i+1] = U[i] + h*(X[i]-U[i])/2
    plt.plot(X,U,'.-b')
plt.show()
```

$$\frac{X_i - U_i}{2}$$

$$U_{i+1} = U_i + h \overbrace{f(X_i, U_i)}$$

Et parfois, cela ne marche pas !

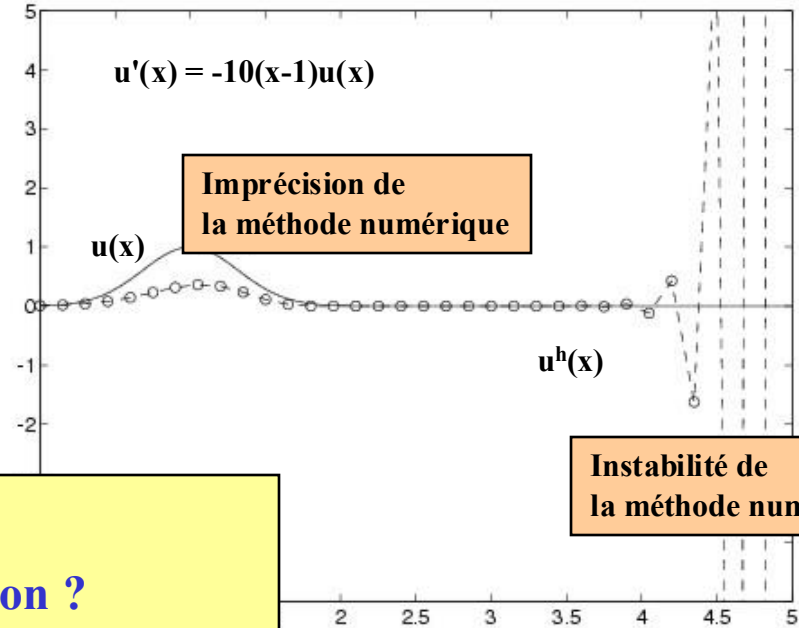
$$X_i = a + hi \quad i = 0, \dots, m,$$

Définir m points

Comment choisir le pas de discrétisation ?
Pas constant ou adaptatif ?

Chercher une approximation U_k en X_k

Comment avoir une méthode stable ?
Comment avoir une méthode précise ?



$$u(X_i) \approx u^h(X_i) = U_i$$

Méthodes de Taylor explicites

$$u(X_1) = u(X_0) + \overbrace{(X_1 - X_0)}^h \hat{f} + \frac{h^2}{2} \hat{f}' + \frac{h^3}{6} \hat{f}''$$

$u'(X_0)$ $u''(X_0)$ $u'''(X_0)$

$$\hat{f} \quad x \rightarrow f(x, u(x)) = \hat{f}(x)$$

$$f \quad (x, u) \rightarrow f(x, u)$$

$$\boxed{\hat{f}' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u'}$$

$$\hat{f}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f f + \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \right) f$$

$$\boxed{\hat{f}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 f}$$

Exemple
So easy !

$$\hat{f} = \frac{x - u(x)}{2}$$

$$u'(x) = \frac{x - u(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}' &= \frac{1}{2} - \frac{u'(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x - u(x)}{2} \right) \end{aligned}$$

$\approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}u(x)$

$$\hat{f}'' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \hat{f}$$

$$\hat{f}''' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \hat{f}$$

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= U_i \\ &+ h \left[\frac{X_i - U_i}{2} \right] \\ &+ \frac{h^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (X_i - U_i) \right] \\ &+ \frac{h^3}{6} \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} (X_i - U_i) \right] \\ &+ \frac{h^4}{24} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{16} (X_i - U_i) \right] \\ &+ \frac{h^5}{120} \left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{32} (X_i - U_i) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i \\
&+ h \left[\frac{X_i - U_i}{2} \right] \\
&+ \frac{h^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} (X_i - U_i) \right] \\
&+ \frac{h^3}{6} \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} (X_i - U_i) \right] \\
&+ \frac{h^4}{24} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{16} (X_i - U_i) \right] \\
&+ \frac{h^5}{120} \left[-\frac{1}{16} + \frac{1}{32} (X_i - U_i) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{2} (X_i - U_i) \\
&+ \frac{h^2}{8} (2 - X_i + U_i) \\
&- \frac{h^3}{48} (2 - X_i + U_i) \\
&+ \frac{h^4}{384} (2 - X_i + U_i) \\
&- \frac{h^5}{384} (2 - X_i + U_i)
\end{aligned}$$

16×24
 $= 240 + 120 + 24$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{384}$



Et zou !

$$\hat{f}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 f$$

Méthodes explicites de Taylor :

Effectuons un développement de Taylor...

$$u(x) = u(X_0) + (x - X_0) u'(X_0) + \frac{(x - X_0)^2}{2!} u''(X_0) + \dots$$

En vertu du problème à la valeur initiale,

$$= U_0 + (x - X_0) \hat{f}(X_0) + \frac{(x - X_0)^2}{2!} \hat{f}'(X_0) + \dots$$

En tenant compte que $\hat{f}' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u'$ et que $u' = \hat{f}$

$$= U_0 + (x - X_0) f(X_0, U_0) + \frac{(x - X_0)^2}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f \right)_{(X_0, U_0)} + \frac{(x - X_0)^3}{3!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} f + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 f \right)_{(X_0, U_0)} + \dots$$

$$\hat{f} : x \rightarrow f(x, u(x))$$

Attention, la fonction à une variable ressemble à la fonction à deux variables, mais ce n'est pas la même chose !!!

Méthodes de Taylor d'ordre n

$$U_{i+1} = U_i + h \underbrace{\left[f + \frac{h}{2!} \frac{df}{dx} \Big|_{u'=f} + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} \frac{d^{(n-1)}f}{dx^{n-1}} \Big|_{u'=f} \right]}_{\Phi(X_i, U_i)} \Big|_{(X_i, U_i)}$$

$$\frac{d}{dx} \Big|_{u'=f} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

Euler explicite (Taylor n=1)

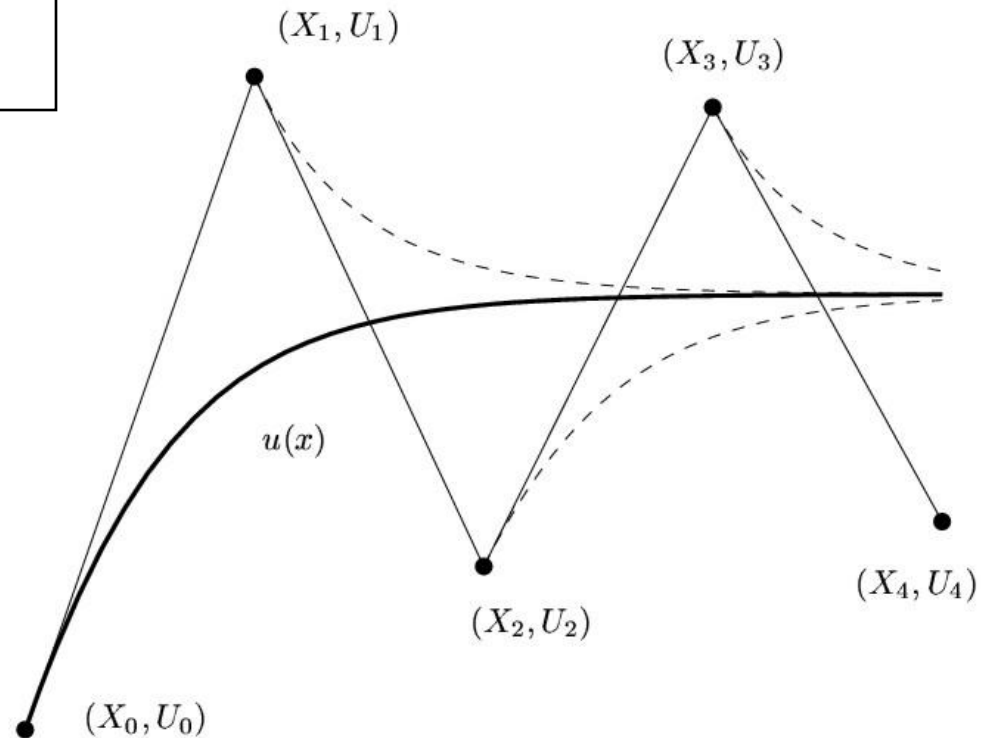
Ordre de précision linéaire
Mise en œuvre facile
Stabilité ?

Taylor n quelconque

Ordre de précision arbitrairement élevé,
Mise en œuvre fastidieuse si n élevé
Stabilité ?

Méthode de Taylor d'ordre 1 Euler explicite

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$



Exemple

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{cases} u'(x) = (x - u(x))/2, & x \in [0, 3] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

=====
Explicit Euler method
=====

==== Euler (order=1) h=1.000 : eh(Xend) = 2.94e-01
==== Euler (order=1) h=0.500 : eh(Xend) = 1.35e-01
==== Euler (order=1) h=0.250 : eh(Xend) = 6.51e-02
==== Euler (order=1) h=0.125 : eh(Xend) = 3.20e-02

=====
Estimated order : 1.0678

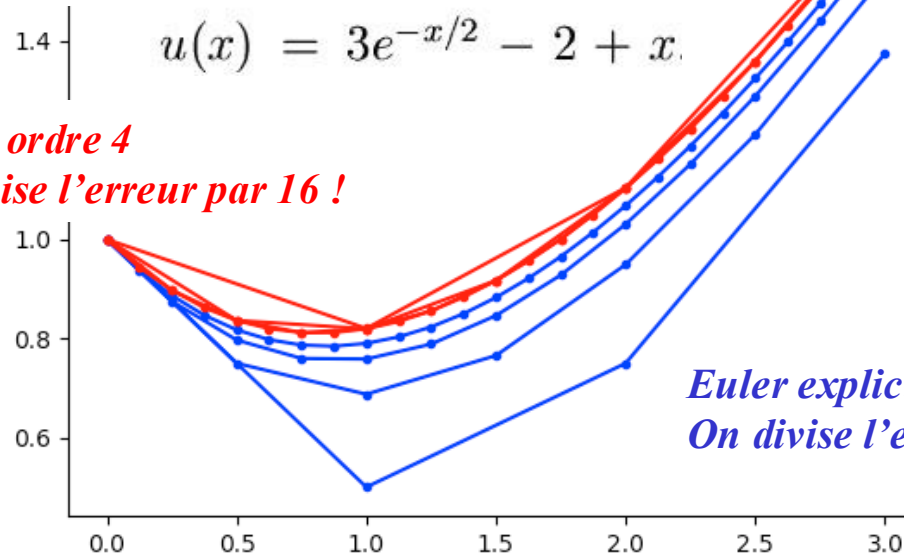
=====
Explicit Taylor order 4 method
=====

==== Taylor (order=4) h=1.000 : eh(Xend) = 7.96e-04
==== Taylor (order=4) h=0.500 : eh(Xend) = 4.03e-05
==== Taylor (order=4) h=0.250 : eh(Xend) = 2.27e-06
==== Taylor (order=4) h=0.125 : eh(Xend) = 1.35e-07

=====
Estimated order : 4.1767

Taylor ordre 4

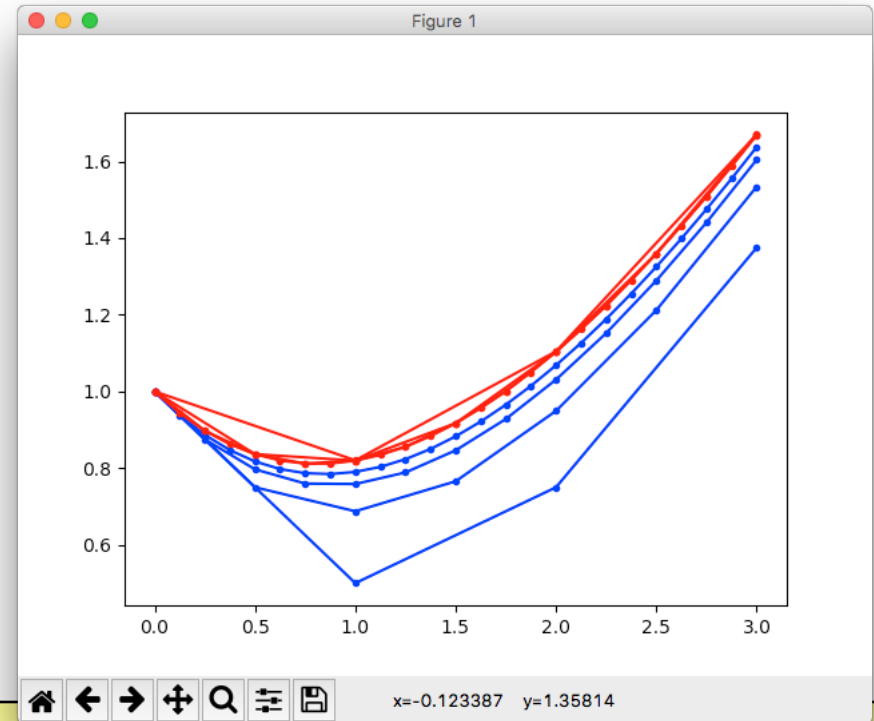
On divise l'erreur par 16 !



Euler explicite

On divise l'erreur par 2 !

Taylor
ordre 4
 $u' = (x-u)/2$



```
u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x
```

```
Xstart = 0; Xend = 3;
```

```
Ustart = 1;
```

```
for n in [3,6,12,24]:
```

```
    h = (Xend-Xstart)/n
```

```
    X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
```

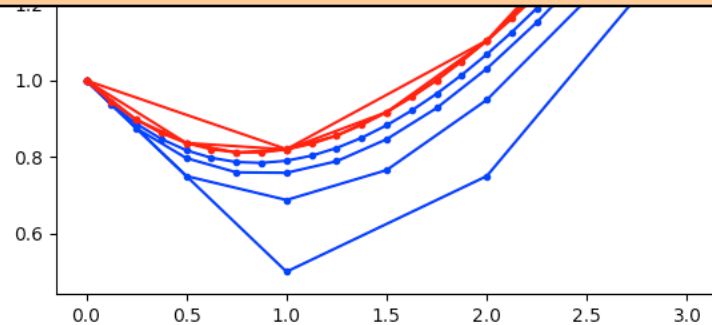
```
    U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
```

```
    for i in range(n):
```

```
        U[i+1] = U[i] + h*(X[i]-U[i])/2 + (h**2)*(2-X[i]+U[i])/8 \
            - (h**3)*(2-X[i]+U[i])/48 + (h**4)*(2-X[i]+U[i])/384
```

Calcul du taux de convergence

```
===== Explicit Taylor order 4 method =====  
==== Taylor (order=4) h=1.000 : eh(Xend) = 7.96e-04  
==== Taylor (order=4) h=0.500 : eh(Xend) = 4.03e-05  
==== Taylor (order=4) h=0.250 : eh(Xend) = 2.27e-06  
==== Taylor (order=4) h=0.125 : eh(Xend) = 1.35e-07  
===== Estimated order : 4.1767
```



```
u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x  
error = zeros(4)  
for j in range(4):  
    n = 3*pow(2,j)  
    h = (Xend-Xstart)/n  
    X = linspace(Xstart,Xend,n+1)  
    U = zeros(n+1); U[0] = 1  
    for i in range(n):  
        U[i+1] = U[i] + h*(X[i]-U[i])/2 + (h**2)*(2-X[i]+U[i])/8 \  
            - (h**3)*(2-X[i]+U[i])/48 + (h**4)*(2-X[i]+U[i])/384  
    error[j] = abs(U[-1]-u(Xend))  
    print(" ==== Taylor : h=%5.3f : eh(Xend) = %8.2e " % (h,error[j]))  
order = mean(log(error[:-1]/error[1:])/log(2))  
print(" ===== Estimated order : %.4f " % order)
```

Ne jamais dupliquer du code !

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

class ExplMethods(object):
    def __init__(self,name,color,f):
        self.name = name
        self.f = f
        self.color = color

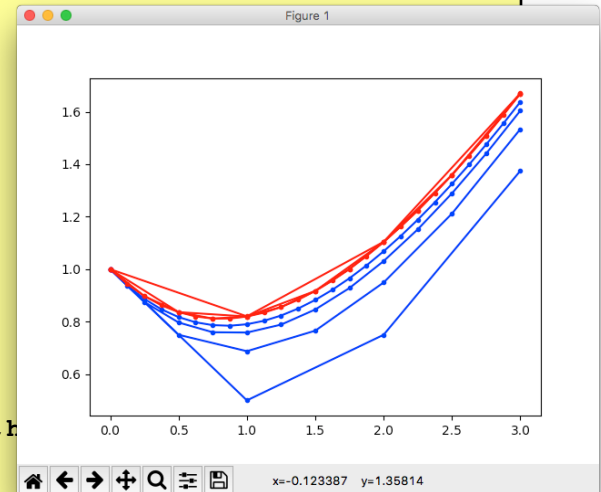
integrators = [ExplMethods("Explicit Euler order 1",".-b",
                          lambda u,x,h : h*(x-u)/2 ),
              ExplMethods("Explicit Taylor order 4",".-r",
                          lambda u,x,h : h*(x-u)/2+(2-x+u)*((h**2)/8-(h**3)/48+(h**4)/384) ) ]

u = lambda x : 3*exp(-x/2)-2+x
Xstart = 0; Xend = 3; Ustart = 1;

for integrator in integrators:
    print(" ===== %s method ===== " % integrator.name)
    error = zeros(4)
    for j in range(4):
        n = 3*pow(2,j)
        h = (Xend-Xstart)/n
        X = linspace(Xstart,Xend,n+1)
        U = zeros(n+1); U[0] = Ustart
        for i in range(n):
            U[i+1] = U[i] + integrator.f(U[i],X[i],h)
        plt.plot(X,U,integrator.color)
        error[j] = abs(U[-1]-u(Xend))
    print(" ==== %s : h=%5.3f : eh(Xend) = %8.2e " % (integrator.name,h

order = mean(log(error[:-1]/error[1:])/log(2))
print(" ===== Estimated order : %.4f " % order)
```

*Introduire
une classe
d'intégrateurs explicites*



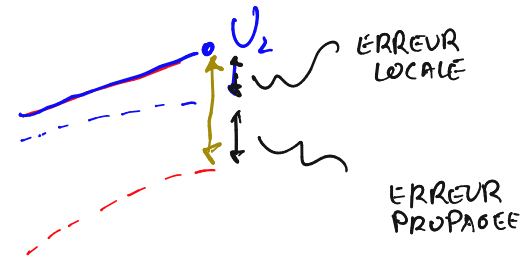
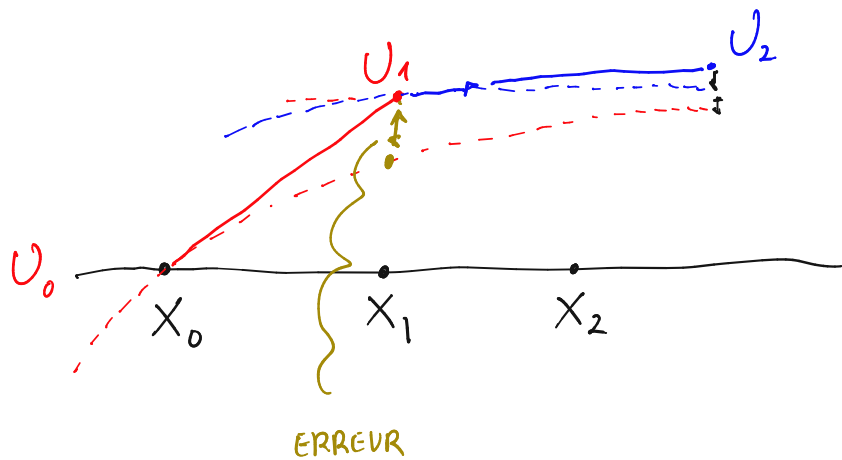
Erreur locale
 Erreur propagée

$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

$$\boxed{U_1} + f(X_1, U_1) h$$

$$e^h(X_2) = \underbrace{v(X_2)} - U_2$$

$$\boxed{v(X_1)} + h \underbrace{f(X_1, v(X_1))}_{v'(X_1)} + \frac{h^2}{2} v''(\xi)$$



Comment
estimer
l'erreur ?

$$\boxed{U_1} + f(X_1, U_1)h$$

$$e^h(X_2) = \underbrace{u(X_2)} - U_2$$

$$\boxed{u(X_1)} + h f(X_1, u(X_1)) + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

$$e^h(X_2) = e^h(X_1) + h \left[\underbrace{f(X_1, u(X_1))}_{\substack{e^h(X_1) \frac{\partial f}{\partial u} |_{(X, \xi)}}} - \underbrace{f(X_1, U_1)}_{\mathcal{J}_1} \right] + \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

$$+ \frac{h^2}{2} u''(\xi)$$

e_2

$$e^h(X_1) \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(X, \xi)}$$

\mathcal{J}_1

$$= e^h(X_1) \underbrace{\left[1 + h \mathcal{J}_1 \right]}_{\text{FACTEUR D'AMPLIFICATION}} + e_2$$

$$|1 + h \mathcal{J}_1| < 1$$

$$-2 < h \mathcal{J}_1 < 0$$

Comment estimer l'erreur ?

Le roi s'en va par une porte...

Développement en série de Taylor

$$u(X_{i+1}) = u(X_i) + h f(X_i, u(X_i)) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$$

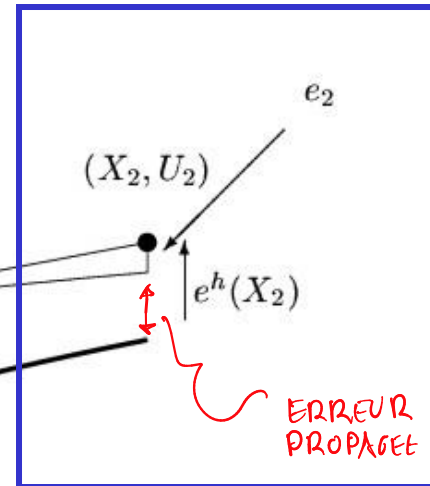
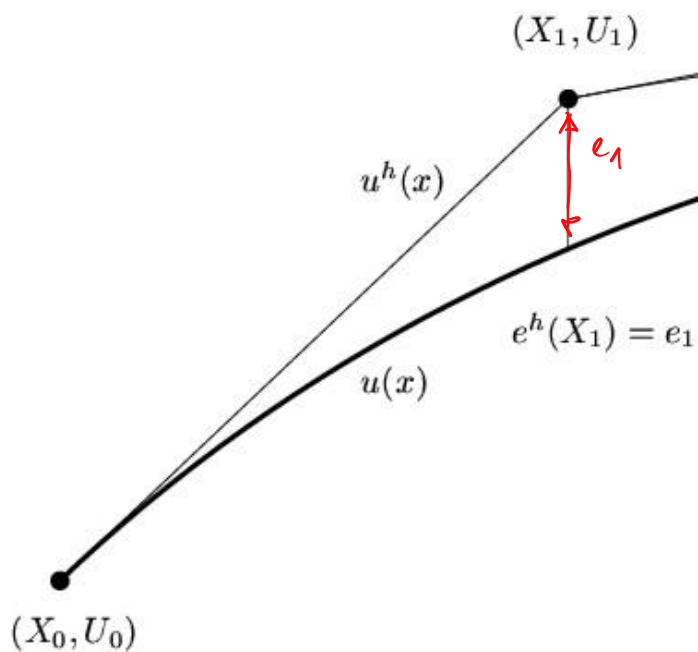
ξ_{i+1} est un point particulier de l'intervalle $[X_i, X_{i+1}]$

*Et un triste substitut
apparaît...*

avec son cortège de courtisans...

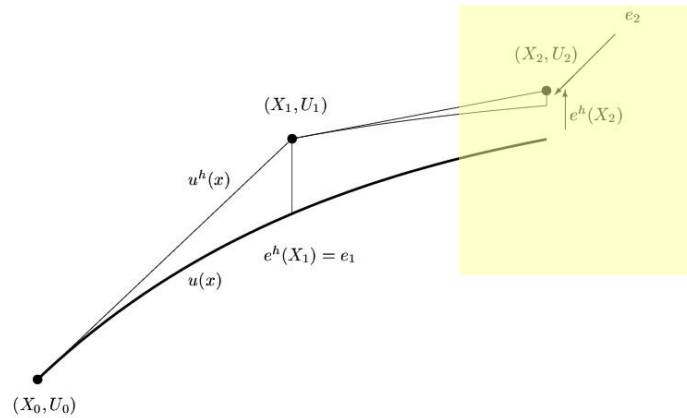
Définissons l'erreur

$$e^h(X_i) = u(X_i) - \underbrace{u^h(X_i)}_{U_i}$$



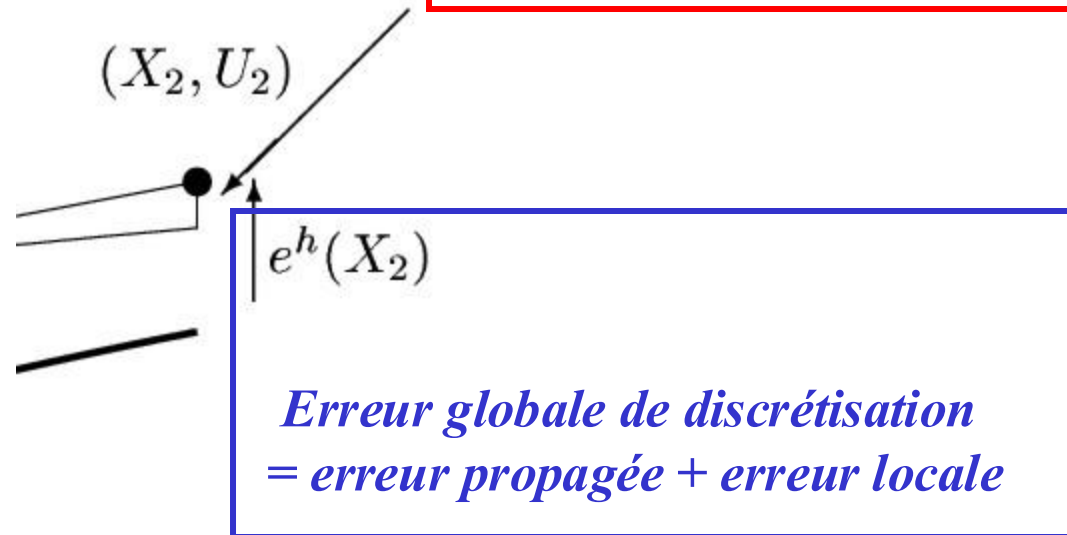
Effectuons un zoom !

Erreur locale et globale



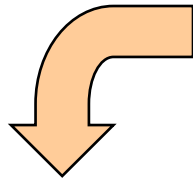
*Erreur locale commise
lors du pas de X_1 à X_2*

e_2

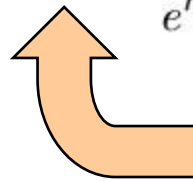


Taylor dit bonjour...

$$u(X_{i+1}) = u(X_i) + h f(X_i, u(X_i)) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$$



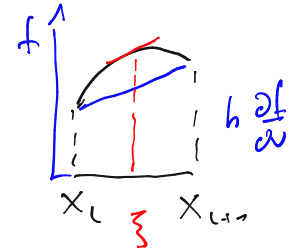
$$\underbrace{u(X_{i+1})}_{e^h(X_{i+1})} - \underbrace{U_{i+1}}_{U_{i+1}} = \underbrace{u(X_i)}_{e^h(X_i)} - \underbrace{U_i}_{U_i} + h \left(\underbrace{f(X_i, u(X_i))}_{f(X_i, u(X_i))} - \underbrace{f(X_i, U_i)}_{f(X_i, U_i)} \right) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$$



$$U_{i+1} = U_i + h f(X_i, U_i)$$

... à Euler

$$\underbrace{u(X_{i+1}) - U_{i+1}}_{e^h(X_{i+1})} = \underbrace{u(X_i) - U_i}_{e^h(X_i)} + h \left(f(X_i, u(X_i)) - f(X_i, U_i) \right) + \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$$



En vertu du théorème de la valeur moyenne, il existe ζ_i dans l'intervalle entre U_i et $u(X_i)$ si f est continue et différentiable par rapport à u .

$$e^h(X_{i+1}) = e^h(X_i) + h \underbrace{\left(u(X_i) - U_i \right)}_{e^h(X_i)} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(X_i, \zeta_i)} + \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$$

En définissant $J_i = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(X_i, \zeta_i)}$ et $e_{i+1} = \frac{h^2}{2} u''(\xi_{i+1})$,

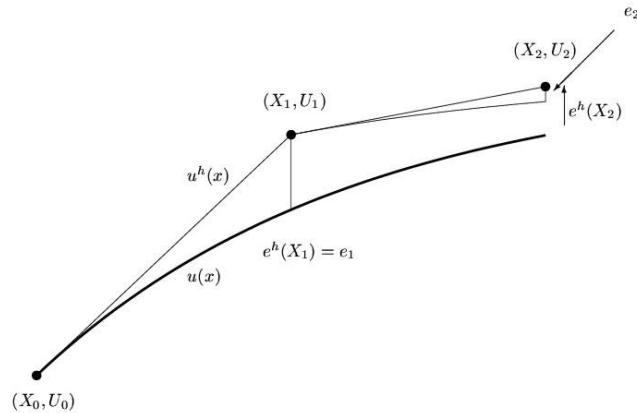
$$e^h(X_{i+1}) = e^h(X_i) \left(1 + hJ_i \right) + e_{i+1}$$

Erreur locale

Erreur propagée

$$a_i = (1 + hJ_i)$$

*Facteur d'amplification ou
d'amortissement (cas du dessin !)
des erreurs précédentes*



Propagation des erreurs...

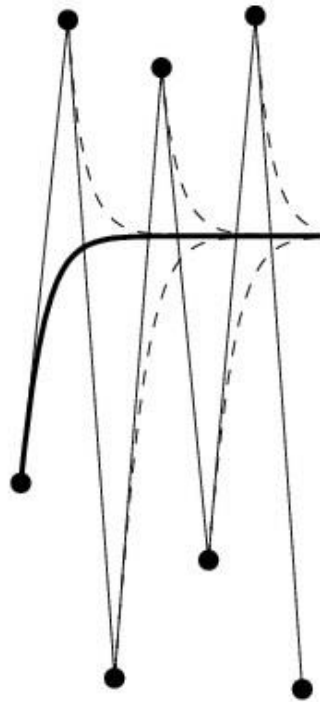
$$\begin{aligned} e^h(X_1) &= e_1 \\ e^h(X_2) &= a_1 e_1 + e_2 \\ e^h(X_3) &= a_2 a_1 e_1 + a_2 e_2 + e_3 \end{aligned}$$

...

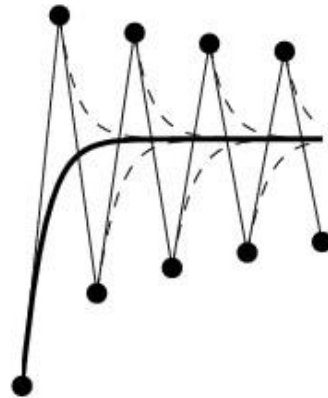
$$e^h(X_{i+1}) = \underbrace{a_i a_{i-1} \dots a_2 a_1 e_1 + a_i \dots a_2 e_2 \dots + a_i e_i}_{\text{erreur propagée}} + e_{i+1}$$

Stabilité de la méthode d'Euler

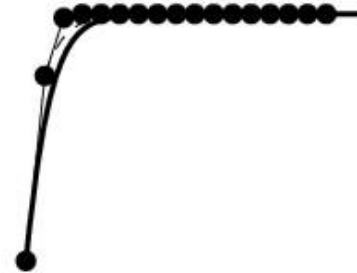
$$\begin{array}{l} \overbrace{|1 + hJ_i|}^{a_i} < 1 & \forall i, \\ \downarrow \\ -2 < hJ_i < 0 & \forall i, \end{array}$$



$h = 1.25$ (instable)



$h = 1.00$



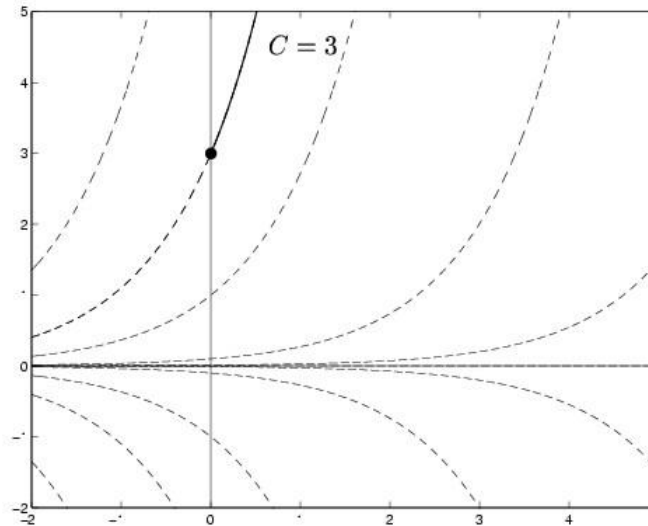
$h = 0.50$ (stable)

Stabilité...

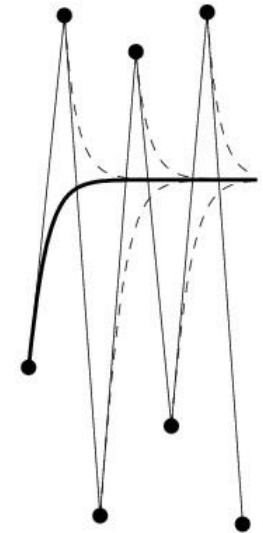
Stabilité d'un système physique :
systèmes chaotiques, turbulence...



Stabilité d'un modèle mathématique :
sensibilité aux données



Stabilité d'une méthode numérique :
*instabilité numérique de la méthode
d'Euler explicite*



*Modélisation
mathématique*

*Simulation
numérique*