EPL	
S7 : Mars 2022	*Méthodes numériques*
LEPL1104	**Solution**

Quadrature de Putin-Zelensky

Soit trois abscisses russes $(X_0, X_1, X_2) = (-\alpha, 0, \alpha)$, où α est un nombre réel donné tel que $0 < \alpha < 1$.
Soit trois nombres ukrainiens réels w_0, w_1, w_2.
L'intégrale de $u(x)$ sur $[-1, 1]$ est estimée par la quadrature de Putin-Zelensky avec l'expression :

$$I_h \;=\; \sum_{i=0}^{2} w_i \, u(X_i) \;\approx\; \int_{-1}^{1} u(x)dx \;=\; I$$

L'implémentation sous `python` de cette quadrature pour une fonction `u` peut s'écrire :

```
def PutinZelensky(u) :
  X = [-0.774596669241483, 0.000000000000000, 0.774596669241483]
  W = [ 0.555555555555556, 0.888888888888889, 0.555555555555556]
  return u(X) @ W
```

Il s'agit maintenant d'aider Vladimir et Volodymyr à peaufiner leur quadrature de manière pacifique !

1. Trouver une expression des trois nombres w_0, w_1, w_2 en fonction de α
   afin que la quadrature soit exacte pour tout polynôme quelconque de degré 2.

$$\textit{Il faut exiger que :} \left\{ \begin{array}{rcl} w_0 + w_1 + w_2 &=& 2 \\ -w_0\alpha + w_2\alpha &=& 0 \\ w_0\alpha^2 + w_2\alpha^2 &=& 2/3 \end{array} \right.$$

La première équation est requise pour intégrer exactement un terme constant.
La seconde équation permet d'intégrer exactement x.
La dernière équation correspond à x^2.

$$\int_{-1}^{1} x^2 \; dx = \frac{2}{3} = w_0\alpha^2 + w_2\alpha^2 = 2w_0\alpha^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{w_0 = w_2 = \frac{1}{3\alpha^2} \qquad w_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}}$$

Notons que l'on intègre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 3 !

2. Obtenir α tel que la quadrature soit exacte pour tout polynôme de degré 4.

C"est exactement le même principe.

$$\int_{-1}^{1} x^4 \; dx = \frac{2}{5} = w_0\alpha^4 + w_2\alpha^4 = \frac{2}{3\alpha^2}\alpha^4 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}}$$

Notons à nouveau que l'on intègre aussi exactement n'importe quel polynôme de degré 5 !

3. Ecrire une fonction `python` :

   `I = CompositePutinZelensky(u,n)`

   qui divise $[-1,1]$ en n sous-intervalles égaux et qui applique la règle de Putin-Zelensky à trois points dans chaque sous-intervalle pour obtenir un estimation $I_{h/n}$ de I.

   L'unique difficulté consiste à modifier les abscisses et les poids sur chaque intervalle !
   Il faut effectuer un petit changement de variable pour les abscisses et adapter les poids (ou le résultat final). Une implémentation simple pourrait être :

```
def CompositePutinZelensky(u,n) :
  X = array([-0.774596669241483, 0.000000000000000, 0.774596669241483])
  W = array([ 0.555555555555556, 0.888888888888889, 0.555555555555556])
  Xglobal = linspace(-1,1,n+1); h = 2/n; I=0;
  for i in range(0,n) :
    Xlocal = Xglobal[i] + h/2 + X * h/2
    Wlocal = W * h/2
    I = I + u(Xlocal) @ Wlocal
  return I
```

   Les étudiants astucieux observeront qu'il est possible de vectoriser le code pour le rendre plus efficace.
   Attention, cela rend parfois votre réponse fausse et donc vous fait tout perdre !
   Ce n'était pas demandé !
   La perfection est parfois franchement inutile !
   Donc se contenter d'une implémentation simple telle que proposée est souvent plus sûr de gagner des points faciles:-)

   Observer qu'il faut de manière explicite transformer la liste en un tableau `numpy` *pour pouvoir écrire* `X * h/2`*, alors que ce n'était pas requis pour écrire* `u(X) @ W` *: les mystères de l'upgrading automatique de* `python` *des listes en tableaux sont parfois toalement impénétrables.*

4. Donner l'ordre de précision[1] de Putin-Zelensky composite à 3 points.
   Justifier votre réponse brièvement.

   Pour la quadrature composite de Gauss-Legendre à trois points : $\boxed{m \quad = \quad 6}$

   Comme on intègre exactement un polynôme de degré cinq, on doit intégrer, sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré six: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^7)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^6)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales !
   Oui, j'ai bien écrit composite dans la question !

   C'est une question totalement classique que l'enseignant utilise de manière quasiment répétitive... et comme d'habitude, le même pourcentage des étudiants échouent à cette question :-)

5. Considérons I_h et $I_{h/2}$ obtenus par Putin-Zelensky composite avec 1 et 2 sous-intervalles.
   Donner I_* la combinaison linéaire de I_h et $I_{h/2}$ qui sera la meilleure extrapolation de Richardson.
   Quelle sera l'ordre théorique de précision de I_* ?

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6 : $\boxed{\dfrac{\Big(64 I_{h/2} - I_h\Big)}{63}}$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.
   La règle de Gauss-Legendre est, en effet, une formule parfaitement symétrique.
   Si la réponse fournie ici est (in-)cohérente avec un résultat erroné à la question précédente, le correcteur en tient compte, bien évidemment.

[1] Il s'agit de l'exposant m du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^m)$.

6. Donner l'expression de I_h en fonction[2] de α lorsqu'on applique Putin-Zelensky composite à 3 points avec un unique intervalle $[-1, 1]$ pour la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{x+2}$$

Il suffit tout simplement d'écrire : $\boxed{I_h = \frac{1}{3\alpha^2}\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2+\alpha}\right) + \left(2 - \frac{2}{3\alpha^2}\right)\frac{1}{2}}$

7. Calculer maintenant α afin que l'erreur $E_h = I - I_h$ soit minimale pour cette fonction g. Est-ce que cette valeur peut ou doit être identique à celle obtenue plus haut ?

L'erreur est minimale lorsqu'elle est nulle :-)
Il suffit donc juste de calculer l'intégrale exacte de g et d'imposer que $I = I_h$.

En d'autres mots, on recherche α tel que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\,dx \;=\; \ln(3) \;=\; \frac{1}{3\alpha^2}\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2+\alpha}\right) + 1 - \frac{1}{3\alpha^2}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
3\alpha^2(4-\alpha^2)\ \ln(3) &= 4 + 3\alpha^2(4-\alpha^2) - 4 + \alpha^2 \\
3\alpha^2(4-\alpha^2)\ \ln(3) &= 3\alpha^2(4-\alpha^2) + \alpha^2 \\
3(4-\alpha^2)\ \ln(3) &= 3(4-\alpha^2) + 1 \\
12\ln(3) - 3\ln(3)\ \alpha^2 &= 13 - 3\alpha^2 \\
(12\ln(3) - 13) &= (3\ln(3) - 3)\ \alpha^2
\end{aligned}$$

On conclut finalement : $\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{12\ln(3) - 13}{3\ln(3) - 3}}}$

Il n'y a vraiment strictement aucune raison pour que cette valeur corresponde à la valeur habituelle de Gauss-Legendre (oui : la quadrature de Putin-Zelensky : ce n'est rien d'autre qu'une règle de Gauss-Legendre :-). On impose ici de pouvoir intégrer g et non plus un quelconque polynôme...

Observons que la valeur trouvée tombe dans l'intervalle $[0, 1]$: ce qui n'était pas évident a priori !

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement $(3, 3, 3, 2, 4, 2, 3)$.
Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très courte, même en s'inspirant très très largement des tuyaux des années précédentes, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)

Attention, en juin 2022, je n'ai pas dit que je ré-utiliserai une question de juin 2012 : au jeu du chat et de la souris, c'est toujours l'enseignant qui gagne !
Et oui, l'interrogation de 2022 était vraiment à la portée de tous et de toutes !
Mais, rien n'est perdu pour juin 2022, le but de l'interrogation est de surmonter un échec et de réussir l'examen en juin !

[2] Il ne faut donc PAS remplacer α par l'expression trouvée plus haut :-)