FSAB11BA	
Mars 2023	*Méthodes numériques*
ELPL1104	**Solution**

Y-a-t-il un but de Lukaku ?

Eh non : y en a eu trois :-)

Crédit : Getty Images

Soit les points $[T_0, T_1, T_2] = [-1, 0, 1]$. Nous souhaitons calculer l'énergie cinétique d'un tir du joueur de football favori d'Ange. La trajectoire $\mathbf{x}(t)$ du tir est définie dans le plan par :

$$x(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{2} \phi_i(t)\ X_i \qquad \text{et} \qquad y(t) \quad = \quad \sum_{i=0}^{2} \phi_i(t)\ Y_i$$

	X_i	Y_i
0	-α	-2
1	0	0
2	0	2

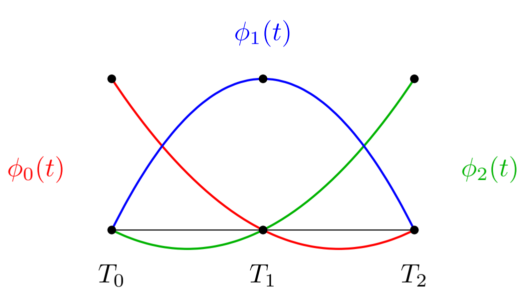
sur l'intervalle $t \in [T_0, T_2] = [-1, 1]$. Les fonctions $\phi_i(t)$ sont les polynômes de Lagrange de degré deux associés aux abscisses T_i. Le paramètre α est un réel strictement positif.

Afin d'identifier un éventuel cas de dopage, il s'agit d'estimer avec précision l'énergie cinétique du tir :

$$I = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \ dt$$

en utilisant une règle de Gauss-Legendre avec deux points.

1. Esquisser graphiquement les fonctions $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sur l'intervalle $t \in [T_0, T_2] = [-1, 1]$.



Il ne faut pas faire un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions ressemblent à une parabole et n'aient pas de point d'inflexion. Il faut aussi que les trois fonctions valent l'unité aux noeuds auxquelles elles sont associées. Pas mal d'étudiants échouent dans cette question vraiment très facile, tout en parvenant à obtenir l'expression analytique correcte des fonctions.

Quelques étudiants souhaitent absolument dessiner des fonctions B-splines !
D'autres dessinent des polynômes de degré manifestement trop élevé !
Certains dessins sont même vraiment proches de l'art abstrait :-)

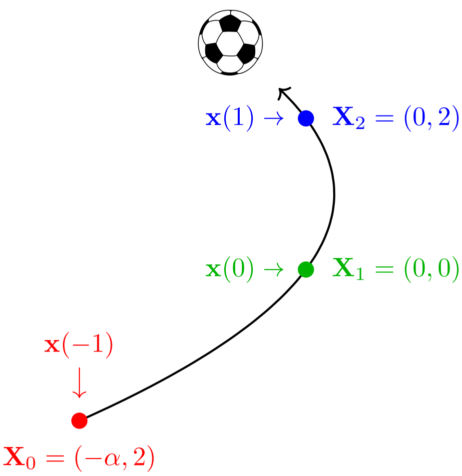
2. Donner l'expression analytique de ces trois fonctions $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$.

Ces fonctions sont : $\boxed{\phi_0(t) = \dfrac{t(t-1)}{2} \qquad \phi_1(t) = (1-t)(1+t) \qquad \phi_2(t) = \dfrac{t(t+1)}{2}}$

Il n'est ni nécessaire, ni conseillé de développer ces expressions. Par contre, fournir la formule générale des polynômes de Lagrange sans même remplacer les valeurs de noeuds n'est pas acceptable.

De manière assez prévisible, quelques étudiants prennent α comme une valeur pour les noeuds, en appliquant de manière purement lexicographique la formule des notes de cours : non, non, non, ici on effectue deux interpolations $x(t)$, $y(t)$ et non l'interpolation de $y(x)$. Evidemment, ils obtiennent ensuite des choses assez farfelues avec deux noeuds identiques et des dénominateurs nuls...

3. Esquisser graphiquement la trajectoire $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \in= [-1, 1]$.



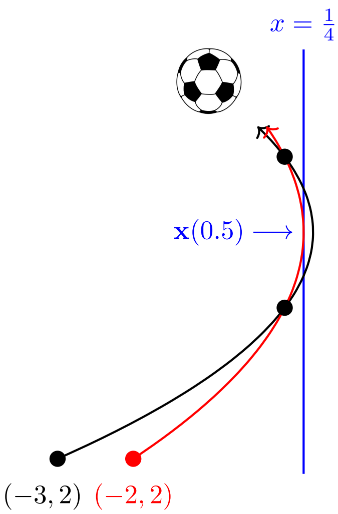
La représentation paramétrique de la courbe s'écrit simplement

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\tfrac{\alpha}{2}\ t(t-1)\\
y(t) &= -t(t-1) + t(t+1) \quad = \quad 2t
\end{aligned}
$$

A nouveau, il ne faut pas faire un dessin précis, mais faire cette esquisse permet de bien comprendre le problème qu'il s'agira de résoudre par la suite ! Beaucoup d'étudiants ne notent pas que la trajectoire d'une courbe paramétrique se dessine dans le plan (x, y) et que l'usage d'une police en gras dans les notes de cours fait toujours référence à un vecteur !

L'enseignant a été sans doute un peu audacieux en n'incluant pas la définition de $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ dans l'énoncé de la question. Je le reconnais bien volontiers. C'est pourquoi, les étudiants qui me fournissent la courbe $x(t)$ n'ont pas été pénalisé dans la correction.
Eh oui, la courbe $x(t)$ n'est rien d'autre que mon esquisse qui a subi une petite rotation !

4. Calculer la valeur minimale de α afin que le ballon entre dans le but adverse défini par $x = \frac{1}{4}$.



On doit rechercher t_* et α tels que :

$$
\left\{
\begin{aligned}
x(t_*) &= \tfrac{1}{4},\\
x'(t_*) &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme $x'(t) = -\alpha\ (t - \frac{1}{2})$, on obtient $t_* = \frac{1}{2}$.
Ensuite, on calcule α en écrivant :

$$
x(\tfrac{1}{2}) \;=\; -\frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \;=\; \frac{1}{4}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\frac{\alpha}{8} \;=\; \frac{1}{4}
$$

On conclut donc que : $\boxed{\alpha \quad = \quad 2}$

5. Donner les deux abscisses d'intégration de la règle de Gauss-Legendre sur l'intervalle $[-1, 1]$. Donner les quatre abscisses d'intégration[1] lorsqu'on considère les deux intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. On pourra ainsi obtenir I_{2h} et I_h respectivement pour deux et quatre abscisses.

Les deux abscisses de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$ *sont :* $\boxed{T_i \quad = \quad \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Pour les deux intervalles $[-1, 0]$ *et* $[0, 1]$*, on utilise le changement de variable* $t = \pm 1/2 + \xi/2$*,*

et on obtient les quatre abscisses : $\boxed{T_i \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\pm 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Pas mal d'étudiants n'arrivent pas à trouver les abscisses de Gauss-Legendre pour deux intervalles : et pourtant, je l'avais encore montré au dernier cours :-)

6. Donner l'ordre de précision[2] de cette méthode composite de Gauss-Legendre avec deux points sur chaque intervalle. Justifier votre réponse brièvement.

Pour la quadrature composite de Gauss-Legendre à deux points : $\boxed{n \quad = \quad 4}$

Comme on intègre exactement un polynôme de degré trois, on doit intégrer, sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ *qui est un polynôme de degré quatre : cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en* $\mathcal{O}(h^5)$ *et une erreur globale* $\mathcal{O}(h^4)$ *en additionnant les* $n = 2/h$ *erreurs locales !*

Pour les sceptiques et les incrédules, on peut aussi obtenir cela en effectuant un développant en série de Taylor autour de l'origine d'une fonction quelconque et intégrer le développement sur l'intervalle $[-h, h]$ *:*

$$u(x) \quad = \quad U_0 + x\, U_0' + \frac{x^2}{2}\, U_0'' + \frac{x^3}{6}\, U_0''' + \frac{x^4}{24}\, U_0'''' \cdots$$

$$I \quad = \quad \int_{-h}^{h} u(x)\; dx \quad = \quad \Big[x\Big]_{-h}^{h} U_0 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-h}^{h} U_0'' + \left[\frac{x^5}{120}\right]_{-h}^{h} U_0'''' \cdots$$

$$\downarrow$$

$$= \quad 2h\, U_0 + + \frac{h^3}{3}\, U_0'' + \frac{h^5}{60}\, U_0'''' \cdots$$

Effectuons ensuite la même intégration de ce développement de Taylor en utilisant la méthode de Gauss-Legendre

[1] Deux abscisses sur chacun des deux intervalles, cela fait bien quatre abscisses :-)
[2] Il s'agit de l'exposant n du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^n)$.

$$I_{2h} = h\left[u\left(\frac{-h}{\sqrt{3}}\right) + u\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$\downarrow$$

$$= 2h\ U_0 + \frac{h^3}{3}\ U_0^{''} + \frac{h^4}{90}\ U_0^{''''} \cdots$$

On obtient ainsi une expression de l'erreur locale commise sur chaque intervalle

L'erreur d'intégration la méthode sur chaque intervalle s'écrit : $\boxed{E_h = \frac{C_5 h^5}{180}}$

Et on a donc bien un ordre de précision de 4 !
Il n'était évidemment ni demandé, ni requis de calculer cette expression :-)

7. Donner I_* la combinaison linéaire de I_{2h} et I_h qui sera la meilleure extrapolation de Richardson pour estimer I. Quelle sera l'ordre théorique de précision de I_* ?

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 4 : $\boxed{\frac{\left(16 I_h - I_{2h}\right)}{15}}$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^6)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.
   La règle de Gauss-Legendre est, en effet, une formule parfaitement symétrique.

8. Obtenir les expressions de I_{2h}, I_h et I_*, estimations de notre intégrale I en fonction d'un valeur quelconque de α.

   En écrivant et en dérivant la représentation paramétrique de la courbe,

$$x(t) = -\tfrac{\alpha}{2}\ t(t-1) \qquad \textit{et} \qquad y(t) = -t(t-1) + t(t+1) = 2t$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$x'(t) = -\alpha\ (t - \tfrac{1}{2}) \qquad \textit{et} \qquad y'(t) = 2$$

Il faut donc intégrer : $\boxed{2I = \int_{-1}^{1} \left(\alpha^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\right) dt = 8 + \alpha^2 \int_{-1}^{1} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt}$

En observant qu'il faut intégrer un polynôme du second degré et que notre règle de Gauss-Legendre intègre exactement ce type de polynôme, il suffisait de calculer l'intégrale exacte et de conclure en écrivant que $I = I_{2h} = I_h = I_*$.

Pour vous en convaincre, j'ai fait le calcul de manière analytique et avec la règle de Gauss-Legendre sur un et deux intervalles en prenant $h = 1$.

On obtient évidemment toujours le même résultat :-) La résolution analytique est -au passage- la manière la plus facile et la plus efficace d'obtenir le résultat sans erreur.

$$
\begin{aligned}
2I &= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t}{4} \right]_{-1}^{1} \\
&= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} \right] \;=\; 8 + \alpha^2 \ \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2I_{2h} &= 8 + \alpha^2 \left[\left(\tfrac{-1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2} \right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&= 8 + \alpha^2 \left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \right] \;=\; 8 + \alpha^2 \ \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2I_h &= 8 + \tfrac{1}{2} \ \alpha^2 \left[\left(\tfrac{-1}{2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \left(\tfrac{-1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right] \\
&= 8 + \tfrac{1}{2} \ \alpha^2 \left[1 + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} \right] \;=\; 8 + \tfrac{1}{2} \ \alpha^2 \ \tfrac{28}{12} \;=\; 8 + \alpha^2 \ \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

Attention : ne pas oublier le facteur des poids $\frac{1}{2}$, lorsqu'on a deux intervalles !

On conclut donc : $\boxed{ I \;=\; I_* \;=\; I_h \;=\; I_{2h} \;=\; 4 + \dfrac{7\alpha^2}{12} }$

C'était un tout petit peu calculatoire, mais parfaitement faisable avec un peu de calme et de rigueur. Quelques étudiants soigneux obtiennent deux valeurs identiques et sont complètement perturbés par le fait d'avoir une réponse correcte qu'ils pensent erronée. Que dire alors des étudiants qui ont recommencé leurs calculs jusqu'à obtenir deux solutions différentes alors qu'ils avaient bien obtenu la bonne valeur ? Il n'est donc ni inutile, ni stupide d'avoir confiance en vous et d'assumer ce que vous pensez être la bonne réponse !

La pondération des huit sous-questions est approximativement identique : il y a un point supplémentaire pour des esquisses vraiment jolies et une copie bien rédigée et un point supplémentaire pour la justification de l'ordre de précision de la méthode de Gauss-Legendre.

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très proche d'une question des annales, même en essayant d'être gentil, même en faisant appel au génie de Lukaku, même en n'introduisant aucune monstruosité calculatoire, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)