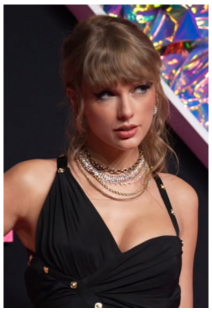
FSAB11BA	
Mars 2024	*Méthodes numériques*
LEPL1104	**Solution**

Qui est notre gentil ***swiftie*** de Taylor ?

Notre assistant favori : Antoine :-)



Crédit : Wikipedia

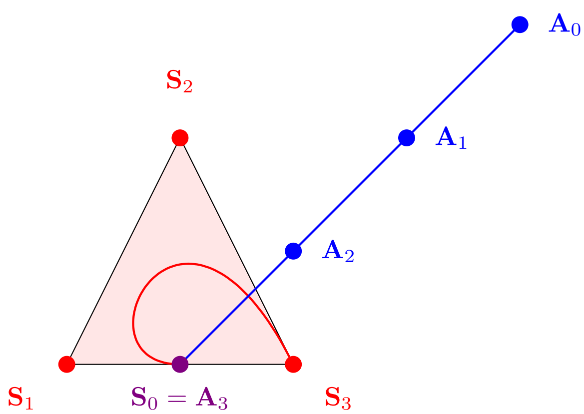
Grâce aux réseaux sociaux, Antoine dispose de données précises sur la trajectoire de la voiture de sa chanteuse adorée. Il a donc pris son propre bolide afin de pouvoir la rencontrer de manière impromptue.
Antoine voudrait avoir la plus jolie photo possible de Taylor Swift avec lui !
On est certain que vous aurez tous à coeur de réaliser le rêve d'enfant du petit Antoine.

On considère les données suivantes pour écrire les équations paramétriques $(x(t), y(t))$ des trajectoires des voitures d'Antoine et de Taylor Swift dans le plan comme des courbes de Bézier :

$$\begin{aligned}
[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7] &= [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] \\
[\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] &= [(3, 3), (2, 2), (\alpha, \alpha), (0, 0)] \\
[\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3] &= [(0, 0), (-1, 0), (0, 2), (1, 0)]
\end{aligned}$$

où α est un paramètre réel positif.
Les deux premières fonctions de base sont $B_0^3(t) = (1-t)^3$ et $B_1^3(t) = 3(1-t)^2 t$.
Malheureusement, Antoine a oublié les équations de $B_2^3(t)$ et $B_3^3(t)$.

1. Dessiner les points de contrôle et esquisser les deux trajectoires, par exemple, pour $\alpha = 1$.



Il ne faut pas faire un dessin précis,
mais un minimum de rigueur est requis !

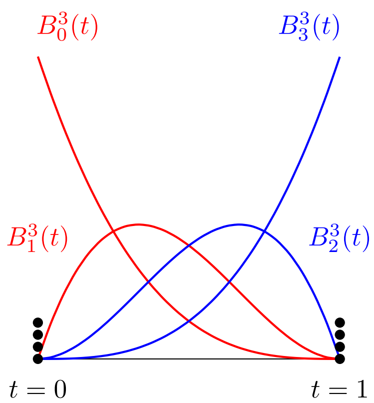
Les deux trajectoires doivent être impérativement dans les polygones formés par les quatre points de contrôle qui sont associées à chaque courbe.

La trajectoire d'Antoine est une droite !
La droite part de $\mathbf{A}_0$ pour arriver à $\mathbf{A}_3$!

La trajectoire de Taylor doit être dans le triangle.
La trajectoire part de $\mathbf{S}_0$ pour arriver à $\mathbf{S}_3$,
mais ne passe pas par les deux points intermédiaires.
Les plus futés observeront que la trajectoire est tangente aux cotés du triangle en début et fin de trajectoire.

Tracer une courbe pour Taylor qui passe par les quatre points fait perdre la moitié des points !
Oui, c'est une erreur impardonnable !
Non, ce n'est pas une interpolation, mais une approximation !

2. Donner les équations de $B_2^3(t)$ et $B_3^3(t)$ définies pour les huit noeuds ci-dessus.
   Esquisser graphiquement l'allure des quatre fonctions de base.



Il ne faut pas faire un dessin précis, mais il est requis que les quatres fonctions ressemblent à des cubiques et que le dessin soit parfaitement symétrique.

Les fonctions n'ont pas de point d'inflexion.

Les deux fonctions $B_0^3(t)$ et $B_3^3(t)$ valent l'unité aux noeuds auxquelles elles sont associées.

Oui, il y a une racine double en $t = 1$ pour $B_1^3(t)$.
Oui, la fonction et la dérivée s'annulent en ce point.

Oui, il y a une symétrie parfaite entre courbes bleues et rouges !

Quelques étudiants souhaitent absolument dessiner des fonctions B-splines uniformes !
D'autres dessinent des polynômes de degré manifestement trop bas ou trop élevés !
Certains dessins sont même vraiment proches de l'art abstrait !

Par symétrie, on observe que $B_2^3(t) = B_0^3(1-t)$ et $B_3^3(t) = B_1^3(1-t)$!

Il suffit donc de remplacer t par $1-t$!
Et inversément, de remplacer $1-t$ par $1-1+t = t$!

Et on obtient -sans aucun calcul- les expressions demandées.

$$\boxed{\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\ B_1^3(t) &= 3\,(1-t)^2 t \\ B_2^3(t) &= 3\,t^2(1-t) \\ B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned}}$$

3. Donner l'équation paramétrique des deux trajectoires définies par les expressions :

$$\underbrace{(x_a(t), y_a(t))}_{\mathbf{a}(t)} = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\ \mathbf{A}_i \quad \text{et} \quad \underbrace{(x_s(t), y_s(t))}_{\mathbf{s}(t)} = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\ \mathbf{S}_i \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Il suffit d'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} x_a(t) \;=\; y_a(t) &= 3(1-t)^3 + 6(1-t)^2 t + 3\alpha(1-t)t^2 \\[1em] x_s(t) &= -3(1-t)^2 t + t^3 \\ y_s(t) &= 6(1-t)t^2 \end{aligned}}$$

Il n'est pas demandé de développer ces expressions et ce n'est d'ailleurs pas utile !
C'est une application purement mécanique de l'expression fournie.

4. Calculer l'endroit où se trouvent Antoine et Taylor au temps $t = 0.5$.
   La position d'Antoine dépendra évidemment de la valeur du paramètre α.

A nouveau, le calcul est élémentaire :
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}(\tfrac{1}{2}) &= \left[\tfrac{9+3\alpha}{8}, \tfrac{9+3\alpha}{8}\right] \\ \mathbf{s}(\tfrac{1}{2}) &= \left[\tfrac{-1}{4}, \tfrac{3}{4}\right]\end{aligned}}$$

Et, la déception du correcteur fût à la hauteur de celle des étudiantes perdues dans leur copie.
En $t = \frac{1}{2}$, *tous les termes en puissance de toutes les fonctions de base valaient* $\frac{1}{8}$ *!*
Et donc, c'était pas bien compliqué !

5. Calculer le(s) point(s) du plan (x, y) où les deux courbes se croisent.
   Il suffit de rechercher le temps t_* *où Taylor croise la droite que parcourt Antoine :* $x_s(t_*) = y_s(t_*)$.

$$\begin{aligned}
-3(1-t_*)^2 t_* + t_*^3 &= 6(1-t_*)t_*^2 \\
&\downarrow \\
-3(1-t_*)^2 + t_*^2 &= 6(1-t_*)t_* \\
-3 - 3t_*^2 + 6t_* + t_*^2 &= 6t_* - 6t_*^2 \\
4t_*^2 &= 3
\end{aligned}$$

Taylor croise la trajectoire de d'Antoine en $t_* = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *en* $x_* = y_* = \dfrac{9}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Et donc, il suffit d'écrire :
$$\boxed{\begin{aligned} t_* &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_* = y_* &= \frac{9}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}}$$

6. Pour quelle valeur du paramètre α, observera-t-on une collision entre les deux voitures ?

   Antoine doit être à ce point de croisement au même instant que Taylor.
   Il faut donc exiger que $x_a(t_*) = x_*$.

$$
\begin{array}{rcl}
3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 6\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\frac{3}{4}\alpha\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & = & \frac{9}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
& \downarrow & \\
3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9\alpha}{4} & = & \frac{9}{2} \\
3 + \frac{9}{4} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{9}{2} + \frac{9\alpha}{4} & = & \frac{9}{2} \\
9\alpha & = & 18 + 18 - 9 - 12 \\
9\alpha & = & 15
\end{array}
$$

On conclut donc : $\boxed{\alpha \quad = \quad \frac{5}{3}}$

La pondération des six sous-questions est approximativement identique : 4-3-3-3-3-4. Un beau dessin à la première question rapportait ainsi autant que l'obtention de α qui est un tout petit peu calculatoire, j'en conviens !

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très proche d'une question des annales (si, si, si :-), même en essayant d'être gentil, même en faisant appel au génie de Taylor, même en n'introduisant aucune monstruosité horriblement calculatoire, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)

Ah oui : faire toutes les interrogations du drive : c'est une bonne idée, mais l'enseignant sait parfaitement bien que vous allez faire cela : c'est pourquoi, il a été chercher ailleurs.
Au jeu du plus crétin, c'est toujours moi qui gagne à la fin, comme l'Allemagne en coupe d'Europe.
Question bonus : c'est qui Antoine ?

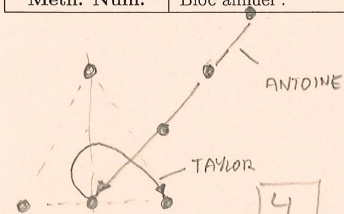
Quelques remarques générales du correcteur

- Commencer à lire toute la question ouverte et essayer de visualiser, d'imaginer le problème : il faut faire le dessin ! La difficulté majeure de la plupart de mes questions est toujours de visualiser physiquement ou géométriquement la question...
- Vous pouvez écrire au crayon, mais apporter alors un taille-crayon et veillez que votre crayon soit bien taillé !
- Pensez à encadrer les expressions symboliques utilisées pour obtenir vos résultats.
- L'algèbre semble compliquée mais n'est pas difficile !
- L'unique difficulté est la dernière sous-question : mais tout le reste était facile :-)
- Soyez soigneux dans vos dessins !
  Entrainez vous à rédiger proprement la réponse d'un examen précédent sur un simple recto :-)
- Pour vous aider, je vous inclus aussi la copie de l'enseignant qui permettait d'obtenir le maximum de points (avec une pondération approximative des sous-questions).

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom et votre numéro magique !

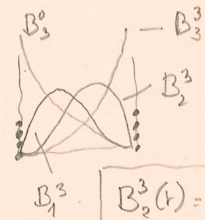
LEPL1104	Nom :	**Numéro magique (= 1 pt)**
S7 : Mars 2024	Prénom :	
Méth. Num.	Bloc annuel :	

$\boxed{1}$



$\boxed{4}$

$\boxed{2}$



$\boxed{3}$

$$\boxed{\begin{aligned} B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned}}$$

$\boxed{3}$

$$x_1(t) = x_A(t) = 3(1-t)^3 + 6(1-t)^2 t + 3\alpha t^2(1-t)$$

$$x_S(t) = -3(1-t)^2 t + t^3$$

$$y_S(t) = 6(1-t)t^2$$

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_A(1/2) &= \left[\frac{9+3\alpha}{8}, \frac{9+3\alpha}{8}\right] \\ x_S(1/2) &= \left[-\frac{2}{8}, \frac{6}{8}\right] \end{aligned}}$$

$\boxed{3}$

$\boxed{5}$

$$-3(1-t)^2 t + t^3 = 6(1-t)t^2$$

$$-3(1-2t+t^2) + t^2 = 6(t-t^2)$$

$$-3 + 6t + 2t^2 = +6t - 6t^2$$

$$4t^2 = 3$$

$\boxed{3}$

$$\boxed{t^* = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x^* = y^* = 6\,\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\boxed{6}$

$$3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 6\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3\alpha\,\frac{3}{4}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$3\left(1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right) + 3\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \frac{9\alpha}{4} = \frac{9}{2}$$

$$3 + \frac{9}{4} \cancel{-3\sqrt{3}} + \cancel{3\sqrt{3}} - \frac{9}{2} + \frac{9\alpha}{4} = \frac{9}{2}$$

$$9\alpha = 18 + 18 - 9 - 12$$

$$9\alpha = 15$$

$\boxed{4}$

$$\boxed{\alpha = 5/3}$$