FSAB11BA	
Mars 2025	*Méthodes numériques*
LEPL1104	**Solution**

Deux vilains complices : Donald et Vladimir...
Lequel est le plus vilain ?

	X_i	w_i
0	-1	$1-\alpha$
1	$-1/\sqrt{5}$	α
2	$1/\sqrt{5}$	α
3	1	$1-\alpha$

Pour estimer l'intégrale de la fonction $u(x) = e^x$ sur $[-1, 1]$, Donald et Vladimir ont écrit une quadrature définie par :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\ dx \ \approx\ \sum_{i=0}^{3} w_i\ u(X_i)$$

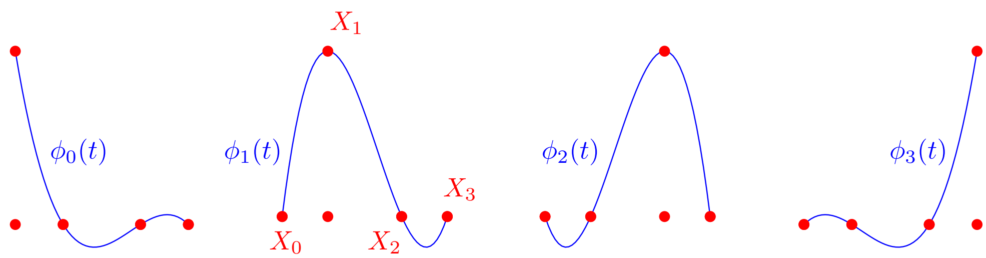
où α est un nombre magique que Vladimir refuse de fournir.
Donald a péniblement commencé à écrire une fonction `python` :

```
def compositeTrumpPoutine(u,n):
  h = 1.0/n
  I = 0.0
  ...
  X = ...
  W = ...
  for i in range(n):
     X = X + 2*h
     I = I + np.sum(u(X) @ W)
  return I
```

qui divise l'intervalle $[-1, 1]$ en `n` sous-intervalles égaux de longueur $2h = 2/n$ et applique cette quadrature dans chaque sous-intervalle afin d'obtenir une estimation de l'intégrale de la fonction `u` sur $[-1, 1]$. Donald doit faire appel à vous pour la terminer, car il n'y a plus de chercheurs dans son beau pays !

1. Esquisser les quatre polynômes $\phi_i(x)$ de Lagrange associés aux abscisses d'intégration X_i.

   Il suffit de tracer les quatre polynômes en procédant comme suit : chaque polynôme de Lagrange vaut l'unité pour l'abscisse correspondante et s'annule aux trois autres abscisses d'intégration :-) C'est tout simplement reproduire la Figure 1.3 du syllabus : difficile de faire plus simple !



   Et pourtant, énormément d'étudiants n'arrivent pas à faire ce dessin !
   Il est admis d'utiliser des couleurs et de superposer les quatre fonctions sur un même dessin.

2. En intégrant ϕ_2, obtenir la valeur de α que Vladimir pense introuvable.

   On obtient aisément l'expression de $\phi_2(x)$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \phi_2(x) & = & \dfrac{(x+1)(x-1)(x+\frac{1}{\sqrt{5}})}{(\frac{1}{\sqrt{5}}+1)(\frac{1}{\sqrt{5}}-1)(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}})} \\ & \Big\downarrow & \textit{En développant tous les termes...} \\ & = & \dfrac{-5\sqrt{5}}{8}\Big(x^2-1\Big)\Big(x+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big) \end{array}}$$

   Pour obtenir le poids $w_2 = \alpha$ associé à X_2, il suffit d'intégrer ce polynôme de Lagrange $\phi_2(x)$ qu'on vient de calculer.

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} \phi_2(x)\ dx \\ & \Big\downarrow & \\ & = & \displaystyle\frac{-5\sqrt{5}}{8}\int_{-1}^{1}\Big(x^2-1\Big)\Big(x+\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{-5\sqrt{5}}{8}\ \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{5}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\ dx}_{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}} \end{array}$$

   On conclut en donnant l'expression demandée : $\boxed{\alpha \;=\; \dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{3} \;=\; \dfrac{5}{6}}$

3. Démontrer que la quadrature de Trump-Poutine intègre parfaitement tout polynôme degré 4.

   Cette quadrature symétrique intègre parfaitement tous les monômes impairs....
   Il reste donc de calculer les monômes pairs x^2, x^4 et x^6.

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \qquad \sum_{i=0}^{3} w_i \, X_i^2 = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \qquad \sum_{i=0}^{3} w_i \, X_i^4 = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} \times \frac{1}{25} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^6 \, dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{7} \qquad \sum_{i=0}^{3} w_i \, X_i^6 = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} \times \frac{1}{125} = \frac{130}{375} = \frac{26}{75}$$

   On constate ainsi que la quadrature intègre parfaitement tous les polynômes jusqu'au degré cinq :-)
   Et donc, évidemment on intègre parfaitement tous les polynômes de degré quatre !

4. Fournir une version complète de la fonction `compositeTrumpPoutine(u,n)` !

   Le jacobien de la transformation est le rapport des longueurs. Il faut ensuite veiller à placer le premier sous-intervalle au bon endroit avant d'entamer la boucle sur les sous-intervalles.
   Il suffit donc de compléter le programme comme suit :

```
def compositeTrumpPoutine(u,n):
  h = 1.0/n
  I = 0.0
  X = np.array([ -1,-1/sqrt(5),1/sqrt(5),1 ]) *  h - (1 + h)
  W = np.array([ 1/6,5/6,5/6,1/6 ]) * h
  for i in range(n):
    X = X + 2*h
    I = I + np.sum(u(X) @ W);
  return I
```

   L'unique challenge est d'écrire `* h` *et* `* h - (1+h)` *qui tiennent compte du changement de variable de l'intervalle $[-1, 1]$ vers le premier sous-intervalle de la méthode composite.*
   Ne pas écrire correctement ces termes fait perdre tous les points pour le programme !

   Pas mal d'étudiants font ici preuve d'une imagination débordante
   et démontrent ainsi qu'il n'ont strictement rien compris au programme.

   Il est aussi possible d'avoir un programme un fifrelin plus efficace en ne recalculant pas deux fois la fonction aux extrémités intérieures de chaque sous-intervalle.
   Un petit bonus était prévu pour ceux qui ont été créatifs à ce sujet, mais ce n'était pas demandé.
   Ne pas oubliez qu'écrire un programme compliqué pour Donald, c'est pas indiqué aussi :-)

5. Quel est le degré de précision de la quadrature composite de Trump-Poutine ?

   Comme la méthode est symétrique, on a gagné le degré bonus.
   La méthode intégre aussi parfaitement un polynôme de degré cinq.
   Par contre, ce n'est plus le cas pour un polynôme de degré six !

Le degré de précision de la méthode de Trump-Poutine est cinq

6. Quel est l'ordre de précision de la quadrature composite de Trump-Poutine ?
   Calculer une jolie expression de la borne de l'erreur.

   L'erreur locale de la méthode sera en $\mathcal{O}(h^7)$ sur chaque intervalle et donc l'erreur globale de la méthode composite sera en $\mathcal{O}(h^6)$!

$$\boxed{\textit{L'ordre de précision de la méthode composite de Trump-Poutine est } \mathcal{O}(h^6)}$$

Il reste à obtenir une jolie expression de la borne de l'erreur.
Une option est d'utiliser l'éternel développement de Taylor sur chaque intervalle.

$$u(x) \quad = \quad U_0 + xU_0' + \frac{x^2}{2}U_0'' + \frac{x^3}{6}U_0^{(3)} + \frac{x^4}{24}U_0^{(4)} + \frac{x^5}{120}U_0^{(5)} + \frac{x^6}{720}U_0^{(6)} + \ldots$$

On compare l'intégrale exacte du développement en série avec l'application de la quadrature.
Le premier terme différent est celui en $U_0^{(6)}$ puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré six.

$$E^h \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \left| \left[2hU_0 + ... + 2\frac{U_0^{(6)}}{7\times 6!}h^7 ... \quad \right] - 2h\left[U_0 + ... + \frac{U_0^{(6)}}{6\times 6!}h^6 + \frac{5U_0^{(6)}}{6\times 6!}\left[\frac{h}{\sqrt{5}}\right]^6 ... \quad \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
\left|E^h\right| \quad &\leq \quad n\ \frac{U_0^{(6)}}{6!}\ h^7 \left| \frac{2}{7} - \frac{2}{6}\left[1 + \frac{1}{25}\right] \right| \\
&\leq \quad n\ \frac{U_0^{(6)}}{720}\ h^7 \left| \frac{2}{7} - \frac{26}{75} \right| \\
&\leq \quad n\ \frac{U_0^{(6)}}{720}\ h^7 \left| \frac{150-182}{525} \right| \\
&\leq \quad n\ \frac{U_0^{(6)}}{720}\ h^7 \frac{32}{525}
\end{aligned}$$

Car $nh = 1$ pour la méthode composite

$$\leq \quad \frac{2}{45\times 525}\ U_0^{(6)}\ h^6 \quad = \quad \frac{2}{23625}\ U_0^{(6)}\ h^6$$

On peut conclure : $\boxed{\left|E^h\right| \leq \frac{2}{23625}\ C_6\ h^6}$

7. Donner a et b afin que la combinaison $I_{extr} = aI_{2n} + bI_n$ fournisse la meilleure estimation possible à partir de résultats obtenus avec $2n$ et n intervalles respectivement.

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6*, on écrit :* $\boxed{I_{extr} \quad = \quad \frac{\left(64 I_{2n} - I_n\right)}{63}}$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$*,*

car il n'y a pas de termes impairs
en raison du caractère symétrique de la formule de Trump-Poutine
qui est -en réalité- une quadrature de Gauss-Lobatto.

Notez au passage que calculer la primitive de e^x est immédiat :-)
Ce qui prouve bien la bêtise de nos deux compères...

La pondération des six sous-questions est approximativement identique : 3-3-3-3-2-4-3.
Obtenir la fraction de la jolie expression de l'erreur est un peu calculatoire, mais pas impossible !

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très proche d'une question des annales (si, si, si :-), même en essayant d'être gentil, même en faisant appel au génie de Taylor, même en n'introduisant aucune monstruosité horriblement calculatoire, l'enseignant arrive, comme d'habitude, à vous surprendre :-)

Ah oui : faire toutes les interrogations du drive : pour une fois, ce n'était pas une mauvaise idée, parce que l'interrogation de 2025 était assez proche de celle de 2015 (mais en plus simple !)...
Eh oui, on devient laxiste avec les années, sans doute.

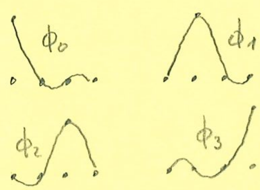
Quelques remarques générales du correcteur

- Commencer à lire toute la question ouverte et essayer de visualiser, d'imaginer le problème : il faut faire le dessin !
- Vous pouvez écrire au crayon, mais apportez alors un taille-crayon et veillez que votre crayon soit bien taillé !
- Pensez à encadrer les expressions symboliques utilisées pour obtenir vos résultats.
- L'algèbre semble compliquée mais n'est pas difficile !
- L'unique difficulté est la fraction de l'erreur : mais tout le reste était facile :-)
- Soyez soigneux dans vos dessins !
  Entrainez vous à rédiger proprement la réponse d'un examen précédent sur un simple recto :-)
- Pour vous aider, je vous inclus aussi la copie de l'enseignant qui permettait d'obtenir le maximum de points (avec une pondération approximative des sous-questions).
  Observer qu'il est techniquement possible d'obtenir 21/20 à l'interrogation !

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom et votre numéro magique !

LEPL1104	Nom :	Numéro magique (= 1 pt)
S7 : Mars 2025	Prénom : GAZOU	007
Méth. Num.	Noma :	

$\boxed{1}$



$\boxed{3}$

$\boxed{2}$ $\phi_2(x) = \frac{(x^2-1)(x+1/\sqrt5)}{(1/5-1)\,2(1/\sqrt5)} = -\frac{5\sqrt5}{8}(x^2-1)(x+1/\sqrt5)$

$$\alpha = -\frac{5\sqrt5}{8}\int_{-1}^{1} \underbrace{x^3 - x} + \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}}_{\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1} = -\frac43\frac{1}{\sqrt5}} = \frac58 \times \frac43 = \frac56$$

$\boxed{\alpha = 5/6}$ $\boxed{3}$

$\boxed{3}$

$\int_{-1}^{1} x^2 = \frac23$ $\quad I_h = \frac26 + \frac{10}{6}\frac15 = \frac23$ ✓

$\int_{-1}^{1} x^4 = \frac25$ $\quad I_h = \frac26 + \frac{10}{6}\frac{1}{25} = \frac26 \times \frac65 = \frac25$ ✓

MAIS $\int_{-1}^{1} x^6 = \frac27$ $\quad I_h = \frac26 + \frac{10}{6}\frac{1}{125} = \frac26 \times \frac{26}{25} = \frac{26}{75}$;-)

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$

X = array([-1 -1/√5 1/√5 1]) * h - (1-h)
W = array([1/6 5/6 5/6 1/6]) * h

JACOBIEN + TRANSLATION ;-)

$\boxed{3}$

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{DEGRE} = 5}$ $\boxed{2}$

$\boxed{6}$ $\boxed{\text{ORDRE} = 6}$ $\boxed{2}$

ERREUR LOCALE $= \frac{C_6}{6!} h^7 \left| \overbrace{\frac27 - \frac{26}{75}}^{32/525} \right|$

ERREUR GLOBALE $= \underbrace{n}_{=1/h} \frac{C_6}{6!} h^7 \frac{32}{525} = C_6 h^5 \frac{\overset{2\times16}{32}}{\underbrace{720}_{45\times16}\times525}$

$\boxed{7}$

$$\frac{2^6 I_{2n} - I_n}{(2^6-1)} = \boxed{\frac{64 I_{2n} - I_n}{63}}$$

$\boxed{3}$

$$\boxed{E^h = \frac{2}{\underbrace{23625}_{45\times525}} C_6 h^6}$$

$\boxed{2}$

= 26250
− 2625
= 23625 ;-)

OUI C'EST CALCULABLE !!