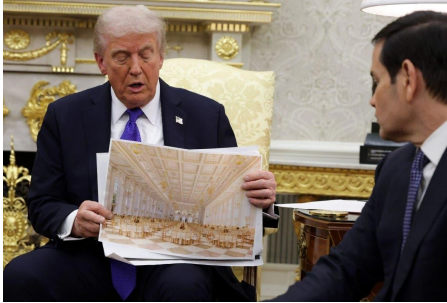


FSAB11BA	
Mars 2026	<i>Méthodes numériques</i>
LEPL1104	Solution

La nouvelle aile de la maison blanche.... Le plan de Donald a-t-il été dévoilé ?



L'architecte définit la hauteur du frontispice impérial par

$$u(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_i^2(t) W_i U_i}{\sum_{i=0}^2 B_i^2(t) W_i} = \frac{3\alpha(1 + 2t - 2t^2)}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(t - t^2)}$$

i	U_i	W_i
0	0	1
1	3	α
2	0	1

sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0, 1]$.

Les fonctions $B_i^2(t)$ sont les fonctions B-splines de degré deux.

Les noeuds sont $[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5] = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]$.

Bien observer la symétrie des points de contrôle et des poids !

Oui, la question ressemble étrangement à une ancienne question présente sur le fameux drive.

Oui, l'enseignant a donné un petit indice à la fin du cours de mercredi.

Oui, cela pouvait donner une idée que la question ferait intervenir des B-splines de degré deux.

Oui, un tuteur a organisé une petite séance un peu trop efficace.

Oui, certains étudiants ont donc eu un effet d'aubaine !

Oui, d'autres étudiants n'en ont pas profité.

Eh bien : c'est exactement cela le but de l'interrogation !

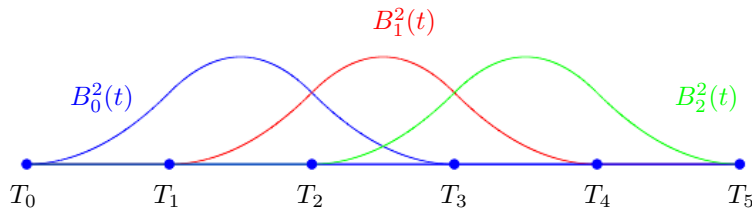
Il s'agissait de vous apprendre à survivre dans le monde impitoyable de l'Université.

Il faut se débrouiller, trouver l'information, s'informer et survivre.

Et il ne sert à rien de se plaindre ensuite d'un monde trop cruel : c'est celui qui vous attend :-)

Vous avez trop bien réussi votre interrogation : attention, recopier juste la valeur finale correcte n'a pas trompé le correcteur et ne l'a pas totalement convaincu : il en fallait plus et me démontrer que vous l'aviez aussi recalculé pendant l'interrogation. Vous avez échoué à l'interrogation : rien n'est perdu, vous réussirez l'examen et c'est cela l'important. L'échec est ce qui forge la persévérance, le courage et l'ingéniosité : in fine, vous allez mieux réussir que ceux qui pensent avoir une longueur d'avance !

1. Esquisser les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$ sur l'intervalle $t \in [T_0, T_5] = [-2, 3]$



Il ne faut pas un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions soient plus ou moins semblables et de classe C_1 (pas de point anguleux !). En outre, la fonction $B_0^2(t)$ est définie sur l'intervalle $[T_0, T_3]$ (ce qui n'est pas l'intervalle $[0, 3]$: idem pour les deux autres fonctions !)

Etonnement, pas mal d'étudiants échouent dans cette question vraiment très facile.

Et pourtant, il était permis d'avoir les dessins des fonctions B-splines sur votre formulaire !

2. Donner l'expression analytique¹ de ces trois fonctions sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0, 1]$.

Comme sur l'intervalle $[0, 1]$, seules $B_1^1(t)$ et $B_2^1(t)$ sont non-nulles, on doit juste évaluer :

$$\begin{aligned} 2B_0^2(t) &= (1-t)B_1^1(t) &= & (1-t)(1-t) = 1-2t+t^2 \\ 2B_1^2(t) &= (t+1)B_1^1(t) + (2-t)B_2^1(t) &= & (t+1)(1-t) + (2-t)t = 1+2t-2t^2 \\ 2B_2^2(t) &= & tB_2^1(t) &= t^2 = t^2 \end{aligned}$$

On conclut que :

$$B_0^2(t) = \frac{(1-t)^2}{2} \quad B_1^2(t) = \frac{1+2t-2t^2}{2} \quad B_2^2(t) = \frac{t^2}{2}$$

On peut vérifier le résultat en observant que la somme des trois fonctions vaut un.

On peut aussi noter qu'une bonne partie de la réponse se trouvait dans l'énoncé, puisque :

$$u(t) = \frac{3\alpha B_1^2(t)}{B_0^2(t) + \alpha B_1^2(t) + B_2^2(t)} = \frac{3\alpha(1+2t-2t^2)}{(\alpha+1) + 2(\alpha-1)(t-t^2)} = \frac{3\alpha(1+2t-2t^2)}{(1-t)^2 + \alpha(1+2t-2t^2) + t^2}$$

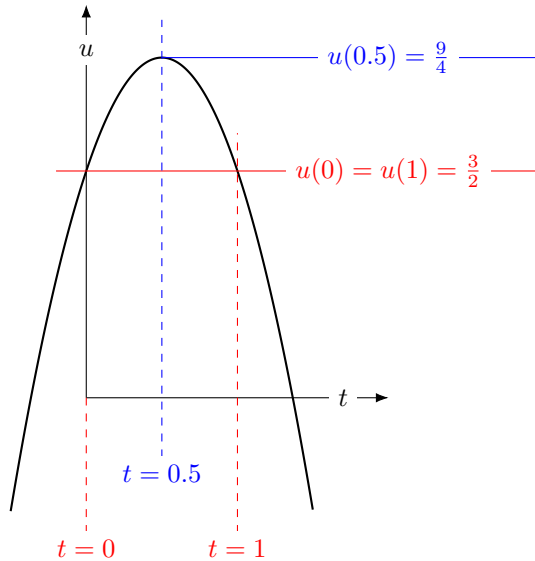
¹Une fonction B_i^p est nulle partout sauf dans l'intervalle $[T_i, T_{i+1+p}]$ où elle est définie récursivement par

$$B_i^p(t) = \frac{(t-T_i)}{(T_{i+p}-T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p}-t)}{(T_{i+1+p}-T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

3. Pour $\alpha = 1$, tracer approximativement $u(t)$ qui donne l'allure du frontispice de Donald.
 Bien observer la symétrie de la fonction qui reste valable pour les autres valeurs de α .
 Il suffit de tracer une parabole définie par l'expression :

$$u(t) = \frac{3(1 + 2t - 2t^2)}{2}$$

Le maximum de cette parabole est atteint en $t = 0.5$ car $2 - 4t = 0$.
 Et donc $u(0) = u(1) = 1.5$ et $u(0.5) = 9/4 = 2.25$.



Tracer cette parabole semble être une tâche insurmontable pour beaucoup d'étudiants : à méditer !

4. Calculer la valeur de α afin que la hauteur maximale du frontispice soit égale à $\frac{5}{2}$.
 Sur base de la symétrie des poids et points de contrôle et surtout de la sous-question précédente, il est évident que le maximum sera toujours atteint en $t = \frac{1}{2}$.
 On obtient donc immédiatement α en écrivant $u(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{3\alpha(1 + 1 - \frac{1}{2})}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} &= \frac{5}{2} \\ &\downarrow \\ \frac{9\alpha}{2} &= \frac{5\alpha}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5\alpha}{4} - \frac{5}{4} \\ \frac{3\alpha}{4} &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On conclut donc que : $\alpha = \frac{5}{3}$

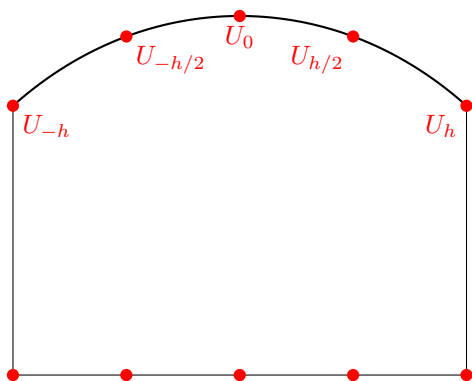
Ici, recopier trop servilement la solution de l'interrogation de 2010 permet d'identifier immédiatement le manque de recul de l'étudiant ! C'est bien d'avoir la solution sur son formulaire, mais il faut en tirer profit intelligemment :-)

5. Ensuite, on souhaite estimer l'intégrale

$$I = \int_0^1 u(t) dt$$

Obtenir I_{2h} avec la règle de Simpson² sur un unique intervalle $[0, 1]$.

Obtenir I_h avec la règle composite de Simpson en découpant $[0, 1]$ en deux sous-intervalles.



En définissant $h = \frac{1}{2}$, il faut calculer :

$$I_{2h} = \frac{U_{-h} + 4U_0 + U_h}{6},$$

$$I_h = \frac{U_{-h} + 4U_{-h/2} + 2U_0 + 4U_{h/2} + U_h}{12},$$

avec $U_{-h} = u(0)$, $U_0 = u(\frac{1}{2})$ et $U_h = u(1)$.

Il s'agit ensuite calculer les valeurs aux 5 points en tirant profit de la symétrie du toit :

$$U_{-h} = U_h = u(0) = \frac{3\alpha}{(\alpha+1)} = \frac{15}{8}$$

$$U_0 = u(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

$$U_{-h/2} = U_{h/2} = u(\frac{1}{4}) = \frac{3\alpha \frac{1}{8}}{(\alpha+1)+2(\alpha-1)\frac{3}{16}} = \frac{33\alpha}{(11\alpha+5)} = \frac{33}{14}$$

En appliquant ensuite les règles de quadrature :

I_{2h}	$=$	$\frac{55}{24}$
I_h	$=$	$\frac{773}{336}$

Cette toute dernière étape était très calculatoire. Il ne fallait l'entamer que si vous n'avez plus rien d'autre à faire d'utile... Normalement, obtenir la dernière fraction I_h est virtuellement impossible, sauf si vous l'aviez noté esur votre formulaire. En 2010, personne ne l'avait obtenue.

Imaginer qu'en 2026, un étudiant puisse l'obtenir était donc assez peu probable, et pourtant :-)

En notant uniquement ce résultat final, vous indiquez juste que vous êtes futés car vous avez eu la bonne idée de recopier la solution de l'interrogation de 2010 : c'est bien, mais cela ne mérite pas une note exceptionnelle : nous sommes bien d'accord et donc, le résultat n'est acquis que si votre copie contient l'entiereté du développement. Sachant que ce calcul est un fifeilin complexe, le correcteur s'attend à ce que vous passiez un peu de temps à expliquer votre résultat final... Et donc, à me démontrer que vous avez fait le calcul sur votre copie !

²Les poids et points de la règle de Simpson sont $w_i = (1/3, 4/3, 1/3)$ et $X_i = (-1, 0, 1)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

6. Donner l'ordre de précision³ de la règle composite de Simpson.

Pour la quadrature composite de Simpson :

$$n = 4$$

On doit intégrer sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré quatre: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^5)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^4)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales !

7. Donner la combinaison de I_{2h} et I_h fournissant la meilleure extrapolation de Richardson de I .
Donner l'ordre de précision de cette combinaison I_* .

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 4 :

$$\frac{(16 I_h - I_{2h})}{15}$$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^6)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.

Il est important de noter l'ordre correct de l'interpolation de Richardson : quasiment tous les étudiants se trompent dans cette question ! Vraisemblablement, car cette partie cruciale de la réponse ne se trouvait pas dans le cadre de la solution de 2010. Comme quoi, même en ayant la solution sur votre formulaire, vous vous trompez ! Même, en vous donnant la solution avant l'interrogation, nombreux sont les étudiants qui échouent sur cette question.

La pondération (approximative) des sept sous-questions était respectivement (3, 3, 2, 3, 3, 3, 3). On constate que répondre simplement aux questions 1, 6 et 7 (ne nécessitant absolument aucun calcul !) permet d'obtenir 9/20. Ces trois questions étaient quasiment une simple restitution de la matière et la réponse pouvait normalement être immédiatement déduite de votre formulaire !

Conclusion : même en vous permettant de venir avec un formulaire, même en rédigeant une question très proche d'une question des annales (si, si, si :-), même en essayant d'être gentil, même en reproduisant exactement la même démarche que l'année passée, les étudiants restent parfois un peu désespérés.

Ah oui : faire toutes les interrogations du drive, c'était une bonne idée : et je vous l'avais bien écrit dans le correctif de 2025. Donc, il n'était pas indispensable d'aller à la séance de Tom pour le savoir : il faut juste lire l'information disponible sur le site web du cours.

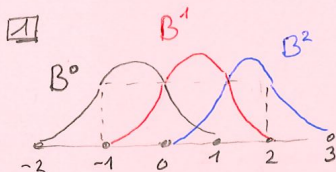
Quelques remarques générales du correcteur

- Commencer à lire toute la question ouverte et essayer de visualiser, d'imaginer le problème !
- Vous pouvez écrire au crayon, mais apportez alors un taille-crayon !
- Soyez soigneux dans vos dessins !
Entraînez vous à rédiger proprement la réponse d'un examen précédent sur un simple recto :-)
- Pour vous aider, je vous inclus aussi la copie de l'enseignant qui permettait d'obtenir le maximum de points (avec une pondération approximative des sous-questions).

³Oui, il s'agit de l'exposant n du terme d'erreur écrit sous la forme $\mathcal{O}(h^n)$.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom et votre numéro magique !

LEPL1104	Nom : GAZOU :-)	Numéro magique (= 1 pt)
S7 : Mars 2025	Prénom :	
Méth. Num.	Noma :	

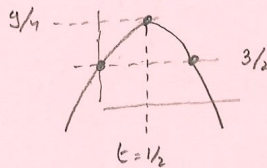


3

$$u(t) = \frac{3}{2}(1+2t-2t^2)$$

$$u'(t) = \frac{3}{2}(2-4t)$$

$t_{max} = 1/2$:-)



2

$$B_0^2(t) = (-1-t^2)/2$$

$$B_1^2(t) = (1+2t-2t^2)/2$$

$$B_2^2(t) = t^2/2$$

4

$$\frac{3\alpha(1+1-1/2)}{(\alpha+1) + 2(\alpha-1)(1/2-1/4)} = \frac{5}{2}$$

$u(1/2)$

5

$$I_{2h} = \frac{U_{-h} + 4U_0 + U_h}{6}$$

$2h = 1$
 $h = 0.5$

$$I_h = \frac{U_{-h} + 4U_{-h/2} + 2U_0 + 4U_{h/2} + U_h}{12}$$

$$\frac{9\alpha}{2} = \frac{5}{2} \left[\alpha + 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{3\alpha}{4} = \frac{5}{4}$$

$\alpha = 5/3$

$$U_{-h} = U_h = u(0) = \frac{3\alpha}{\alpha+1} = \frac{15}{8}$$

$$U_0 = u(1/2) = \frac{5}{2}$$

$$U_{-h/2} = U_{h/2} = u(1/4) = \frac{3\alpha \cdot 11/8}{(\alpha+1) + 2(\alpha-1)3/16} = \frac{33}{14}$$

$$u(t) = \frac{5(1-2t-2t^2)}{8/3 + 4/3(t-t^2)}$$

6

$$I_{2h} = \frac{1}{6} \left[\frac{15}{4} + \frac{20}{2} \right] = \frac{15+40}{24} = \frac{55}{24}$$

$$I_h = \frac{1}{12} \left[\frac{15}{4} + \frac{10}{2} + \frac{132}{7} \right] = \frac{105 + 140 + 132 \times 4}{48 \times 7} = \frac{245 + 528}{336} = \frac{773}{336}$$

6

$$\mathcal{O}(h^4)$$

7

$$\frac{16I_h - I_{2h}}{15} \mathcal{O}(h^6)$$

OUI
C'EST
SYMETRIQUE !!