EPL1104 : solution de l'examen de juin 2019

1 Bart exige d'avoir des B-splines !

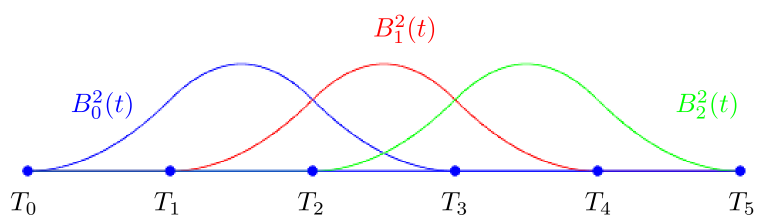
Soit les points $[T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5] = [-2, -1, 0, 1, 2, 3]$.
Un étudiant facétieux souhaite dessiner une nouvelle courbe :

$$u(t) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) W_i U_i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) W_i} = \frac{3\alpha(1 + 2t - 2t^2)}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(t - t^2)},$$

	U_i	W_i
0	0	1
1	3	α
2	0	1

sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0, 1]$.
Les fonctions $B_i^2(t)$ sont les fonctions B-splines de degré deux.
Le paramètre α est un réel positif à déterminer.

1. Esquisser les fonctions $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ et $B_2^2(t)$ sur l'intervalle $t \in [T_0, T_5] = [-2, 3]$



Il ne faut pas un dessin précis, mais il est requis que les 3 fonctions soient plus ou moins semblables et de classe C_1 (pas de point anguleux !). En outre, la fonction $B_0^2(t)$ est définie sur l'intervalle $[T_0, T_3]$ (ce qui n'est pas l'intervalle $[0, 3]$: idem pour les deux autres fonctions !)

Pas mal d'étudiants échouent dans cette question vraiment très facile.
Et pourtant, vous étiez si déçus de ne pas avoir de B-splines dans l'interrogation :-)
Et pourtant, il était permis d'avoir les dessins des fonctions B-splines sur votre formulaire !

2. Donner l'expression analytique de ces trois fonctions sur l'intervalle $t \in [T_2, T_3] = [0, 1]$.

Comme sur l'intervalle $[0, 1]$, seules $B_1^1(t)$ et $B_2^1(t)$ sont non-nulles, on doit juste évaluer :

$$\begin{array}{rclcrclcl}
2B_0^2(t) & = & (1-t)B_1^1(t) & & & = & (1-t)(1-t) & = & 1 - 2t + t^2 \\
2B_1^2(t) & = & (t+1)B_1^1(t) & + & (2-t)B_2^1(t) & = & (t+1)(1-t) + (2-t)t & = & 1 + 2t - 2t^2 \\
2B_2^2(t) & = & & & tB_2^1(t) & = & t^2 & = & t^2
\end{array}$$

On conclut que :

$$\boxed{B_0^2(t) = \frac{1 - 2t + t^2}{2} \qquad B_1^2(t) = \frac{1 + 2t - 2t^2}{2} \qquad B_2^2(t) = \frac{t^2}{2}}$$

On peut vérifier le résultat en observant que la somme des trois fonctions vaut un.
On peut aussi noter qu'une bonne partie de la réponse se trouvait dans l'énoncé, puisque :

$$u(t) = \frac{3\alpha B_1^2(t)}{B_0^2(t) + \alpha B_1^2(t) + B_2^2(t)} = \frac{3\alpha(1 + 2t - 2t^2)}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(t - t^2)},$$

3. Calculer la valeur de α afin que la valeur maximale de la courbe soit égale à $\frac{5}{2}$.

   On doit rechercher t_* et α tels que :

$$\begin{cases} u(t_*) & = & \frac{5}{2}, \\ u'(t_*) & = & 0. \end{cases}$$

Sur base de la symétrie des poids et points de contrôle, on peut immédiatement observer que le maximum sera toujours atteint en $t_* = \frac{1}{2}$. Ensuite, on calcule α en écrivant $u(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{3\alpha(1 + 1 - \frac{1}{2})}{(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})} &= \frac{5}{2} \\ &\downarrow \\ \frac{9\alpha}{2} &= \frac{5\alpha}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5\alpha}{4} - \frac{5}{4} \\ \frac{3\alpha}{4} &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On conclut donc que : $\boxed{\alpha \;=\; \frac{5}{3}}$

Sans intuition géométrique, il fallait obtenir la valeur de t^* annulant la dérivée première :

$$0 \;=\; u'(t^*) \;=\; \frac{3\alpha(2 - 4t)\big[(\alpha + 1) + 2(\alpha - 1)(t - t^2)\big] - 3\alpha(1 + 2t - 2t^2)2\alpha(1 - 2t)}{9\alpha^2(1 + 2t - 2t^2)^2}$$

$\downarrow$ *En observant que $(1 - 2t_* + 2t_*^2) > 0$,*

$$\begin{aligned} 0 &= 6\alpha(1 - 2t)\big[\alpha(1 + 2t - 2t^2) + (1 - 2t + 2t^2)\big] - 6\alpha^2(1 + 2t - 2t^2)(1 - 2t) \\ 0 &= (1 - 2t_*)(1 - 2t_* + 2t_*^2) \end{aligned}$$

$\downarrow$ *En observant à nouveau que $(1 - 2t_* + 2t_*^2) > 0$,*

$$t_* = \tfrac{1}{2}$$

Une autre manière astucieuse d'obtenir que $t_* = \frac{1}{2}$ consistait à observer que :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{3\alpha B_1^2(t)}{B_0^2(t) + \alpha B_1^2(t) + B_2^2(t)} \\ &= \frac{3\alpha B_1^2(t)}{B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) + (\alpha - 1)B_1^2(t)} \\ &= \frac{3\alpha B_1^2(t)}{1 + (\alpha - 1)B_1^2(t)} \\ &= \frac{3\alpha}{1/B_1^2(t) + (\alpha - 1)} \end{aligned}$$

On observe alors immédiatement que le maximum de $u(t)$ est obtenu lorsque la fonction $B_1^2(t)$ atteint son maximum en $t_* = \frac{1}{2}$.
En effet, le dénominateur de la grande (!) fraction devient alors minimal :-)
Bravo aux étudiants astucieux m'ont fait découvrir cette très jolie résolution :-)

Bon, je reconnais, c'est un tout petit peu calculatoire, mais pas totalement infaisable...
Toutefois, pas mal d'étudiants ont l'intuition géométrique et évitent le calcul de dérivée.
Obtenir la valeur numérique correcte pour α et t_* était requis pour valider la sous-question !
Non, non il ne faut pas juste se contenter d'expliquer comment il faut procéder !

2 Tom et Théo découvrent Newton-Raphson

A partir de n données (X_i, U_i), Tom et Théo souhaitent approximer $u(x)$ le transfert du Nord vers le Sud par une expression :

$$u^h(x) = \frac{1}{x+a}$$

en ajustant le paramètre réel a afin de minimiser la somme des carrés des n écarts $U_i - u^h(X_i)$.

	X_i	U_i
0	0	0.625
1	1	2.000

1. Ecrire l'équation que doit satisfaire a en termes des n données X_i et U_i.

   Il s'agit de minimiser la fonction suivante :

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n} \left(U_i - \frac{1}{(X_i + a)} \right)^2$$

   L'équation que doit satisfaire a s'écrit donc :

$$0 \;=\; f'(a) \;=\; \sum_{i=0}^{n} 2 \left(U_i - \frac{1}{(X_i + a)} \right) \frac{1}{(X_i + a)^2}$$

On conclut donc : $\boxed{\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{(X_i + a)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_i + a)^3}}$

Attention : fournir $f(a)$ à la place de $f'(a)$ est impardonnable !
Au passage, cette question est une variation simplifiée de l'exemple des notes de cours et d'un exercice des séances : ce n'était donc vraiment pas compliqué : si, si !

2. Utiliser la méthode de Newton-Raphson pour la résolution de cette équation à partir d'une estimation initiale a_0. Plus précisément, il faut fournir l'équation qui permet d'obtenir une nouvelle estimation a_{k+1}, à partir des n données X_i et U_i et d'une estimation précédente a_k.

   Le schéma de Newton-Raphson s'écrit :

   On calcule a_{k+1} à partir de a_k avec

$$\boxed{\begin{aligned} f''(a_k)\ \Delta a &= -f'(a_k) \\ a_{k+1} &= a_k + \Delta a \end{aligned}}$$

   avec les dérivées données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{(X_i+a)^2} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_i+a)^3} \\ f''(a) &= -4\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{(X_i+a)^3} + 6\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X_i+a)^4} \end{aligned}$$

   Il est évidemment possible de simplifier toutes ces expressions par un facteur 2.
   Par contre, on peut pas éliminer un facteur $(X_i - a)^2$ partout. Même si c'est une monstruosité que pas mal d'étudiants font ! En développant les expressions, on peut bien observer que c'est une horreur totale de faire cela !

   Ah oui : il ne faut évidemment pas appliquer Newton-Raphson pour x :-(
   Beaucoup de réponses très surréalistes mais pas toujours très créatives :-)

3. Obtenir[1] a en partant de $a_0 = 1$ pour les deux données du tableau.

   En remplacant $a = 1$ dans l'équation obtenue au second point, on constate que c'est une solution du problème !

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1} \frac{U_i}{(X_i+a)^2} &= \frac{5}{8} + \frac{2}{4} = \frac{5+4}{8} = \frac{9}{8} \\ \sum_{0=1}^{1} \frac{1}{(X_i+a)^3} &= 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

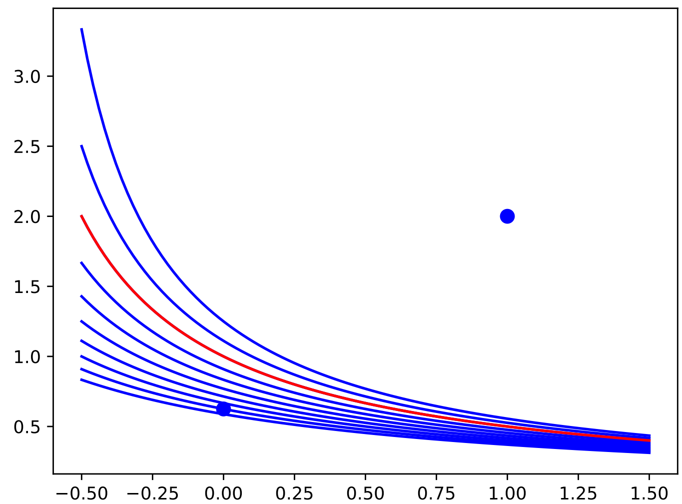
   Comme la dérivée seconde de f est non-nulle en ce point, le schéma de Newton-Raphson fournira directement comme résultat final $a_1 = a_0 = 1$ avec un diagnostic de convergence.

   On conclut tout simplement : $\boxed{a = 1}$

   L'énoncé de la question était un indice dont on pouvait ici tirer profit !
   Imaginer que cet enseignant sadique vous fasse calculer des tas d'itérations et tout cela sans calculatrice : ce serait vraiment inacceptable pour Tom et Théo !

[1] Réaliser un dessin schématique du problème (en y incluant les données) peut être une bonne idée :-)

Représenter intuitivement les données peut permettre d'imaginer aisément une valeur probable de a et de mieux cerner le problème ! Il faut toutefois faire cela avec un minimum de prudence.
Si on trace une série d'approximations possibles avec $a = 0.8$ jusqu'à $a = 1.7$ avec un incrément de 0.1, on observe qu'imposer le passage par le second point est nettement plus délicat que par le premier point.



Croire que la solution serait une courbe dont l'erreur en $x = 0$ et $x = 1$ est identique, n'est pas du tout correct ! Il faut donc parfois se méfier de certaines intuitions qui semblent trop évidentes !

3 Maggie et les différences finies compactes

Maggie a découvert le concept de différences finies compactes :

$$\boxed{\alpha U'_{i-1} + U'_i + \alpha U'_{i+1} \quad = \quad \beta \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \gamma \frac{U_{i+2} - U_{i-2}}{4h} + \mathcal{O}(h^p)}$$

Cela lui permet d'obtenir une estimation très précise des valeurs $U'_i \approx u'(X_i)$ de la dérivée d'une fonction périodique à partir de ordonnées $U_i = u(X_i)$ aux abscisses $X_i = ih$ avec $i = 0 \ldots n$.

La périodicité implique évidemment $U_0 = U_n$ et $U'_0 = U'_n$.

Malencontreusement, Théo lui a chapardé les valeurs des 3 coefficients α, β et γ.

1. Quel est l'ordre de précision le plus élevé[2] avec les α, β et γ les plus adéquats ?
   Justifier brièvement.

   Comme la formule est parfaitement symétrique, il n'y aura que des termes d'erreurs pairs.
   En choisissant de manière astucieuse α, β et γ, on éliminera les termes en $\mathcal{O}(h^0)$, $\mathcal{O}(h^2)$ et $\mathcal{O}(h^4)$.

   Donc, on peut espérer -sauf miracle numérique- que : $\boxed{p \quad = \quad 6}$

2. Quelles relations doivent satisfaire α, β et γ pour obtenir la méthode la plus précise ?
   En ne gardant que les termes utiles, on écrit les développements en série de Taylor :

$$\begin{array}{rcl} U_{i\pm1} & = & U_i \;\pm\; hU_i' \;+\; \ldots \;\pm\; \dfrac{h^3}{6}U_i^{(3)} \;+\; \ldots \;\pm\; \dfrac{h^5}{120}U_i^{(5)} \;+\; \ldots \;\pm\; \mathcal{O}(h^7) \\[2ex] U_{i\pm2} & = & U_i \;\pm\; 2hU_i' \;+\; \ldots \;\pm\; \dfrac{8h^3}{6}U_i^{(3)} \;+\; \ldots \;\pm\; \dfrac{32h^5}{120}U_i^{(5)} \;+\; \ldots \;\pm\; \mathcal{O}(h^7) \\[2ex] U_{i\pm1}' & = & U_i' \;\pm\; \ldots \;+\; \dfrac{h^2}{2}U_i^{(3)} \;\pm \ldots \;+\; \dfrac{h^4}{24}U_i^{(5)} \;\pm\; \ldots \;+\; \mathcal{O}(h^6) \end{array}$$

   Ensuite, on substitue ces développements dans la formule de Christian :

$$\begin{array}{rcl} (1+2\alpha)U_i' + 2\alpha\dfrac{h^2}{2}U_i^{(3)} + 2\alpha\dfrac{h^4}{24}U_i^{(5)} & = & \dfrac{2\beta}{2h}\left(hU_i' + \dfrac{h^3}{6}U_i^{(3)} + \dfrac{h^5}{120}U_i^{(5)}\right) + \\[2ex] & & + \dfrac{2\gamma}{4h}\left(2hU_i' + \dfrac{8h^3}{6}U_i^{(3)} + \dfrac{32h^5}{120}U_i^{(5)}\right) \;+\; \mathcal{O}(h^6) \end{array}$$

   En identifiant les termes en U_i', $U_i^{(3)}$ et $U_i^{(5)}$, on obtient finalement :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} 2\alpha+1 & = & \beta+\gamma \\ 6\alpha & = & \beta+4\gamma \\ 10\alpha & = & \beta+16\gamma \end{array}}$$

   On obtient bien la précision pressentie, car le terme d'ordre six ne s'annule pas :-)

3. Calculer les valeurs optimales de β, γ sachant que $\alpha = \frac{1}{3}$.
   Il faut juste résoudre le système des 3 équations...

   La solution unique est : $\boxed{\alpha \;=\; \dfrac{1}{3}, \quad \beta \;=\; \dfrac{14}{9}, \quad \gamma \;=\; \dfrac{1}{9}}$

   Comme α était fourni dans l'énoncé, on pouvait obtenir β et γ à partir de deux équations.
   Inclure les trois valeurs dans la troisième équation permettait de vérifier si aucune erreur malencontreuse d'algèbre ne s'était pas glissée dans le calcul.

[2] Il s'agit de la valeur de l'exposant p dans le terme d'erreur $\mathcal{O}(h^p)$
Immédiatement, on peut observer que choisir $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = 1$ donne une différence finie centrée classique d'ordre deux.
Mais, cette réponse ne rendra heureux ni Maggie, ni Théo, ni le correcteur...
C'est l'ordre le plus élevé possible qu'on souhaite avoir !

4. Ecrire une fonction `python`

`dU = compactDerivative(U,alpha,beta,gamma,h)`

qui calcule le vecteur U_i' à partir des données U_i.
Le résultat sera fourni dans un tableau `dU` dont la taille sera celle de `U`.
Les coefficients α, β et γ ainsi que h sont donnés en argument d'entrée[3].

Une implémentation possible est :

```
from numpy import *
from scipy.sparse import dok_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve

def compactDerivative(U,alpha,beta,gamma,h):

  n = len(U)
  A = dok_matrix((n,n),dtype=float32)
  B = zeros(n)
  for i in range(1,n-1) :
    A[i,[i-1,i,i+1]] = [alpha,1.0,alpha]
  A[0,[n-2,0,1]] = [alpha,1.0,alpha]
  A[n-1,[n-2,n-1,1]] = [alpha,1.0,alpha]

  U = array([U[n-3],U[n-2],*U,U[1],U[2]])
  B = (beta*(U[3:n+3]-U[1:n+1])/(2*h) +
       gamma*(U[4:n+4]-U[0:n])/(4*h))
  return spsolve(A.tocsr(),B)
```

Il faut résoudre un système linéaire creux pour obtenir la solution.
Ne pas l'observer fait perdre la totalité des points pour le programme.

Evidemment, il est essentiel d'utiliser une matrice creuse.
Quelques étudiants construisent deux autres matrices pour calculer le membre de droite : ce n'est pas formellement une erreur, mais c'est inutilement compliqué. Il n'était pas nécessaire d'avoir la syntaxe correcte pour les `import`*, ainsi que les fonctions de librairie* `sparse` *pour obtenir la totalité des points !*

Il faut évidemment inclure les conditions de périodicité pour la matrice et le membre de droite. Notons que la valeur U_{-1} qui précède U_0 n'est pas U_n, mais U_{n-1}. La plupart des étudiants n'observent pas cette toute petite astuce, mais le correcteur ne leur en a pas tenu rigueur. Les plus astucieux observeront que le vecteur `U` *doit avoir une taille minimale et être un vecteur colonne pour que le code fonctionne...*

Attention, la variable `n` *du code correspond à la taille du vecteur* `U` *et donc à la valeur $n+1$ de l'énoncé :-) Il serait d'ailleurs possible et plus judicieux de ne pas inclure U_n comme inconnue et d'éviter de dédoubler stupidement une équation :-) On aurait alors bien un vecteur de taille n, et il faudrait alors répéter le premier élément du vecteur obtenu pour construire le vecteur requis par l'énoncé : réaliser cette petite variante du programme est laissé à votre sagacité :-)*

[3] Il est donc possible d'avoir un programme correct, même si on n'a pas obtenu les bonnes valeurs de α, β et γ.
Les données fournies sont périodiques : il n'est pas nécessaire de le tester.
Le code doit être simple et efficace.
Il n'est pas nécessaire d'écrire de commentaires :-)