LEPL1104 : solution de l'examen de juin 2022

1 La fable de Mélenchon !

On définit une méthode itérative du point fixe par l'expression $x_{i+1} = \underbrace{\frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i}}_{g(x_i)}$ avec $x_0 > 0$.

1. Quelle condition suffisante pour $g'(x)$ permet d'assurer que la suite des itérations converge ?

   Pour que la suite des itérations converge, il suffit que la condition de Lipschitz soit satisfaite pour toutes les valeurs rencontrées x_i pendant le processus itératif :

$$\boxed{|g'(x_i)| < 1 \qquad \forall x_i}$$

2. En déduire l'intervalle $]0, \alpha[$ auquel doit appartenir x_0 pour que la méthode converge.

   Tout d'abord, on observe que $x_i > 0$ pour tout $i \geq 0$ si $x_0 > 0$!
   Ensuite, on développe la condition de Lispchitz pour x_0 et on écrit :

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right| < 1$$

$$\downarrow$$

$$-1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} < 1$$

   L'inégalité de droite sera toujours satisfaite pour $x_i > 0$.

   Par contre, l'inégalité de gauche implique que $\sqrt{\frac{2}{3}} = \beta < x$ puisque $x_0 > 0$!

   Cette observation devait interpeller les étudiants !
   Est-ce qu'on peut faire confiance à Mélenchon ?
   Est-ce que l'enseignant était complètement bourré pendant la rédaction de la consigne ?
   La réponse est plus subtile !

   - *Par le théorème du point fixe, on est certain que la suite converge si $x_0 \in]\beta, \infty[$!*
   - *Et que se passe-t-il lorsque $x_0 \in]0, \beta[$? Le calcul d'une simple itération x_1 quelle que soit la valeur de x_0 va nous propulser au delà de β et nous faire atterrir dans l'intervalle assuré de convergence... Eh oui, la condition de Lipschitz est une condition suffisante mais pas nécessaire pour avoir la convergence !*

   La réponse à la question est donc finalement : : $\boxed{\alpha = +\infty}$

   Oui, Mélenchon est un petit taquin, mais le correcteur honteusement gentil (même si il a été aussi un peu taquin dans la rédaction de la question) a été très très compréhensif sur les très très nombreux étudiants qui ont pris β pour α !

Donc, penser à vérifier la condition de Lipschitz et obtenir β : c'est bien !

Ensuite, remarquer que l'inégalité impliquait que $x_0 \in]\beta, \infty[$: c'est encore mieux, mais c'est croire que l'enseignant était bourré : étudiant de peu de foi :-(
Mais, on te pardonnera toutefois car c'est pas trop mal vu quand-même.

Et si tu as remarqué que $x_0 \in]0, \infty[$: c'est vraiment super bien.
Au passage, faire un petit dessin et calculer quelques itérations permettait de le voir immédiatement.
Eh oui, la question était très simple en fait !

3. Vers quelle valeur x va converger cette méthode avec $x_0 \in]0, \alpha[$?

   C'est vraiment une question élémentaire :-)
   Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}}_{g(x)} \\ &\downarrow \\ x^2 &= \frac{x^2}{2} + 1 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

On conclut que : $\boxed{x = \sqrt{2}}$

Cette suite est connue comme la méthode de Héron d'Alexandrie pour approcher $\sqrt{2}$.

4. Quel sera le taux de convergence ?
   Justifier votre réponse !

   Il existe de très nombreuses manières (et parfois bien compliquées) de répondre à cette question ! La manière la plus simple de procéder est d'observer la méthode de Héron revient tout simplement à appliquer la méthode de Newton-Raphson à l'équation $f(x) = x^2 - 2$.

   En effet, on écrit le schéma de Newton-Raphson en effectuant les itérations comme suit :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &\downarrow \\ x_{i+1} - x_i &= -\frac{x_i^2 - 2}{2x_i} \\ x_{i+1} - x_i &= -\frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} \\ x_{i+1} &= \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

et on retrouve bien notre méthode de Héron.

On a donc un taux de convergence quadratique : $\boxed{r = 2}$

Les deux autres réponses les plus élégantes parmi celles des étudiants sont les suivantes :-)

- *Sachant que la méthode doit converge vers* $x = \sqrt{2}$, *on peut écrire aisément :*

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} - \sqrt{2} &= \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} - \sqrt{2} \\
x_{i+1} - \sqrt{2} &= \frac{x_i^2 - 2\sqrt{2}x_i + 2}{2x_i} \\
&\Big\downarrow \\
e_{i+1} &= \underbrace{\frac{1}{2x_i}}_{<1} \left(e_i\right)^2
\end{aligned}
$$

  On a bien démontré une convergence quadratique !

- *Ou pour les fans des développements de Taylor autour de* $x = \sqrt{2}$ *:*

$$
\begin{aligned}
g(x + e_i) &= g(x) + e_i \; g'(x) + \frac{e_i^2}{2} \; g''(x) + ... \\
g(x + x_i - x) &\approx \sqrt{2} + e_i \; \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)}_{=0} + \frac{e_i^2}{2} \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^3} \\
&\Big\downarrow \\
x_{i+1} &\approx \sqrt{2} + \frac{e_i^2}{\left(\sqrt{2}\right)^3} \\
\underbrace{x_{i+1} - \sqrt{2}}_{e_{i+1}} &\approx \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} \; e_i^2
\end{aligned}
$$

  Et on a aussi obtenu la convergence quadratique avec une constante qui prend la valeur requise lorsqu'on est proche du point fixe. Ce qui est bien en accord avec l'expression précédente au passage !

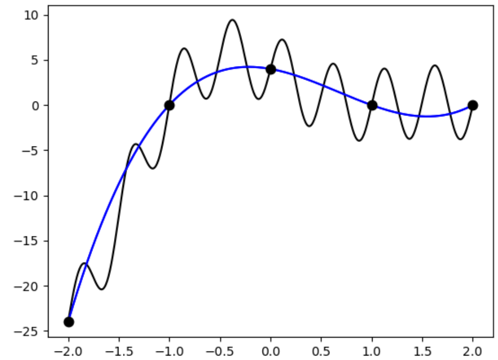
Conclusion : c'était pas trop compliqué in fine !

2 L'interpolation de Marine !

	X_i	U_i
0	-2	-24
1	-1	0
2	0	4
3	1	0
4	2	0

Il s'agit calculer l'interpolation polynomiale $u^h(x)$ d'une fonction $u(x)$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{4} U_i \phi_i(x)}_{u^h(x)} \;\approx\; \underbrace{-\frac{x^5}{8} + \frac{21x^3}{8} - 4x^2 - \frac{5x}{2} + 4 + 4\sin(4\pi x)}_{u(x)}$$



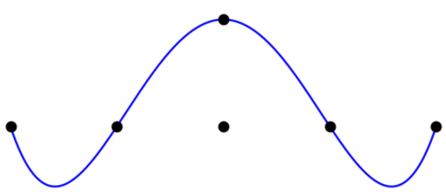
sur base d'un échantillon de cinq points (X_i, U_i) de la table.
Les fonctions $\phi_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange associés à X_i
L'interpolation u^h et la fonction u sont tracées sur la figure !

1. Donner l'expression du la fonction $\phi_2(x)$.
   Esquisser le graphe de ce polynôme.

   On obtient immédiatement l'expression demandée :

$$\phi_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{4}$$

   Et esquisser le graphe est aussi élémentaire !



   C'est vraiment une question hyper élémentaire et malgré cela, pas mal d'étudiants n'arrivent pas à grapiller les points associés à cette question ! Non : il n'est pas demandé de développer le polynôme terme à terme et c'est même une très mauvaise idée de le faire !

2. Calculer l'expression de $u^h(x)$.
   Quel est le degré du polynôme obtenu ?

   Le polynôme d'interpolation est donné par :

$$u^h(x) \;=\; U_0\phi_0(x) + U_2\phi_2(x) \;=\; -24\,\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{24} + 4\,\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{4}$$

$$u^h(x) \;=\; (-x + x + 2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$u^h(x) \;=\; 2(x+1)(x-1)(x-2)$$

   Et il s'agit d'un polynôme de degré trois (et non quatre :-)

3. L'erreur d'interpolation polynomiale est bornée par :

$$|\underbrace{u(x) - u^h(x)}_{e^h(x)}| \leq \underbrace{\frac{C_{n+1}}{(n+1)!}\ |(x-X_0)(x-X_1)(x-X_2)\cdots(x-X_n)|}_{f(x)}$$

Quelles valeurs numériques de n, de X_i et de C_{n+1} faut-il choisir pour notre problème ?

Par contre, il faut bien utiliser $n = 4$ dans le calcul de la borne de l'erreur, même si le polynôme d'interpolation est miraculeusement de degré trois ! Pour obtenir C_{n+1}, il faut donc calculer le maximum de la valeur absolue dérivée cinquième de $u(x)$.

$$(u^h)^{(5)} \quad = \quad -\frac{5!}{8} + 4^6\ \pi^5\ \ \cos(4\pi x)$$

$$\downarrow$$

$$C_5 \quad < \quad 15 + 4096\ \pi^5$$

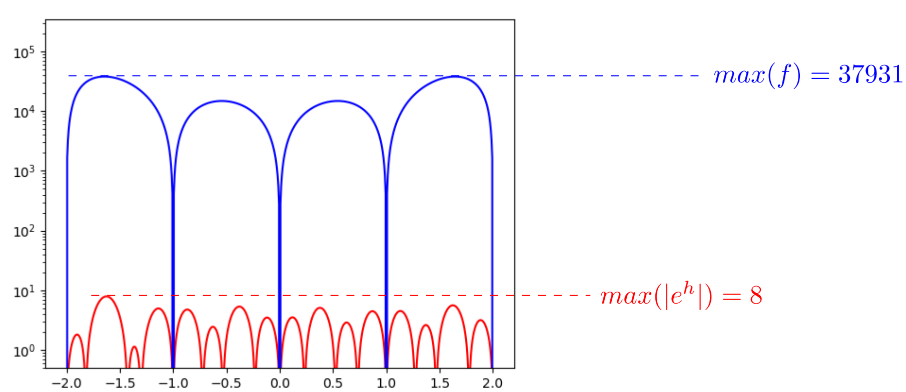
$$C_5 \quad < \quad 15 + 1253457$$

On conclut que : $\boxed{|e^h(x)| \quad \leq \quad 10445\ \Big|(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\Big|}$

On observe ici que la présence du sinus a un impact prépondérant sur cette constante : et plus on augmente la fréquence du sinus, plus cet impact est catastrophique !

4. Esquisser le graphe de $e^h(x)$ et de $f(x)$ pour $x \in [-2, 2]$.

Il faut juste esquisser le graphe en visualisant les zéros des deux fonctions !
Il était évidemment permis de tirer profit de la figure gentiment fournie dans l'"énoncé !
Il faut évidemment tracer les quatre bosses pour f.
Il faut aussi bien indiquer les trois zéros intérieurs dans chaque bosse pour e^h.
Tracer deux bosses extérieures plus grandes que les deux bosses centrales pour f permet d'avoir un dessin que l'on pouvait qualifier de parfait :-)



Mais, il faut surtout montrer la différence spectaculaire entre les deux maxima des deux fonctions. Pour que l'erreur e^h puisse apparaître sur ce graphe, notez qu'il a été nécessaire d'utiliser un échelle logarithmique pour les ordonnées dans `matplotlib` !

3 La quadrature de Macron !

Pour calculer l'intégrale de $u(x)$ sur $[0,1]$, Emmanuel dispose d'une quadrature de majorité absolue :

$$\int_0^h u(x)\ dx \ \approx\ h\Big(2\ U_{h/4} - U_0\Big)$$

Pour effectuer son intégrale, Emmanuel divise l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles de taille $h = 1/n$. Sur chaque sous-intervalle, il va utiliser cette subtile quadrature. En utilisant 5 et 10 sous-intervalles, Emmanuel a obtenu I_{2h} et I_h comme estimations de l'intégrale I de $u(x)$ sur $[0,1]$.

1. Ecrire une fonction `python` :

   `I = compositeMacron(u,n)`

   qui divise $[0,1]$ en n sous-intervalles égaux et qui utilise la quadrature de la majorité absolue à deux points dans chaque sous-intervalle pour calculer I_h.

```
from numpy import *

def compositeMacron(u,n):
  h = 1/n
  X = arange(0,n)*h
  return (sum(-u(X) + 2*u(X+h/4)))*h
```

   Il n'est pas indispensable d'avoir le code le plus efficace, mais il doit être correct : ce qui est important est la gestion de la translation des abscisses sur chaque intervalle de la méthode composite.

   En général, la plupart des étudiants écrivent des choses totalement fantaisistes à cet égard !

   Non : on n'utilise par $u(0)$ sur tous les sous-intervalles !
   Non : on obtient pas la valeur $u(h/4)$ sur l'intervalle en multipliant la coordonnée du début de l'intervalle par $h/4$ mais en additionnant $h/4$!

   Pas mal d'étudiants n'essaient même pas d'écrire ce code pourtant très très simple !
   Savoir écrire un tel petit code fait partie des compétences à acquérir et est indispensable pour la suite de vos études !
   Le code a été vectorisé en créant directement deux vecteurs avec toutes les abscisses, mais cela n'était pas vraiment indispensable :-) Un code plus long mais correct permettait d'avoir tous les points de la question.

   Le correcteur était très très compréhensif sur la syntaxe !

2. Calculer l'expression analytique d'une borne de l'erreur $|I - I_h|$
   de la méthode composite d'Emmanuel en fonction de h et d'une constante C à définir.

   Dans une première étape, on intégre le développement de Taylor $u(x)$ sur l'intervalle $[0,h]$.

$$\begin{aligned}\int_0^h u(x)dx &= \int_0^h U_0 + xU_0^{'} + \frac{x^2}{2}U_0^{''} \dots\ dx \\ &= h\ U_0 + \frac{h^2}{2}\ U_0^{'} + \frac{h^3}{6}\ U_0^{''} \dots\end{aligned}$$

   Ensuite, on fait un développement de Taylor pour exprimer $U_{h/4}$.
   Non, non, il n'était pas nécessaire d'aller au delà de l'ordre deux !

$$U_{h/4} \quad = \quad U_0 + \frac{h}{4}\, U_0^{'} + \frac{h^2}{32}\, U_0^{''} \dots$$

En appliquant la formule magique d'Emmanuel,

$$h\Big[2U_{h/4} - U_0\Big] \quad = \quad h\Big[\, 2U_0 + \frac{h}{2}\, U_0^{'} + \frac{h^2}{16}\, U_0^{''} \dots - U_0\Big]$$

$$= \quad h\, U_0 + \frac{h^2}{2}\, U_0^{'} + \frac{h^3}{16}\, U_0^{''} \dots$$

Pour obtenir l'erreur de la méthode composite d'Emmanuel, il faut alors additionner toutes les erreurs sur chaque sous-intervalle et écrire en définissant C_2 comme le maximum de la dérivée seconde de u sur l'intervalle $]0,1[$:

$$I - I_h \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} C_2 \Big[\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{16}\Big] \dots$$

$$I - I_h \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} C_2 h^3 \Big[\frac{8-3}{48}\Big] \dots$$

Car le nombre d'intervalles $n = 1/h$

$$I - I_h \quad < \quad \frac{5C_2h^2}{48}$$

On conclut finalement : $\boxed{I - I_h \quad = \quad \frac{5C_2h^2}{48}}$

La totalité de la difficulté de cette question consistait à faire minutieusement ce développement. Si cela était fait avec soin, tout le reste était obtenu de manière quasi immédiate.

3. Donner l'ordre de précision de la méthode composite d'Emmanuel.

On écrit simplement que l'ordre est deux : $\boxed{\mathcal{O}(h^2)}$

4. Calculer γ et δ afin que la combinaison linéaire $I_{extr} = \gamma I_{2h} + \delta I_h$ fournisse la meilleure estimation possible de l'intégrale exacte.
   Quelle sera l'ordre de précision de I_{extr} ?

Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 2, on écrit : $\boxed{I_{extr} \quad = \quad \frac{\Big(4I_h - I_{2h}\Big)}{3}}$

L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^3)$,
car il y a des termes impairs dûs au caractère non-symétrique
et totalement mal foutu de la formule d'Emmanuel.