LEPL1104 : solution de l'examen de juin 2023

1 La méthode de Francesco à deux pas !

Pour résoudre un problème de Cauchy pour $u'(x) = f(u, x)$, Francesco écrit la méthode suivante :

$$U_{n+1} = aU_n + bU_{n-1} + cF_n + dF_{n-1}$$

où $U_n \approx u(X_n)$ et $F_n = f(X_n, U_n)$ avec $X_n = X_0 + nh$.
Il y a 4 paramètres magiques a, b, c et d qu'il faut choisir judicieusement en fonction du pas h.

1. Quel est le meilleur ordre global de précision qu'on pourrait obtenir ?
   Justifier brièvement votre réponse !

   Comme il y a quatre paramètres, on devrait pouvoir éliminer les termes d'erreur en $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(h)$, $\mathcal{O}(h^2)$ et $\mathcal{O}(h^3)$. La méthode n'est pas symétrique et il est peu probable d'avoir des miracles, numériques, on peut donc déduire que l'erreur locale devrait être en $\mathcal{O}(h^4)$.

   On peut donc espérer un ordre global de précision de trois : $\boxed{E^h \quad = \quad \mathcal{O}(h^3)}$

   La question est très simple !
   Mais il faut être bien attentif à fournir l'ordre global de précision et pas l'ordre local !
   Préciser l'ordre local et global est sans doute une manière efficace d'éviter toute ambiguité !
   Eviter aussi de donner une réponse à choix multiples : cela énerve bêtement le correcteur !
   Quelques étudiants perdent ici bêtement un point facile à gagner pourtant !

2. Calculer les valeurs de a, b, c et d afin que la méthode soit la plus précise possible.

   Il suffit d'écrire des développements en série de Taylor
   pour les deux côtés de l'égalité de la méthode de Francesco :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n + hU'_n + \frac{h^2}{2}U''_n + \frac{h^3}{6}U'''_n + \ldots \\
U_{n+1} &= a\ U_n \\
&+ b\ \left[U_n - hU'_n + \frac{h^2}{2}U''_n - \frac{h^3}{6}U'''_n + \ldots\right] \\
&+ c\ U'_n \\
&+ d\ \left[U'_n - hU''_n + \frac{h^2}{2}U'''_n + \ldots\right]
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de U_n, U'_n, U''_n et U'''_n, on déduit :

$$\left\{\begin{aligned}
1 &= a + b \\
h &= -bh + c + d \\
\frac{h^2}{2} &= \frac{bh^2}{2} - dh \\
\frac{h^3}{6} &= -\frac{bh^3}{6} + \frac{dh^2}{2}
\end{aligned}\right.$$

Le système n'est pas bien compliqué à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b \\ 1 & = & -b+c/h+d/h \\ 1 & = & b-2d/h \\ 1 & = & -b+3d/h \end{array}\right.$$

En additionnant les deux dernières lignes, on obtient $d/h = 2$.
Il est ensuite aisé d'obtenir $b = 5$, puis $c/h = 4$ et $a = -4$.

Et on peut donc finalement conclure : $\boxed{U_{n+1} \;=\; -4U_n + 5U_{n-1} + h(4F_n + 2F_{n-1})}$

Cette question est une simple application d'une technique classique à appliquer avec rigueur !
Il faut juste être attentif dans les calculs :-)

2 Une quadrature composite pour Claude et Paul !

Il s'agit d'intégrer une fonction sur un intervalle $[-1, 1]$. La quadrature de Oestges-Fisette à quatre points consiste à remplacer l'intégration exacte I par une somme pondérée de la fonction en quatre points.

$$I \;=\; \int_{-1}^{1} u(x)\; dx \;\approx\; \alpha u(-1) + \beta u(-\zeta) + \beta u(\zeta) + \alpha u(1)$$

Deux des points sont les extrémités de l'intervalle : c'est ce qui caractérise Oestges-Fisette par rapport à Gauss-Legendre. Les coefficients α, β et ζ sont choisis afin que le degré de précision de la quadrature soit le plus élevé possible. La quadrature composite de Oestges-Fisette consiste ensuite à diviser l'intervalle $[-1, 1]$ en n sous-intervalles de longueur h. Sur chaque sous-intervalle, on utilise simplement la quadrature de Oestges-Fisette en y adaptant judicieusement les poids et points d'intégrations

1. Calculer[1] α, β et ζ afin de permettre l'intégration exacte de tous les polynômes jusqu'au degré 4.

   Il faut que l'intégration exacte d'un polynôme quelconque $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$
   ou l'application de la quadrature de Oestges-Fisette soient équivalents.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-1}^{1} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \; dx & = & \alpha\Big(a - b + c - d + e\Big) + \beta\Big(a - b\zeta + c\zeta^2 - d\zeta^3 + e\zeta^4\Big) \\ & & +\beta\Big(a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4\Big) + \alpha\Big(a + b + c + d + e\Big)\;, \\ 2a + \dfrac{2c}{3} + \dfrac{2e}{5} & = & 2a\Big(\alpha + \beta\Big) + 2c\Big(\alpha + \beta\zeta^2\Big) + 2e\Big(\alpha + \beta\zeta^4\Big) \\ & \Big\downarrow & \textit{En exigeant que cela soit vrai pour toutes valeurs de } a, c \textit{ et } e, \\ 1 & = & \alpha + \beta \\ 1 & = & 3\alpha + 3\beta\zeta^2 \\ 1 & = & 5\alpha + 5\beta\zeta^4 \end{array}$$

[1] Obtenir α, β et ζ peut paraître un peu calculatoire, si on omet d'observer que $(1 - \zeta^4) = (1 - \zeta^2)(1 + \zeta^2)$.

On a ainsi trois équations non-linéaires pour obtenir les trois coefficients. Ceci est exactement la démarche suivie pour obtenir la quadrature de Gauss-Legendre et devrait donc être obtenue par tous les étudiants ! Toutefois, un nombre non négligeable d'étudiants n'arrivent pas à intégrer le polynôme sur l'intervalle unité ou concluent que ce sont tous les termes de degré pair qui sont nuls...

En incluant $\alpha + \beta = 1$ dans les deux autres équations, on déduit que :

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& 3\beta(1-\zeta^2) \\ 4 &=& 5\beta(1-\zeta^4) \end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En observant que } (1-\zeta^4) = (1-\zeta^2)(1+\zeta^2),$$

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& 3\beta(1-\zeta^2) \\ 4 &=& 5\beta(1-\zeta^2)(1+\zeta^2) \end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En substituant ensuite la première équation dans la seconde :-),}$$

$$6 = 5(1+\zeta^2)$$

On conclut finalement que : $\boxed{\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \qquad \alpha = \dfrac{1}{6} \qquad \beta = \dfrac{5}{6}}$

Ici, il n'est pas inutile d'observer que Gauss-Lobatto intégre aussi parfaitement n'importe quel polynôme de degré cinq, puisque tous les termes impairs sont toujours parfaitement intégrés comme on vient de l'observer pour x et x^3 dans le calcul effectué ! Le degré de précision est donc cinq (et non quatre. Eh oui, la question suivante est facile, mais pas totalement stupide !).

2. Quel est l'ordre de précision de la quadrature composite de Claude et Paul ?

   Une quadrature numérique dont le terme d'erreur $I - I_h$ est $\mathcal{O}(h^m)$ est dite d'ordre m.

   Pour la quadrature composite de Claude et Paul : $\boxed{m = 6}$

   On doit intégrer sur chaque intervalle, une erreur $u - u^h$ qui est un polynôme de degré six: cela génère une erreur locale sur chaque intervalle en $\mathcal{O}(h^7)$ et une erreur globale $\mathcal{O}(h^6)$ en additionnant les $n = 2/h$ erreurs locales ! Globalement, on a toujours $m = d + 1$.

3. On a effectué le calcul de l'intégrale en utilisant $2n$ et n sous-intervalles et on a obtenu respectivement I_h et I_{2h}. Donner la combinaison linéaire de I_h et I_{2h} qui sera théoriquement la meilleure extrapolation de Richardson pour estimer I.

   Comme il s'agit d'éliminer un terme d'ordre 6 : $\boxed{\dfrac{\Big(64 I_h - I_{2h}\Big)}{63}}$

   L'erreur de cette extrapolation sera en $\mathcal{O}(h^8)$, puisqu'il n'y a pas de termes d'erreur de degré impair.

3 Une convergence un peu exceptionnelle !

Considérons la méthode de la sécante pour la recherche d'une racine x simple : nous avons donc $f'(x) \neq 0$.

$$\boxed{x_{i+1} \quad = \quad x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

L'erreur commise à chaque itération i est définie par $e_i = x_i - x$.

1. Ecrire une fonction `python` : `x = secante(x0,x1,tol,nmax,f)`
qui applique la méthode de la sécante pour trouver une racine d'une fonction `f`.
On exige une précision inférieure à une tolérance `tol` et un nombre maximal d'itérations `nmax`.
Deux premières valeurs sont données dans `x0` et `x1` pour démarrer les itérations.

   Une implémentation possible est :

```
def secante(x0,x1,tol,nmax,f):
  n = 0; delta = float("inf")
  f0 = f(x0)
  while abs(delta) > tol and n < nmax :
    n = n + 1
    f1 = f(x1)
    delta = -f1*(x1-x0)/(f1-f0)
    x0 = x1; f0 = f1
    x1 = x1 + delta
  return x1
```

   Une implémentation efficace ne nécessite qu'un unique calcul de la fonction f par itération. C'est cela qui définit le vrai coût de la méthode par itération. En conséquence, le correcteur a retiré un point par évaluation inutile de cette fonction. Et donc (sans doute à l'étonnement de beaucoup d'étudiants), cette question qui paraissait très simple a été très souvent désastreuse pour tous ceux qui se sont bêtement contentés de recopier la formule de manière servile.

   En d'autres mots, il ne sert à rien de venir voir sa copie pour constater le désastre, si vous avez obtenu un seul point malgré l'écriture d'un très long code agrémenté de multiples commentaires totalement inutiles !

2. Démontrer qu'il existe une constante D en termes de $f'(x)$ et $f''(x)$ telle que

$$e_{i+1} = D\ e_i e_{i-1}$$

lorsque la méthode de la sécante converge et que $i \to \infty$.

Si la méthode converge, la fonction f tend progressivement vers zéro, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \\
e_{i+1} &= e_i - \frac{f(x+e_i)(e_i - e_{i-1})}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})} \\
e_{i+1} &= \frac{e_i f(x+e_i) - e_i f(x+e_{i-1}) - e_i f(x+e_i) + e_{i-1} f(x+e_i)}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})} \\
e_{i+1} &= \frac{e_{i-1} f(x+e_i) - e_i f(x+e_{i-1})}{f(x+e_i) - f(x+e_{i-1})}
\end{aligned}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{En effectuant les développements en série de Taylor :}$$

$$\begin{aligned}
e_{i+1} &= \frac{e_{i-1}\left(e_i f'(x) + e_i^2 \frac{f''(x)}{2}\right) - e_i\left(e_{i-1} f'(x) + e_{i-1}^2 \frac{f''(x)}{2}\right))}{\Big(e_i - e_{i-1}\Big) f'(x)} \\
e_{i+1} &= \Big(e_{i-1} e_i\Big) \frac{\cancel{\Big(e_i - e_{i-1}\Big)} f''(x)}{\cancel{\Big(e_i - e_{i-1}\Big)} 2f'(x)}
\end{aligned}$$

On obtient alors finalement : $\boxed{D = \frac{f''(x)}{2f'(x)}}$

Obtenir le bon rapport n'est pas aisé, je le reconnais bien volontiers !

3. Finalement, en déduire[2] le taux de convergence α de la méthode de la sécante.

Lorsque $i \to \infty$, on peut écrire que :

$$e_{i+1} = D\ e_i e_{i-1}$$

$$\Big\downarrow \quad \textit{Asymptotiquement, on peut écrire } e_{i+1} = C\,(e_i)^\alpha$$

$$\begin{aligned}
C^\alpha\,(e_{i+1})^{\alpha\alpha} &= DC\,(e_{i-1})^\alpha\, e_{i-1} \\
C^\alpha\,(e_{i+1})^{\alpha^2} &= DC\,(e_{i-1})^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

Cette égalité ne peut être satisfaite que si $\alpha^2 = \alpha + 1$.
L'unique racine positive de cette équation du second degré est le nombre d'or.

Nous avons donc bien une convergence en or : $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618}$

[2]Attention, il faut justifier votre réponse : juste recopier la valeur donnée dans les notes de cours ne rapporte rien :-(

C'est un peu futé, mais parfaitement faisable et on utilise la même idée que celle adoptée pour l'analyse de stabilité de méthode à pas liés. Il existe d'autres manières de démontrer le même résultat en particulier en faisant appel à des logarithmes... C'est une question qui a été faite en séance tutorée et même si elle est compliquée, pas mal d'étudiants se souvenaient de la manière de l'aborder...