

LEPL1104 : solution de l'examen de juin 2025

1 L'équation miraculeuse et Léon

Avec la condition initiale $u(0) = 1$, le problème du miracle de Cauchy est défini comme suit :

$$u'(x) = -2x + e^{-x}$$

Léon souhaite appliquer la méthode d'Euler implicite pour obtenir les valeurs $U_i \approx u(X_i)$ avec $X_i = ih$.

1. Calculer la solution exacte de ce problème.

Il suffit juste de calculer une primitive élémentaire et de choisir la constante pour avoir $u(0) = 1$!

$$u(x) = 2 - x^2 - e^{-x}$$

*Un nombre incalculable d'étudiants échouent à cette question élémentaire !
D'autres utilisent une algèbre délirante pour arriver à ce résultat...
C'était pourtant d'une simplicité miraculeuse et un vrai cadeau du Pape :-)*

2. Comment obtient-on U_{i+1} avec la méthode d'Euler implicite ?

Il suffit juste d'écrire la relation de récurrence :

$$U_{i+1} = U_i + h \left[\exp(X_{i+1} - 2X_{i+1}) \right]$$

*Attention : il ne faut pas remplacer U_i par l'expression de la solution analytique !
Oui : il faut l'itération pour le problème posé.
Ou il faut que l'implémentation qui suit la contienne au moins :-)*

3. Ecrire une fonction python : `X,U = eulerImplicit(X0,U0,h,n)`

qui applique n itérations avec un pas h et une condition initiale $u(X_0) = U_0$.

La fonction retournera deux tableaux de taille $n + 1$ contenant respectivement X_i et U_i .

Une implémentation possible alliant simplicité et efficacité consiste à écrire.

```
def eulerImplicit(X0,U0,h,n) :  
    X = linspace(X0,X0+n*h,n+1)  
    U = zeros(n+1); U[0] = U0  
    for i in range(n) :  
        U[i+1] = U[i] + h*(exp(-X[i+1])-2*X[i+1])  
    return X,U
```

*Utiliser des listes n'est pas très efficace et la préallocation des deux tableaux est indispensable.
Il faut évidemment écrire la fonction pour le problème posé :-)
Cette question était vraiment élémentaire !*

4. Calculer l'expression de l'erreur commise après une itération pour ce problème.
Démontrer qu'on observe bien l'ordre théorique de cette erreur.

Il suffit d'abord d'écrire l'expression de l'erreur !

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1 + h(-2h + e^{-h}) \\
 u(X_1) &= 2 - h^2 - e^{-h} \\
 &\quad \downarrow \text{En écrivant l'expression de l'erreur } e_1 :-) \\
 \underbrace{U_1 - u(X_1)}_{e_1} &= 1 - 2h^2 + he^{-h} - 2 + h^2 + e^{-h} \\
 e_1 &= -1 - h^2 + (1 + h)e^{-h}
 \end{aligned}$$

La plupart des étudiants écrivent cette expression et se contentent de conclure immédiatement !

Mais, on ne peut pas conclure ici !

Soit, ils écrivent qu'il y a un terme en h^2 et donc que l'erreur est quadratique.

Soit, ils écrivent qu'il y a un terme en h et donc que l'erreur est linéaire.

Soit, ils écrivent qu'il y a un terme constant et que l'erreur est constante....

Certains poussent le culot à m'expliquer que le terme h^2 est l'erreur locale...

et que les autres termes sont l'erreur globale après un unique pas !

Hélas, cela n'a pas satisfait le correcteur impitoyable

Ensuite, il faut démontrer que cette erreur a l'ordre théorique de l'erreur locale d'Euler implicite.

Il faut donc bien démontrer que le terme dominant de e_1 est en $\mathcal{O}(h^2)$.

Et cela se fait en écrivant un développement en série de Taylor pour l'exponentielle !

$$\begin{aligned}
 e_1 &= -1 - h^2 + (1 + h)e^{-h} \\
 &\quad \downarrow \text{Comme } e^{-h} = e^0 - he^0 + \frac{h^2}{2}e^0 + \dots \\
 e_1 &= -1 - h^2 + (1 + h)\left(1 - h + \frac{h^2}{2} + \dots\right) \\
 e_1 &= -1 - h^2 + 1 - h + \frac{h^2}{2} + h - h^2 + \dots \\
 e_1 &= -\frac{3h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)
 \end{aligned}$$

Quasiment aucun étudiant n'obtient ce résultat !

Oui, il était indispensable de démontrer que le terme dominant de cette expression est h^2 !

Cette question pourtant simple a surpris la plupart des étudiants.

Quelques étudiants démontrent l'ordre local de la méthode d'Euler implicite dans le cas général.
 C'est pas une mauvaise idée, mais ce n'est pas la question posée !
 Même si l'erreur du problème particulier doit évidemment satisfaire le résultat général :-)
 On voit bien aussi que faire un développement en série de Taylor est aussi nécessaire ici !

$$\begin{array}{rcl}
 U_{i+1} & = & U_i + hF_{i+1} \\
 \downarrow & & \text{En effectuant les développements en série pour } U_{i+1} \text{ et } F_{i+1} = U'_{i+1} \\
 U_i + hU'_i + \frac{h^2}{2}U''_i + \mathcal{O}(h^3) & = & U_i + h(U'_i + hU''_i + \mathcal{O}(h^2)) \\
 U_i + \frac{h^2}{2}U''_i + \mathcal{O}(h^3) & = & U_i + h^2U''_i + \mathcal{O}(h^3) \\
 \downarrow & & \text{Et on peut donc obtenir l'expression de l'erreur locale...} \\
 e_i & = & \frac{C_2}{2}h^2
 \end{array}$$

C'est bien, mais ce n'est pas la réponse à la question posée !
 Même si le correcteur a apprécié cet effort.
 Notons aussi que la fraction obtenue n'est pas parfaitement identique à ce qui a été obtenu dans le cas particulier puisque les développements en série sont différents dans les deux calculs !

2 Sainte Equation du Transport Méditatif

Léon XIII utilise le schéma suivant pour approcher la Sainte Equation :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial t} & = & -c \frac{\partial u}{\partial x} \\ \downarrow & & \\ \frac{2U_j^{n+1} - U_{j-1}^n - U_{j+1}^n}{2\Delta t} & = & -c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \end{array}$$

où j et n sont respectivement les indices spatiaux et temporels et c une vitesse positive de méditation. On souhaite effectuer l'analyse de stabilité en considérant l'évolution d'une perturbation quelconque de la forme $U_j^n = U^n \exp(ikX_j)$ et en calculant le module du facteur d'amplification :

$$G = \frac{U^{n+1}}{U^n}.$$

1. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

On obtient immédiatement U_j^{n+1} en ne résolvant aucun système à partir des valeurs nodales connues à l'itération temporelle précédente. L'itération temporelle est bien purement explicite !

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

Il fallait donc uniquement écrire :

La méthode est explicite !

Et pas mal d'étudiants ont choisi l'autre option pourtant !

2. Donner l'expression du nombre complexe G pour le schéma¹.

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \\ &= U_j^n \left(\frac{1}{2} (e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}) - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) \right) \\ &= U_j^n \left(\cos(k\Delta x) - \frac{i c\Delta t}{\Delta x} (\sin(k\Delta x)) \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$G = \cos(k\Delta x) - \frac{i c\Delta t}{\Delta x} (\sin(k\Delta x))$$

¹Il peut être utile ou élégant d'utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha &= e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ 2i \sin \alpha &= e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{aligned}$$

3. En déduire la condition de stabilité en termes de Δx et Δt pour ce schéma.

La condition de stabilité s'écrit à partir du module de G .

$$\begin{aligned} |G| &= \cos^2(k\Delta x) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - \sin^2(k\Delta x) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 + \sin^2(k\Delta x) \left(\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Et maintenant, il est possible de déduire une condition de stabilité sur le pas de temps...

$$\begin{aligned} |G| &\leq 1 \\ \sin^2(k\Delta x) \left(\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - 1 \right) &\leq 0 \\ \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - 1 &\leq 0 \\ c\Delta t &\leq \Delta x \end{aligned}$$

Ce schéma **conditionnellement stable**. Ce schéma introduit un terme additionnel qui stabilise le schéma en y incorporant de la dissipation numérique : ce qui a évidemment un impact non négligeable sur sa précision. Il est connu dans la littérature comme le schéma de Lax.

La condition de stabilité sur le pas de temps s'écrit donc

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}.$$

Comme prédit au dernier cours, comme vérifié les années précédentes, un nombre incalculable d'étudiants effectuent correctement l'algèbre, mais n'arrivent malencontreusement pas à la bonne condition finale... Soit le schéma est inconditionnellement instable, soit il est inconditionnellement stable. Et oublions, les conditions sur les pas de temps qui deviennent négatif ou complexe... Soyons un fifein crédibles quand-même. Au passage, cette question se trouvait dans les annales : donc, ce n'était même pas une surprise ! Une manière très efficace et encore plus simple de faire la discussion est de considérer l'expression du module pour quelques valeurs α caractéristiques...

$$\begin{array}{ll} |G| &= \cos^2(\alpha) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(\alpha) \\ \alpha &= 0 & |G| &= 1 \\ \alpha &= \pi/4 & |G| &= \frac{1}{2} + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{1}{2} \\ \alpha &= \pi/2 & |G| &= \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \end{array}$$

Et on peut ainsi déduire la condition de stabilité de manière simple et immédiate, sans aucune astuce trigonométrique.

3 Benoît XVI perdu dans les indulgences finies

Pour estimer la dérivée seconde à l'origine d'une fonction $u(x)$, Benoît a trouvé la formule suivante :

$$u''(0) \approx \frac{2U_0 - 5U_h + \beta U_{2h} - U_{3h}}{h^2}$$

Malencontreusement, un sacristin facétieux lui a chapardé la valeur optimale de β .

1. Aider Benoît à retrouver cette sainte valeur de β .

Il suffit d'écrire les développements en série de Taylor comme suit :

$$U_h = U_0 + hU'_0 + \frac{h^2}{2}U''_0 + \frac{h^3}{6}U'''_0 + \frac{h^4}{24}U''''_0 \dots$$

$$U_{2h} = U_0 + 2hU'_0 + \frac{4h^2}{2}U''_0 + \frac{8h^3}{6}U'''_0 + \frac{16h^4}{24}U''''_0 \dots$$

$$U_{3h} = U_0 + 3hU'_0 + \frac{9h^2}{2}U''_0 + \frac{27h^3}{6}U'''_0 + \frac{81h^4}{24}U''''_0 \dots$$

En substituant ces développements dans la formule de Benoît, on obtient alors :

$$\frac{(2-5+\beta-1)}{h^2}U_0 + \frac{-5+2\beta-3}{h}U'_0 + \frac{(\alpha+4\beta-9)}{2}U''_0 + \frac{(-5+8\beta-27)}{6}hU'''_0 + \frac{(-5+16\beta-81)}{24}h^2U''''_0$$

Pour que la formule de benoît aie du sens, il faut annuler les coefficients de U_0 et de U'_0 . Il faut aussi exiger que le coefficient de U''_0 soit unitaire.

Il y a trois conditions et une unique inconnue : il est donc vraiment possible de vérifier plusieurs fois que la réponse trouvée est bien correcte.

C'est donc vraiment impardonnable de ne pas obtenir le coefficient magique !

La très grande majorité des étudiants ont réussi cette question :-)

Les trois conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}\beta - 4 &= 0 \\ 2\beta - 8 &= 0 \\ 4\beta - 14 &= 2\end{aligned}$$

On déduit immédiatement que :

$\beta = 4$

2. Donner l'ordre de précision et calculer l'expression du terme d'erreur.

Ensuite, on substitue β dans la formule de Benoît pour obtenir le terme d'erreur :-)

$$\underbrace{\frac{(2-5+4-1)}{h^2}}_{=0}U_0 + \underbrace{\frac{(-5+8-3)}{h}}_{=0}U'_0 + \underbrace{\frac{(-5+16-9)}{2}}_{=1}U''_0 + \underbrace{\frac{(-5+32-27)}{6}}_{=0}hU'''_0 + \underbrace{\frac{(-5+64-81)}{24}}_{=11/12}h^2U''''_0$$

$$\text{On conclut finalement : } u'''(0) = \frac{2U_0 + \alpha U_h + \beta U_{2h} - U_{3h}}{h^2} - \frac{11}{12} h^2 u^{(4)}(\zeta)$$

La méthode de Benoît est donc *d'ordre deux* et correspond à une différence avant usuelle :-)

3. Calculer la valeur optimale de h afin de minimiser l'erreur totale, c'est-à-dire, les contributions conjointes de l'erreur de discrétisation et des erreurs d'arrondi dues au calcul en virgule flottante. Les valeurs U_0 , U_h , U_{2h} et U_{3h} sont fournies avec une double précision ($\epsilon = 10^{-16}$). La dérivée quatrième de u est constante et vaut l'unité.

$$\text{Il suffit de minimiser } E(h) = \frac{(2 + 5 + 4 + 1)}{h^2} \epsilon + \frac{11}{12} h^2.$$

Attention : les erreurs ne font que s'additionner et donc on prend la valeur absolue de tous les coefficients de la formule de Benoît et on prend la somme de l'erreur d'arrondi et de l'erreur de discrétisation même si cette dernière est négative !

$$\begin{aligned} \text{On exige donc que } f'(h) &= -\frac{24}{h^3} \epsilon + \frac{22h}{12} = 0 \\ &\downarrow \\ h^4 &= \frac{144}{11} \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{On conclut que le pas optimal est donné par : } h = \sqrt[4]{\frac{144}{11}} \epsilon$$