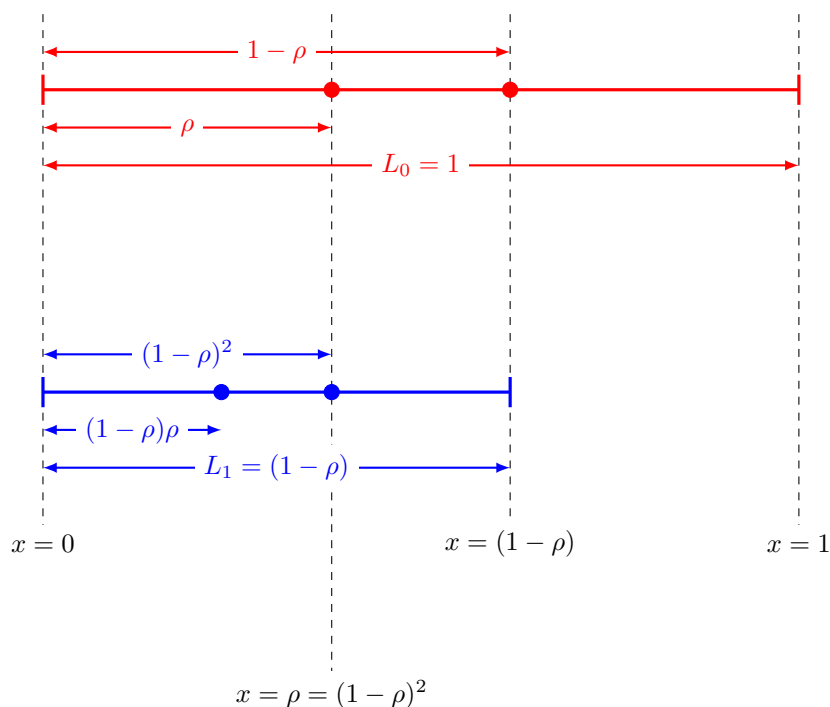


1 Optimisation trumpienne

On considère une fonction $f(x)$ avec un unique minimum sur l'intervalle $[a, b]$.
 Pour trouver ce minimum, Donald propose une nouvelle technique.

On choisit un nombre magique $\rho \in]0, \frac{1}{2}[$.
On choisit deux points intérieurs $x_1 = a + \rho(b - a)$ et $x_2 = b - \rho(b - a)$.
On évalue $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
Si $f(x_1) < f(x_2)$, on remplace l'intervalle par $[a, x_2]$.
Sinon, on remplace l'intervalle par $[x_1, b]$.
On recommence la même procédure sur le nouvel intervalle jusqu'à convergence.

Pour résoudre efficacement cette question, il était indispensable de faire un petit dessin !
Observer aussi que l'intervalle de recherche $[a, b]$ est arbitraire : si, si !
On peut donc choisir arbitrairement l'intervalle initial $[0, 1]$, sans aucune perte de généralité !
On simplifie ainsi l'algèbre et on voit directement ce qui se passe dans la procédure de Donald !



Toute la difficulté de la question est d'observer que c'est évidemment le point gauche x_1 de l'intervalle initial qu'il convient de ré-utiliser mais comme point droit x_2 du nouvel intervalle : eh oui :-)
L'autre option $\rho = \rho(1 - \rho)$ est évidemment impossible sauf à choisir $\rho = 0$ ou $\rho = 1$!
A chaque itération, la longueur de l'intervalle est réduite d'un facteur $q = (1 - \rho)$!
C'était pas une question difficile en termes d'algèbre, mais beaucoup d'étudiants ont été perdus :-)

1. Démontrer que la longueur de l'intervalle de recherche vérifie $L_{n+1} = qL_n$.
Déterminer le facteur de convergence q .

Avec $L_0 = b - a$, on calcule $L_1 = b - x_1 = b - a - \rho(b - a) = (1 - \rho)L_0$.

On obtient évidemment le même résultat avec $x_2 - a = (1 - \rho)L_0$.

On conclut donc :

$$L_{n+1} = (1 - \rho)L_n$$

La plupart des étudiants obtiennent ce résultat :-)

2. Ecrire la condition mathématique sur ρ afin qu'après chaque réduction de l'intervalle, une des deux évaluations déjà effectuées puisse être réutilisée à l'itération suivante.

Imposer que le point gauche x_1 de l'intervalle initial soit le point droit x_2 du nouvel intervalle peut s'exprimer sous la forme :

Il suffit d'écrire :

$$(1 - \rho)^2 = \rho$$

Oui : c'était un peu inattendu :-)

Mais, c'était diaboliquement simple pourtant !

Mais, beaucoup d'étudiants ont été complètement perdus pour cette étape !

3. Calculer la valeur de ρ satisfaisant cette condition.

Il suffit de résoudre une équation du second degré !

$$\begin{aligned}(1 - \rho)^2 &= \rho \\ 1 + \rho^2 - 2\rho &= \rho \\ \rho^3 - 3\rho + 1 &= 0\end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

En calculant sagement le discriminant de cette équation :-)

Et, on voit apparaître le nombre d'or :

$$(1 - \rho) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

Eh oui : un truc doré, cela ne pouvait que plaire à Donald :-)

Il n'était pas nécessaire d'observer que c'était le nombre d'or pour réussir la question !

Et même en n'obtenant pas la valeur de ρ , on peut répondre aux deux dernières sous-questions !

4. Combien d'itérations sont nécessaires pour réduire un intervalle initial de longueur h à une longueur inférieure à une tolérance ϵ ?

On impose simplement :

$$(1 - \rho)^n h < \epsilon$$

$$(1 - \rho)^n < \frac{\epsilon}{h}$$

Avec l'aide bienveillante des logarithmes :-)

$$n > \frac{\log(\epsilon/h)}{\log(1 - \rho)}$$

Le nombre d'itérations nécessaires est donc :

$$n > \frac{\log(\epsilon/h)}{\log(1 - \rho)}$$

Ecrire la réponse en termes de q est évidemment admis !

Cette sous-question était vraiment élémentaire !

5. La nouvelle méthode trumpienne est-elle plus efficace que la technique de la bisection ? Justifier brièvement votre réponse.

Les deux méthodes ont une convergence linéaire avec une relation $L_{n+1} = qL_n$.

Pour la méthode de la section dorée (eh oui, Donald n'a rien inventé), la réduction de l'intervalle est donnée par $q = 0.618$, tandis que pour la méthode de bisection, le facteur $q = 0.5$.

On pourrait en conclure que la bisection converge plus rapidement que la méthode de Donald, puisque une unique évaluation de f par itération est faite dans les deux cas.

Et donc conclure que la méthode trumpienne est stupide semble aller de soi :-)

Mais ce n'est pas totalement le bon critère de comparaison !

- *La méthode de la bisection s'applique à un problème*

$$f(x) = 0$$

où l'on connaît un changement de signe de la fonction.

- *La méthode de la section dorée s'applique à un problème*

$$\min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Avec la bisection, il faudrait résoudre le problème $f'(x) = 0$ et supposer qu'on dispose de f' . Mais disposer de la dérivée de f qui peut être très complexe n'est pas toujours garanti !

En pratique, la méthode de Donald est intéressante, lorsqu'on ne dispose pas de la dérivée de f . Dans ce cas, l'estimation de cette dérivée en un point nécessitera deux évaluations. de f .

Et alors, la méthode trumpienne est plus efficace, puisqu'elle ne nécessite qu'une évaluation de f .

En conclusion, la méthode de Trump est très loin d'être stupide et peut être un excellent choix lorsque le coût d'évaluation de la fonction domine le coût des opérations numériques et que la dérivation analytique de la dérivée n'est pas possible !

Cette question était nettement et réellement moins simple qu'il n'y paraît !

Mais toute réponse bien motivée était admise par le correcteur qui était très bienveillant !

Aucun étudiant n'a donné la réponse vraiment parfaite : donc, soyez pas trop inquiets !

2 Equation de Blasius

La fonction de courant de l'écoulement laminaire d'un fluide le long d'une plaque plane est obtenue en résolvant le problème de Blasius :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'''(x) + u(x)u''(x) & = & 0 \\ u(0) & = & 0 \\ u'(0) & = & 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) & = & 1 \end{array} \right.$$

La valeur de u' représente la vitesse qui varie de manière monotone de zéro sur la plaque ($x = 0$) à une valeur unitaire à une très grande distance de celle-ci.

1. Ecrire le problème comme un système de trois équations différentielles ordinaires d'ordre un.

On définit $v = u'$ et $w = u''$.

Il suffit ensuite d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & v(x) \\ v'(x) & = & w(x) \\ w'(x) & = & -u(x)w(x) \end{array} \right.$$

Ne pas savoir écrire ceci est impardonnable !

C'était vraiment un cadeau à saisir !

Et pourtant, cela n'a pas souri à tout le monde !

2. Ecrire une fonction python : `u = blasius(h)`

qui calcule avec la technique du tir et la méthode de Heun la solution numérique de ce problème.

L'argument `h` est le pas de temps constant pour Heun.

Les valeurs $[u(0), u(h), u(2h), u(3h) \dots]$ seront fournies dans le vecteur `u`.

Il n'est évidemment pas possible d'intégrer jusqu'à une distance infinie : il serait judicieux d'arrêter l'intégration lorsque la variation de la valeur de u' sur un pas est inférieure à 1%.

La méthode du tir permet obtenir de choisir $u''(0) = \alpha$ afin de satisfaire la condition limite à l'infini.

Il faut combiner le programme de la méthode de Heun et celui de la technique de la bisection.

Ces deux programmes sont donnés dans les transparents !

La méthode du tir consiste à appliquer la technique de la bisection pour obtenir la condition initiale manquante $u''(0) = w(0) = \alpha$ afin de satisfaire la condition à l'infini.

Cette question est aussi une copie conforme d'un des dix devoirs à réaliser pendant l'année !

Une implémentation possible est :

```
def f(u):
    dudt = u[1]
    dvdt = u[2]
    dwdt = - u[0] * u[2]
    return array([dudt,dvdt,dwdt])

def heun(alpha,h):
    Xstart = 0;Xend = 5; Ustart=[0,0,alpha]
    imax = int((Xend-Xstart)/h)
    X = Xstart + arange(imax+1)*h
    U = zeros((imax+1,3)); U[0,:] = Ustart
    for i in range(imax):
        K1 = f(U[i,:])
        K2 = f(U[i,:]+K1*h)
        U[i+1,:] = U[i,:] + h*(K1+K2)/2
    if (abs(U[-1,1]-U[-2,1]) > 0.01):
        print(" Warning : too short integration interval :-(")
    return (1.0-U[-1,1]),U[:,0]

def blasius(h):
    a = 0; fa,U = heun(a,h)
    b = 1; fb,U = heun(b,h)
    n = 1; delta = (b-a)/2
    while (abs(delta) >= 1.e-3) :
        delta = (b-a)/2; n = n + 1;
        x = a + delta; fx,U = heun(x,h)
        if (fx*fa > 0) :
            a = x; fa = fx
        else :
            b = x; fb = fx
    return U
```

Tout étudiant qui donnait une idée générale et même assez floue des trois fonctions requises était immédiatement crédité de la quasi totalité des points. La syntaxe est vraiment secondaire ici.

C'était vraiment une très mauvaise idée de remettre une feuille blanche pour cette question !

Oui : la plupart des étudiants et des étudiantes n'ont pas aimé cette question.

La moyenne obtenue est catastrophique !

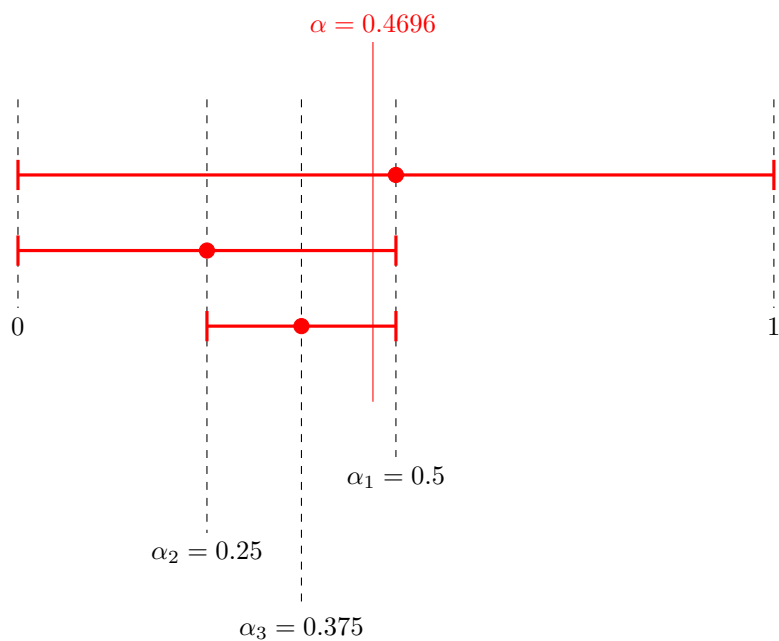
Un véritable massacre !

3. Sachant que la solution exacte est obtenue pour

$$\alpha \approx 0.4696,$$

donner les trois premières estimations α_i obtenues à partir de l'intervalle initial $[0, 1]$.

*Cette question pouvait être résolue de manière totalement indépendante !
Il suffit à nouveau de faire un tout petit dessin.*



La réponse est immédiate :

α_1	=	0.5
α_2	=	0.25
α_3	=	0.375

Cette question était réellement vraiment très simple !

Strictement aucun calcul n'était requis !

Mais, seul un nombre très réduit d'étudiants a donné une réponse correcte, au grand dam du correcteur !

3 Modèle de Maxwell et méthode russe

Le modèle de Maxwell permet de décrire le comportement des matériaux viscoélastiques comme les plastiques, le ketchup ou la pâte dentifrice. Pour prédire l'évolution de la contrainte de cisaillement u d'un matériau qui se trouve au repos et qu'on soumet brutalement à un taux de cisaillement constant $\dot{\gamma} > 0$ à l'instant $t = 0$, on résout le problème de Cauchy suivant :

$$\lambda u'(t) + u(t) = \mu \dot{\gamma} \quad u(0) = 0$$

où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ représentent respectivement un temps de relaxation et une viscosité du matériau.

1. Alain souhaite utiliser la méthode de Taylor d'ordre trois.

$$U_{i+1} = U_i + h \left[f + \frac{h}{2!} \frac{df}{dt} \Big|_{u=f} + \frac{h^2}{3!} \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{u=f} \right]_{(T_i, U_i)}$$

Evaluer les dérivées du membre de droite en termes de U_i , h , λ , μ et $\dot{\gamma}$.

Pour obtenir les dérivées du membre de droite afin de faire apparaître une relation algébrique ne faisant intervenir que U_i , h , λ , μ et $\dot{\gamma}$, il suffit d'effectuer les développements suivants :

$$f(t) = \frac{\mu \dot{\gamma} - u(t)}{\lambda} \quad f'(t) = \frac{-u'(t)}{\lambda} = \frac{-\mu \dot{\gamma} + u(t)}{\lambda^2} \quad f''(t) = \frac{u'(t)}{\lambda^2} = \frac{\mu \dot{\gamma} - u(t)}{\lambda^3}$$

$$\text{Et on écrit simplement : } U_{i+1} = U_i + h \left[\left(\frac{\mu \dot{\gamma} - U_i}{\lambda} \right) + \frac{h}{2!} \left(\frac{-\mu \dot{\gamma} + U_i}{\lambda^2} \right) + \frac{h^2}{3!} \left(\frac{\mu \dot{\gamma} - U_i}{\lambda^3} \right) \right]$$

*Appliquer la méthode de Taylor à un cas semblable a été fait au cours !
Et l'enseignant a clairement insisté que c'était une question d'examen possible !
Et pourtant, beaucoup d'étudiants sont perdus.*

2. Claude préfère se limiter à la méthode d'Euler explicite d'ordre un.

$$U_{i+1} = U_i + h F_i$$

Pour quelles valeurs de h cette méthode est-elle stable ?

Le jacobien de ce problème ($J = -1/\lambda$) est toujours négatif.

La difficulté de l'exercice consiste à remarquer que le temps de relaxation vaut l'opposé de l'inverse de λ^ du problème modèle $u' = \lambda^* u$. En d'autres mots, λ n'est pas ce qu'on pourrait croire !*

La méthode d'Euler sera stable si $|1 - h/\lambda| < 1$.

$$\text{La réponse est donc : } 0 < h < 2\lambda$$

3. Julien a découvert la nouvelle méthode russe de Lavrov-Poutine-Belooussov :

$$U_{i+1} = -4 U_i + 5U_{i-1} + h \left(4F_i + 2F_{i-1} \right)$$

Quel est l'ordre de précision de la méthode russe ?
Pour quelles valeurs de h ce schéma est-il stable ?

Pour estimer l'ordre de précision de l'erreur locale de la méthode de Lavrov-Poutine-Belooussov, on écrit les développements en série de Taylor comme suit :

$$U_{i+1} = -4 U_i + 5U_{i-1} + h \left(4F_i + 2F_{i-1} \right)$$

$$U_{i+1} = -4 U_i + 5U_i - 5hU'_i + 5\frac{h^2}{2}U''_i - 5\frac{h^3}{6}U'''_i + \mathcal{O}(h^4) + h \left(4U'_i + 2U'_i - 2hU''_i + h^2U'''_i + \mathcal{O}(h^3) \right)$$

$$U_{i+1} = (5-4)U_i + (6-5)hU'_i + (5-4)\frac{h^2}{2}U''_i + (6-5)\frac{h^3}{6}U'''_i + \mathcal{O}(h^4)$$

$$U_{i+1} = U_i + hU'_i + \frac{h^2}{2}U''_i + \frac{h^3}{6}U'''_i + \mathcal{O}(h^4)$$

et de conclure que *l'ordre de l'erreur locale est quatre* et la méthode est donc d'ordre trois.

Pour effectuer l'analyse de stabilité, il faut étudier la valeur absolue des deux racines du polynôme

$$a^2 = -4a + 5 - 4\frac{h}{\lambda}a - 2\frac{h}{\lambda}$$

où λ est le temps de relaxation (toujours à ne pas confondre avec λ^* !).
Les deux racines de ce polynôme sont :

$$a = -\left(2 + \frac{2h}{\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(2 + \frac{2h}{\lambda}\right)^2 + \left(5 - \frac{2h}{\lambda}\right)}$$

Il n'existe aucune valeur de h qui fournisse un schéma stable.

A titre d'exemple, pour $h = 0$, on observe deux racines $a_1 = -5$ et $a_2 = 1$.

Ce schéma est donc inconditionnellement instable.

Eh oui, les opérations spéciales russes, parfois cela ne marche pas comme prévu !.

*Les étudiants attentifs observeront que cette dernière question est largement inspirée de l'examen de 2004.
Et donc, oui les annales des questions d'examen restent une bonne manière de se préparer :-)*