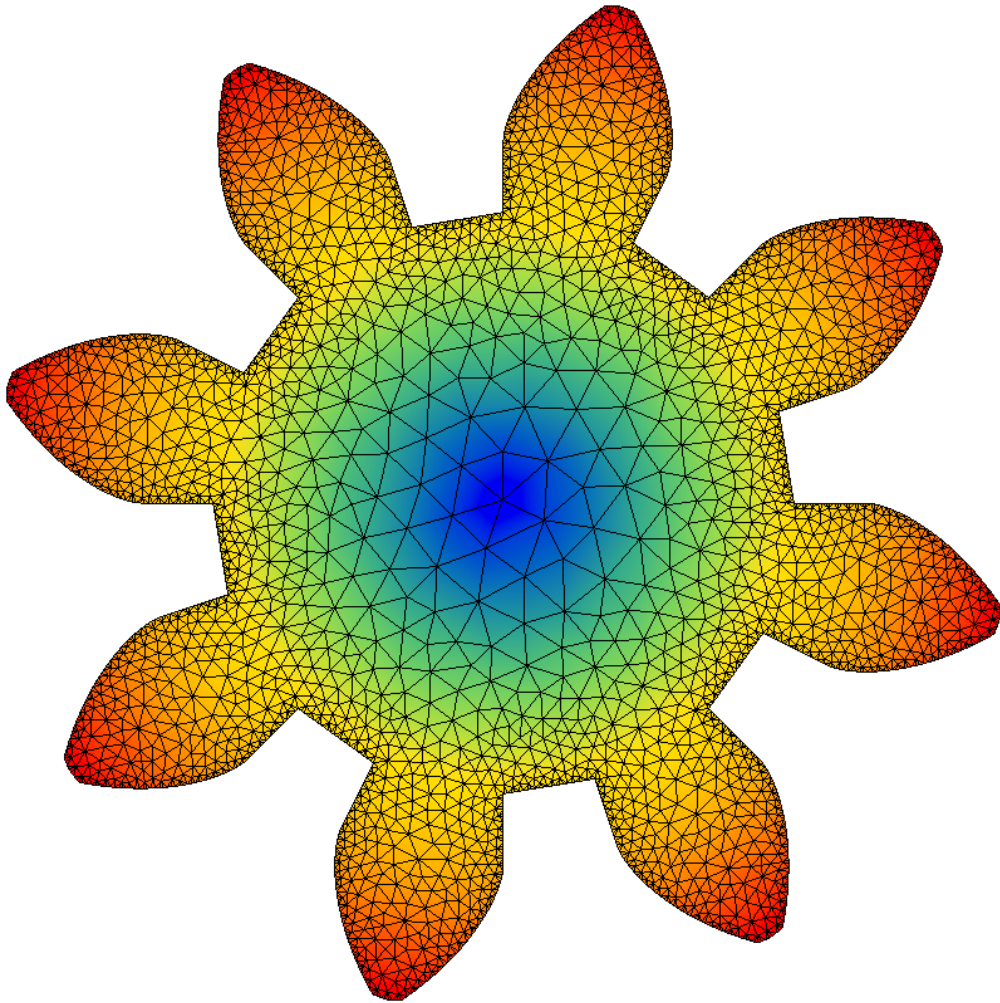
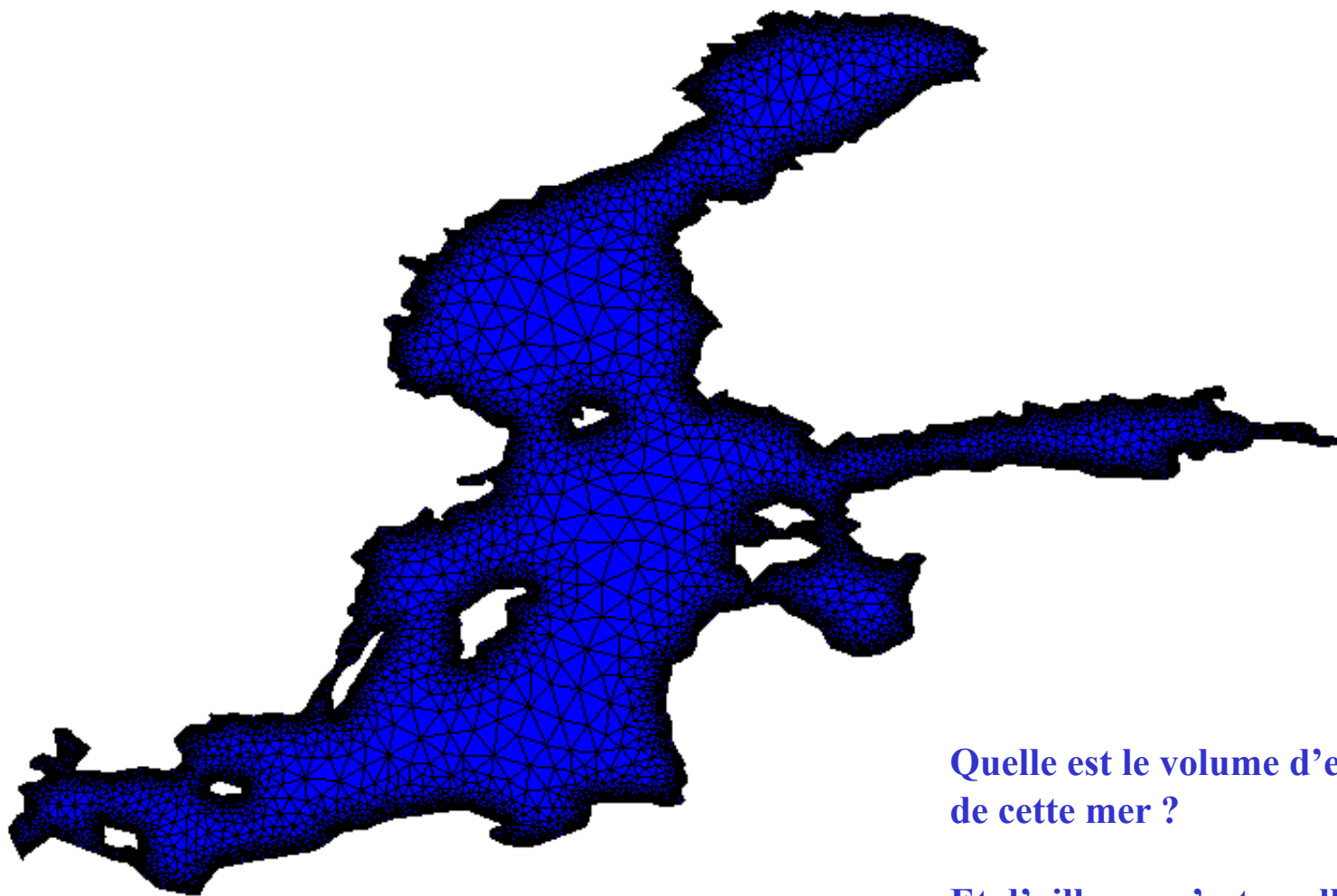


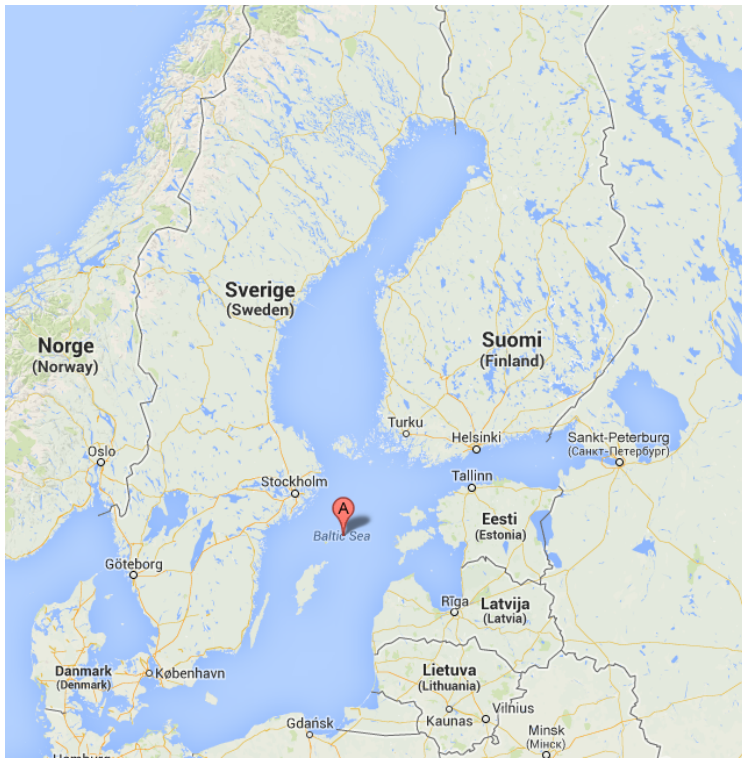


Quelle est l'inertie de cet engrenage ?

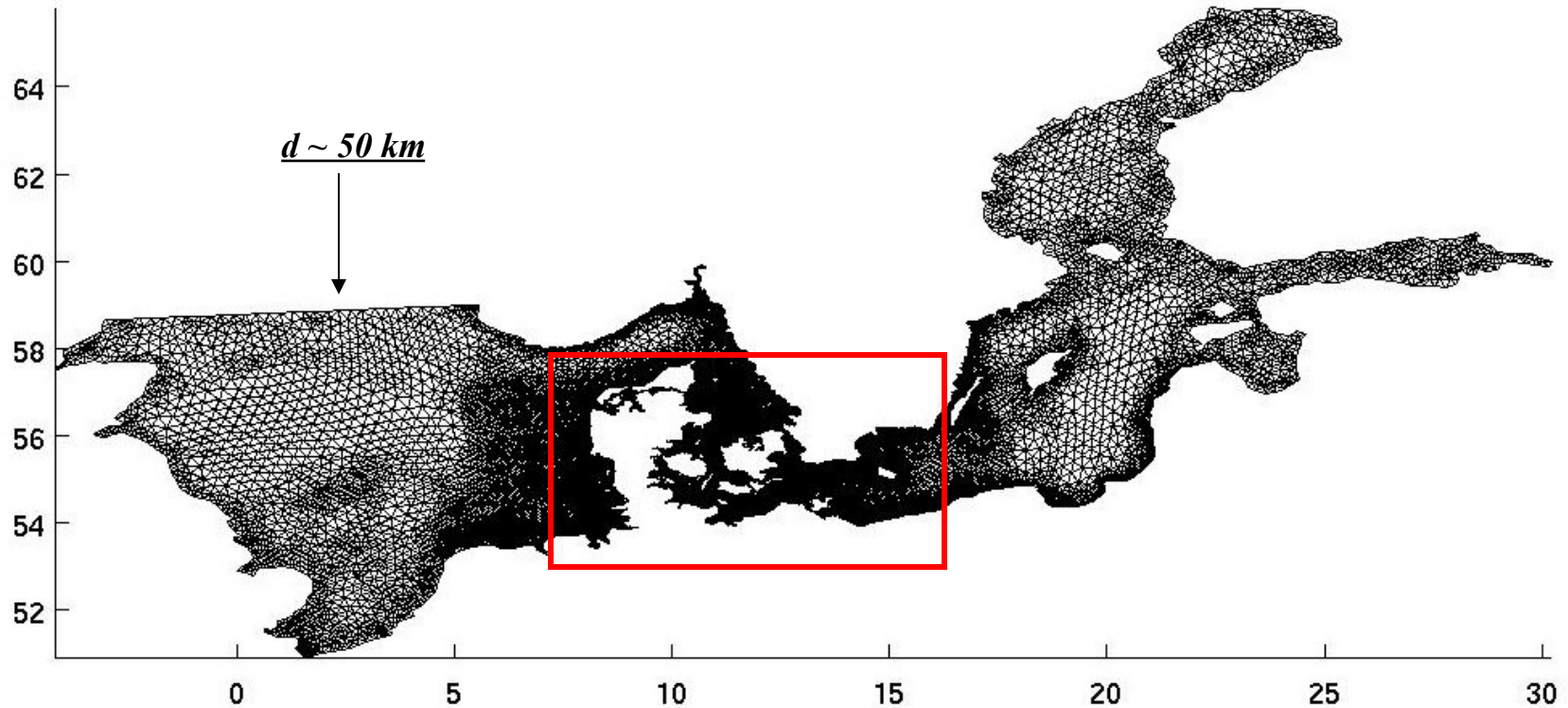


Quelle est le volume d'eau
de cette mer ?

Et d'ailleurs, c'est quelle mer ?

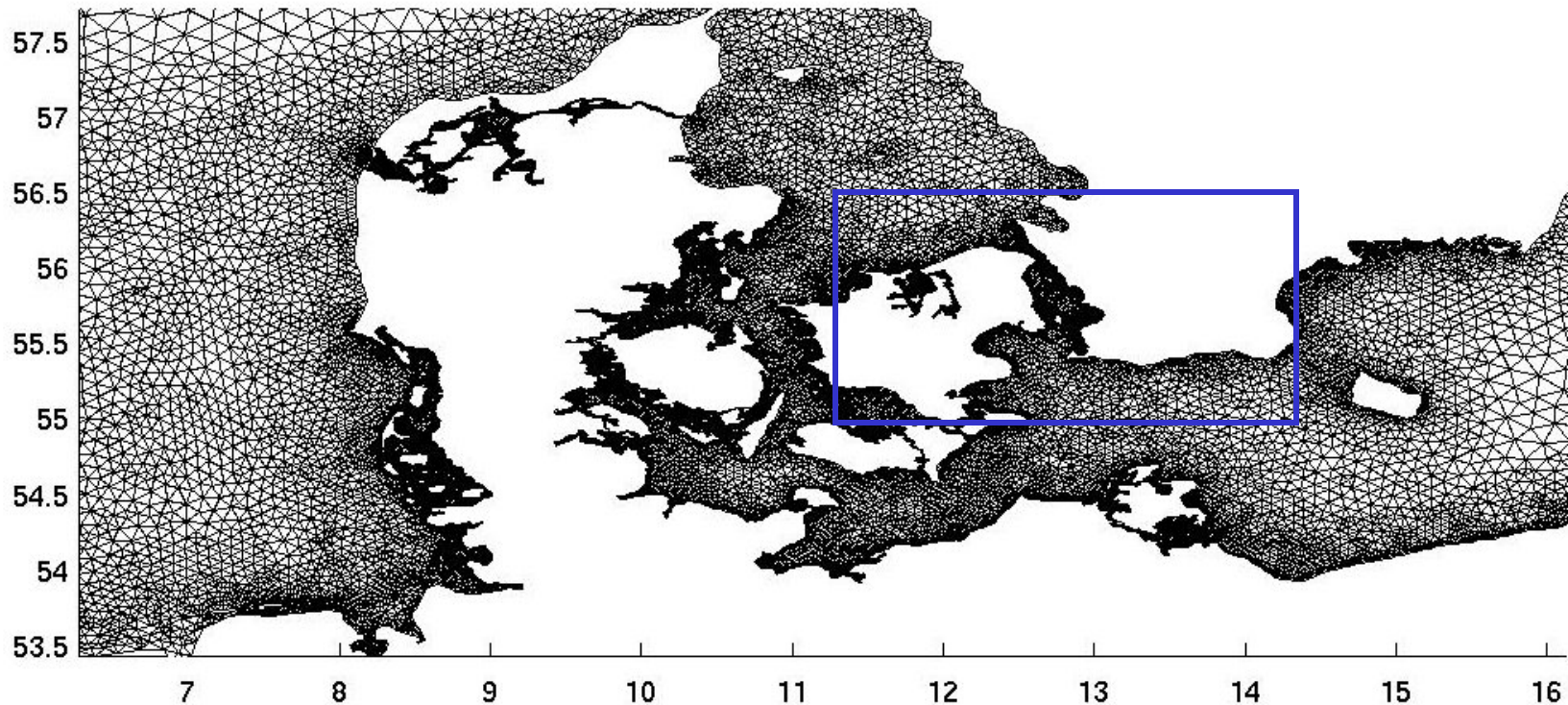


Pourquoi des maillages non structurés ?



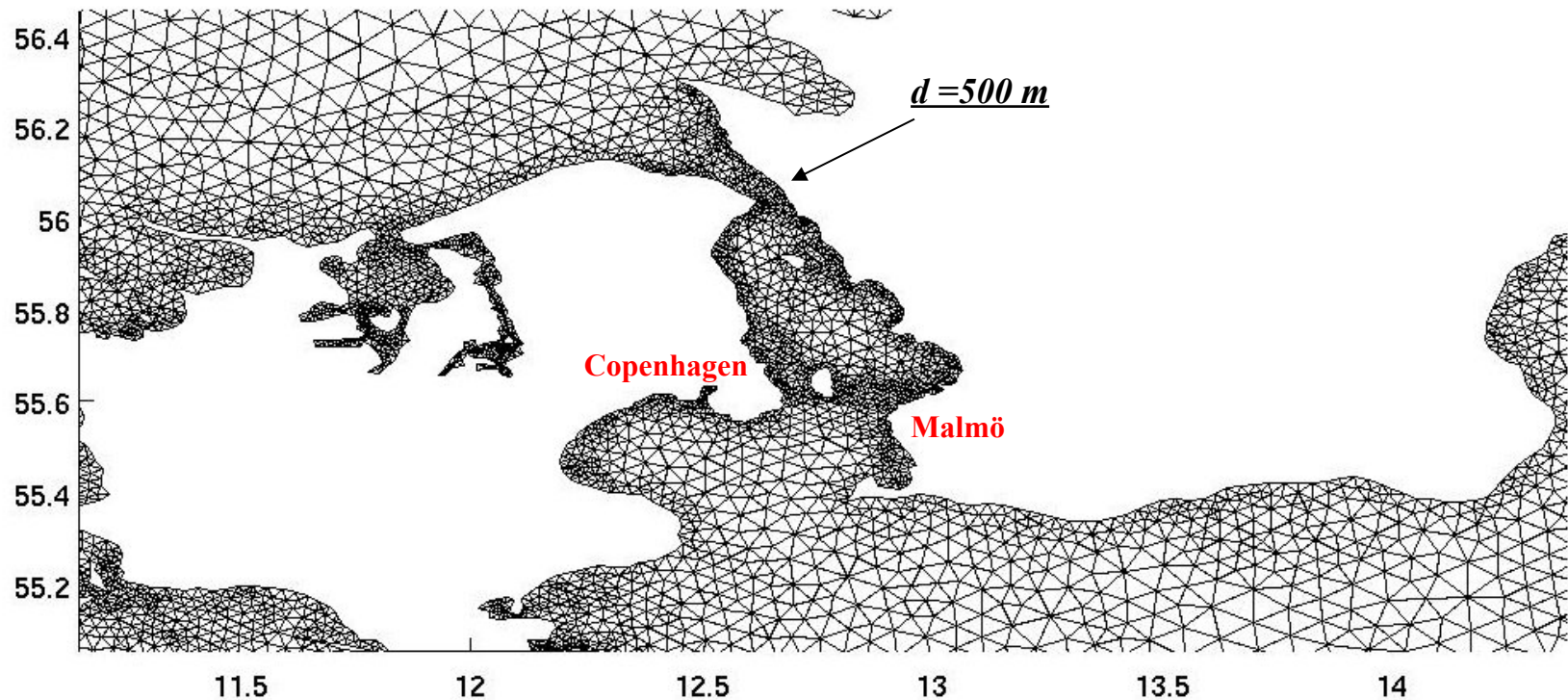
Courtesy of Dr. N. Kliem

Pourquoi des maillages non structurés ?



Courtesy of Dr. N. Kliem

Pourquoi des maillages non structurés ?



Courtesy of Dr. N. Kliem



Homework 1

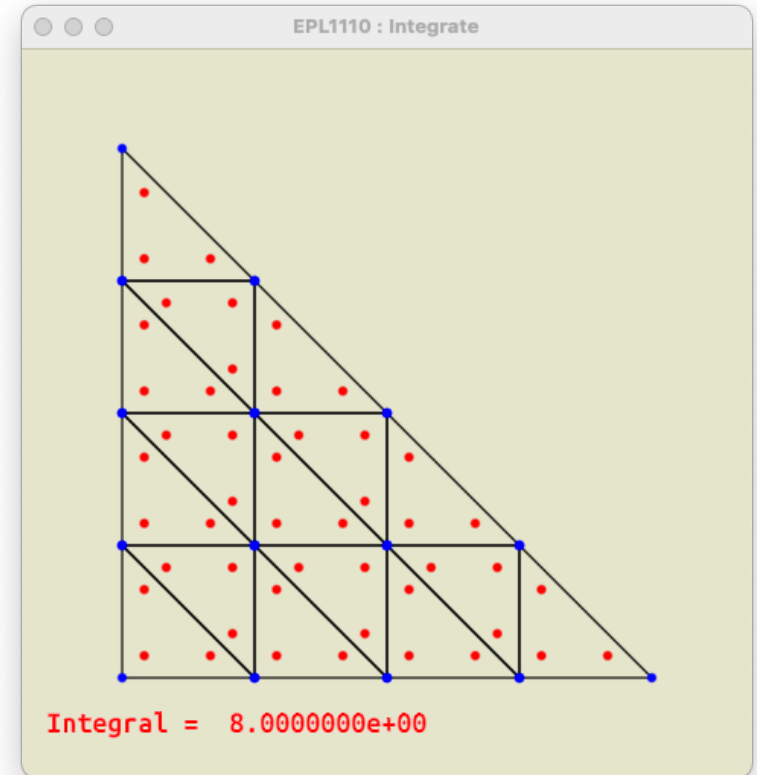
Même si vous ne pouvez pas encore compiler
sur votre propre ordinateur,

il est possible de soumettre directement
le devoir sur le serveur !

Deadline stricte : lundi 15 février ~~21h~~59:59 !

23h59:59

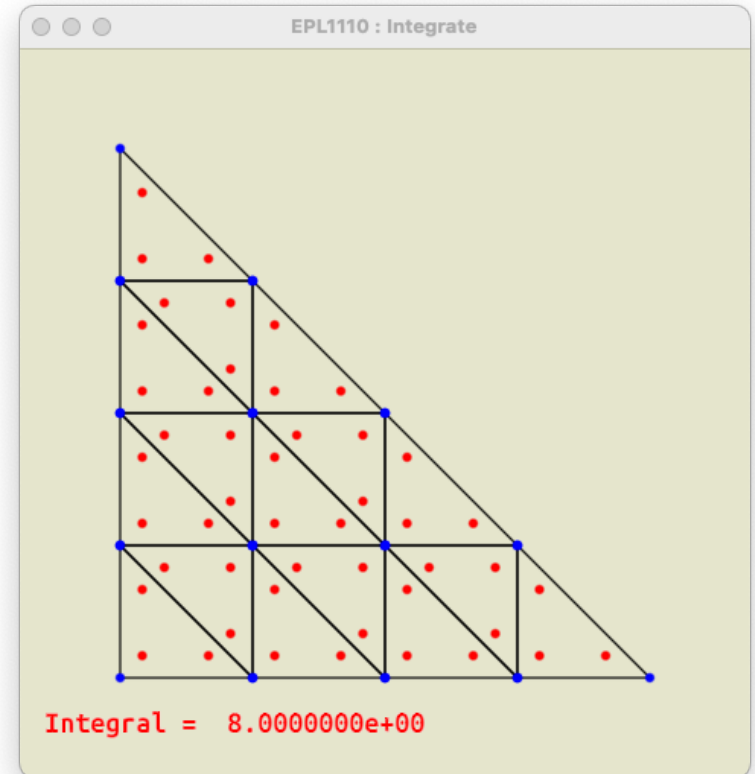
0.145 H000000P₁₁



Intégrer une fonction quelconque en divisant
récursivement un triangle en 3 sous-triangles et en
appliquant une règle de Hammer à 3 points !

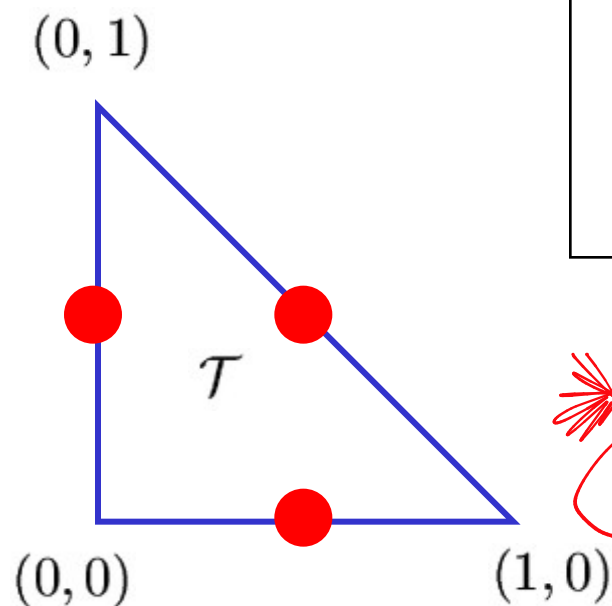
Homework 1

$$\underbrace{\int_{\hat{\Omega}} f(x, y) \, dx \, dy}_I \approx \underbrace{\sum_{k=1}^3 w_k f(x_k, y_k)}_{I_h}$$



Ecrire la règle de Hammer

Intégration sur un triangle : Règle de Hammer à 3 points



$$\underbrace{\int_{\mathcal{T}} f(x,y) \, dx \, dy}_{I} \approx \underbrace{\sum_{k=1}^3 w_k f(X_k, Y_k)}_{I^h}$$

	X_k	Y_k	w_k
1	0.5	0.0	1/6
2	0.5	0.5	1/6
3	0.0	0.5	1/6

Démontrer que la formule de Hammer à trois points permet d'intégrer exactement n'importe quel polynôme à deux variables de degré deux : $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$

Question

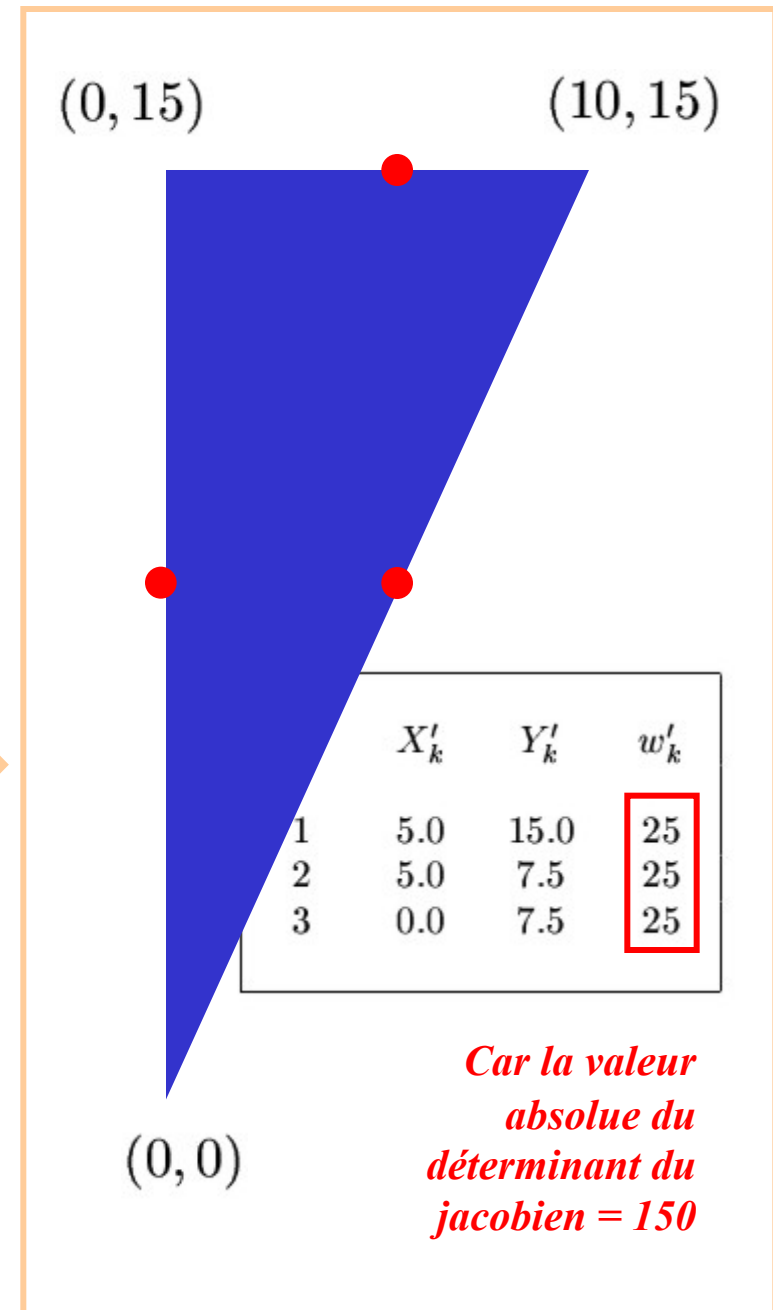
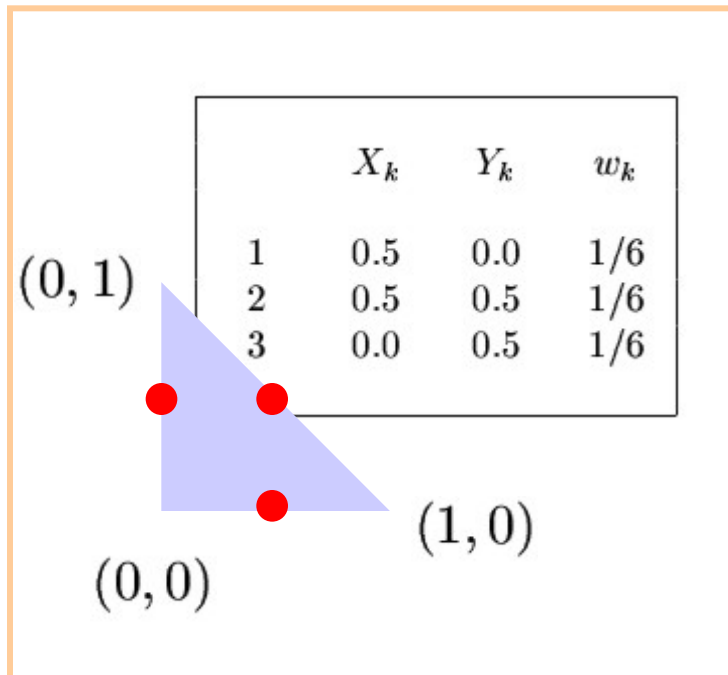
$$\begin{aligned}
 I &= \frac{a}{2} + b \int_0^1 x \int_0^{1-x} dy \, dx + c \int_0^1 y \int_0^{1-y} dx \, dy \\
 &\quad + d \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} dy \, dx + e \int_0^1 y^2 \int_0^{1-y} dx \, dy + f \int_0^1 x \int_0^{1-x} y \, dy \, dx \\
 &= \frac{a}{2} + b \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + c \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\
 &\quad + d \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + e \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 + f \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 \\
 &= \frac{a}{2} + \frac{b}{6} + \frac{c}{6} + \frac{d}{12} + \frac{e}{12} + \frac{f}{24} \\
 &= I^h
 \end{aligned}$$



**Degré de
précision**

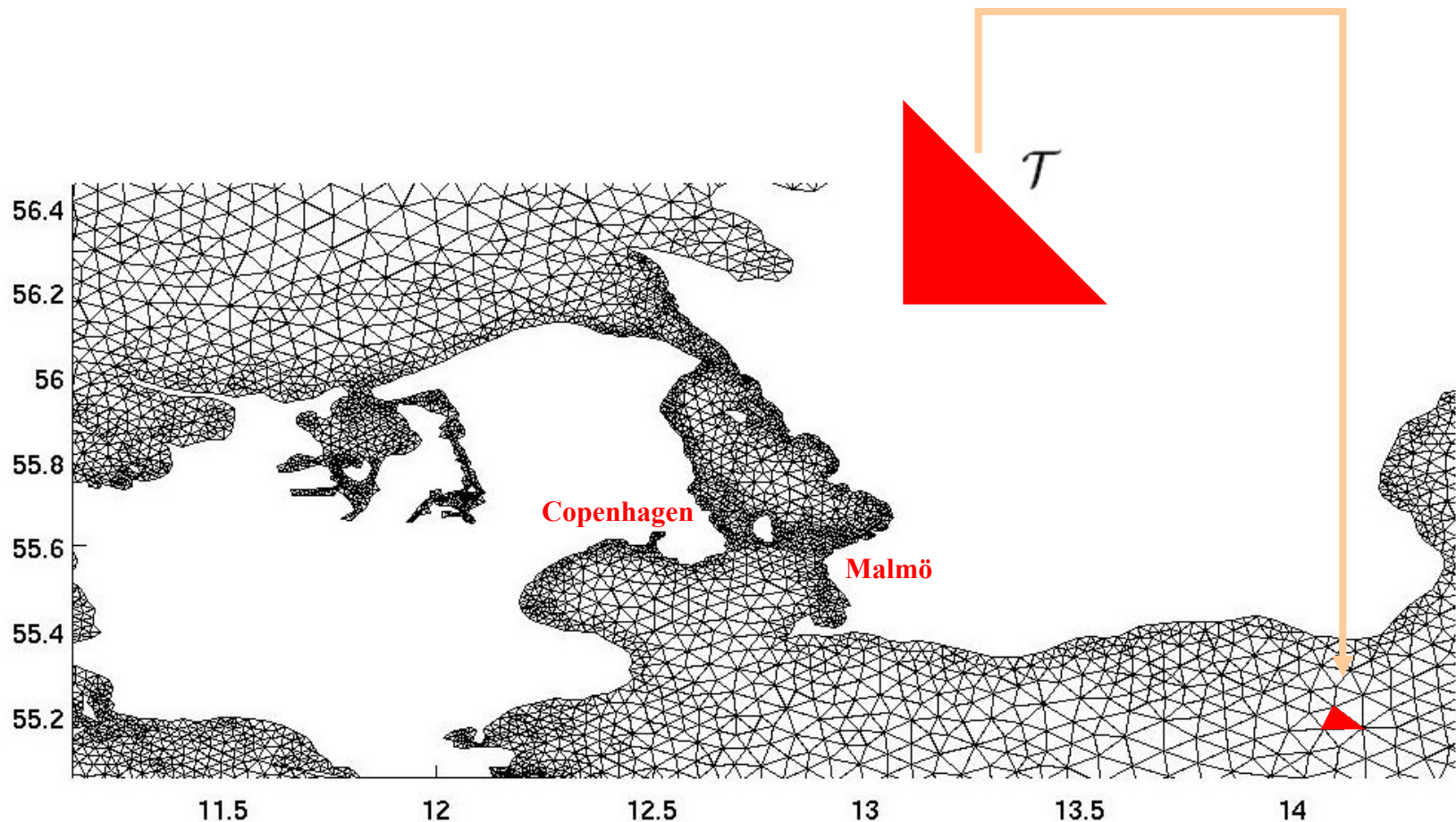
Et un autre triangle ?

$$\begin{aligned}x' &= 10x \\ y' &= 15 - 15y\end{aligned}$$

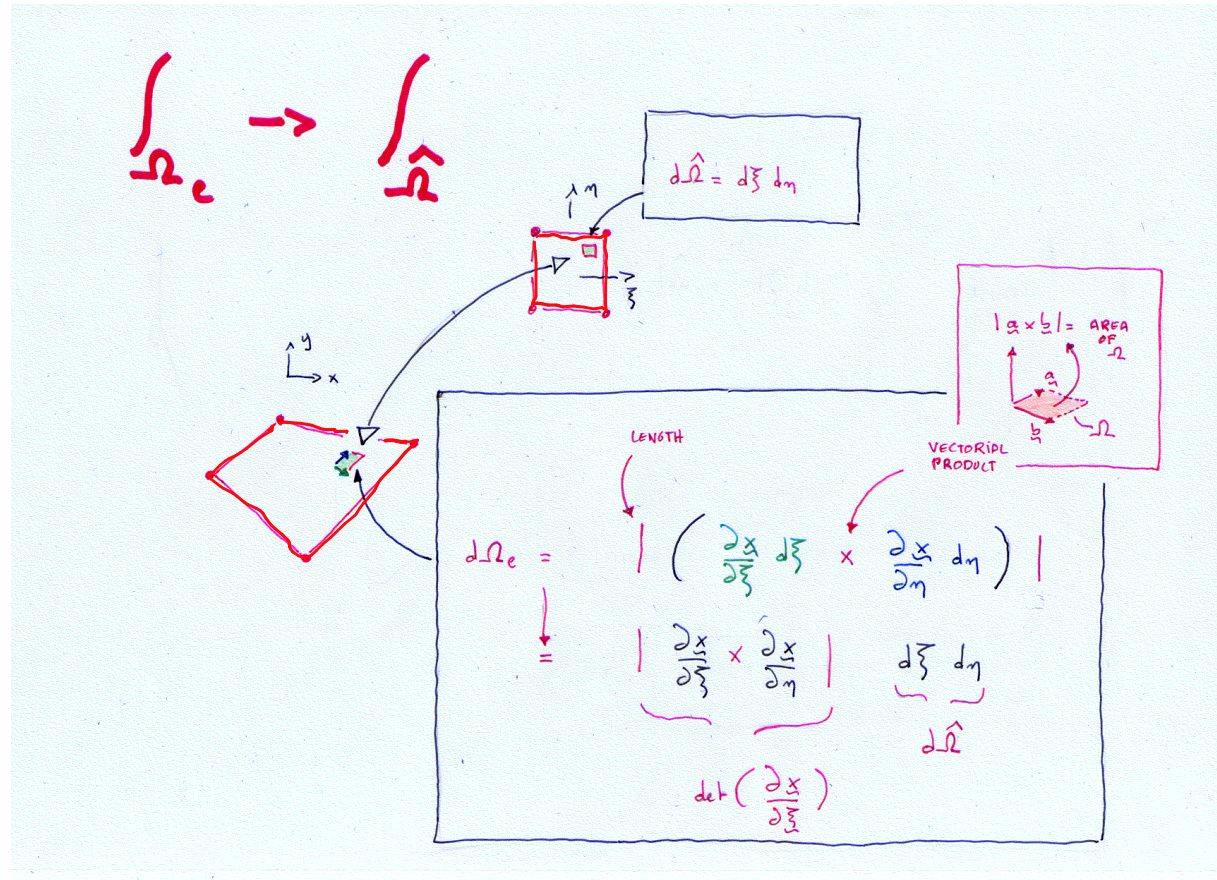
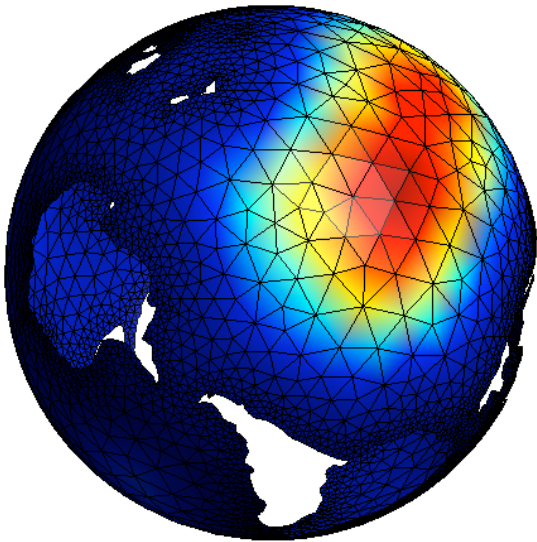


Application to Finite Elements

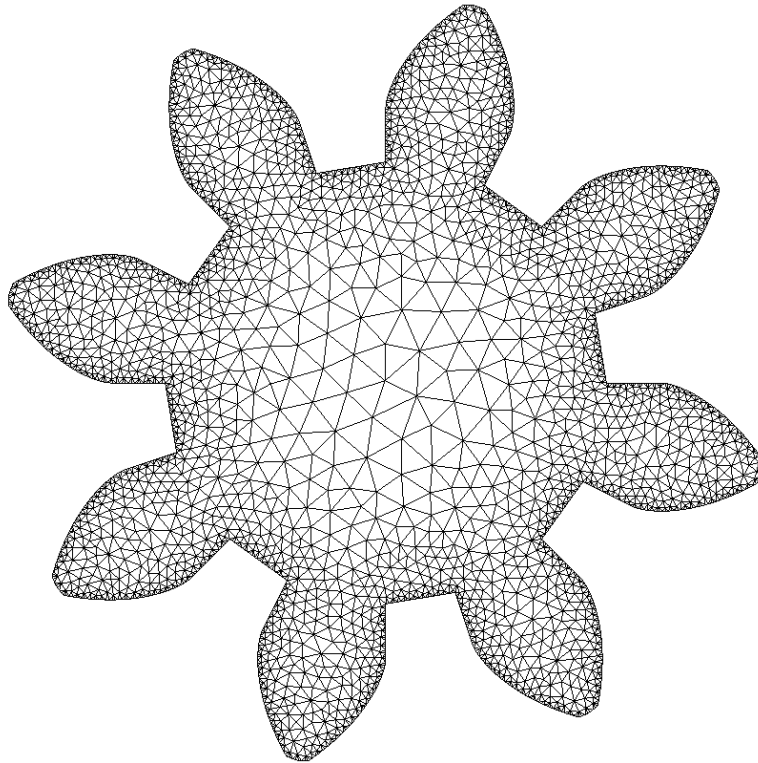
*Each triangle can be transformed in
the parent element through a linear
transformation.*



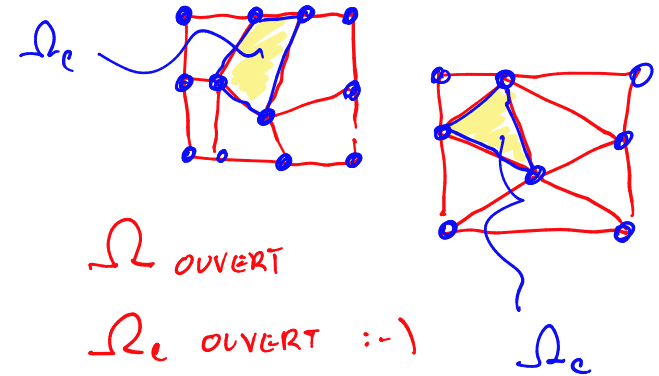
Intégrer sur un élément quelconque...



Définir un maillage



$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_1} \{\bar{\Omega}_e\}, \quad \Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset, \quad \text{si } e \neq f.$$

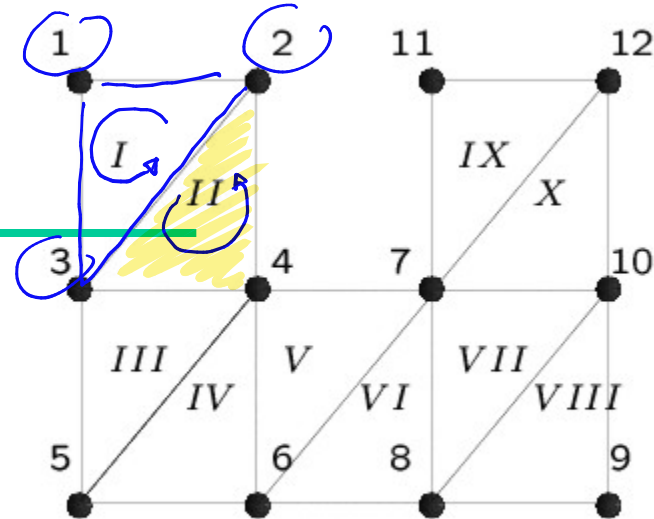


Coordonnées de noeuds
Tableau d'appartenance des triangles
Nombre de noeuds : nNode
Nombre de triangles : nElem

```
typedef struct
{
    int *elem;
    double *X;
    double *Y;
    int nElem;
    int nNode;
} femMesh;
```

Et concrètement c'est quoi un maillage ?

TRIANGLE II
 (3, 4, 2)
 (2, 3, 4)
 (4, 2, 3)



Triangle	Sommets		
1	1	3	2
2	3	4	2
3	5	4	3
4	5	6	4
5	6	7	4
6	6	8	7
7	8	10	7
8	8	9	10
9	7	12	11
10	10	12	7

Sommet	X_i	Y_i
1	0.0	2.0
2	1.0	2.0
3	0.0	1.0
4	1.0	1.0
5	0.0	0.0
6	1.0	0.0
7	2.0	1.0
8	2.0	0.0
9	3.0	0.0
10	3.0	1.0
11	2.0	2.0
12	3.0	2.0

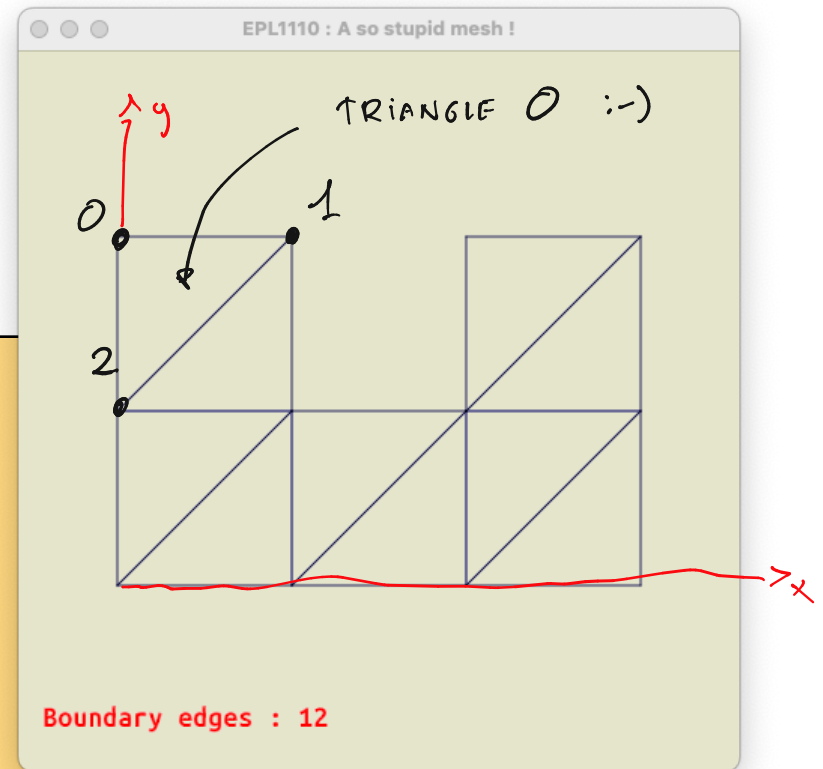
Et vraiment concrètement ?

Number of nodes 12

0 :	0.0000000e+00	2.0000000e+00
1 :	1.0000000e+00	2.0000000e+00
2 :	0.0000000e+00	1.0000000e+00
3 :	1.0000000e+00	1.0000000e+00
4 :	0.0000000e+00	0.0000000e+00
5 :	1.0000000e+00	0.0000000e+00
6 :	2.0000000e+00	1.0000000e+00
7 :	2.0000000e+00	0.0000000e+00
8 :	3.0000000e+00	0.0000000e+00
9 :	3.0000000e+00	1.0000000e+00
10 :	2.0000000e+00	2.0000000e+00
11 :	3.0000000e+00	2.0000000e+00

Number of triangles 10

0 :	0	2	1
1 :	2	3	1
2 :	4	3	2
3 :	4	5	3
4 :	5	6	3
5 :	5	7	6
6 :	7	9	6
7 :	7	8	9
8 :	6	11	10
9 :	9	11	6

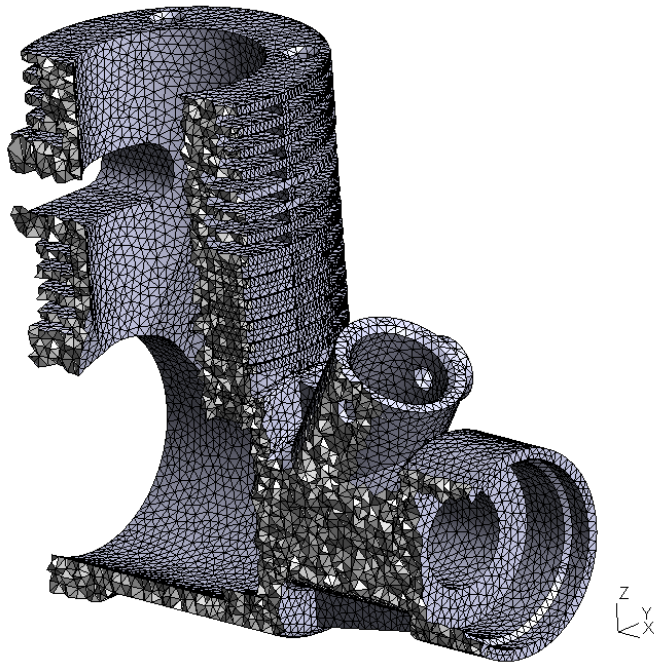


Il existe des algorithmes pour générer
automatiquement les maillages.

Voir cours de géométrie numérique MECA2170

<http://www.geuz.org/gmsh/>

Définir localement une fonction sur un maillage



TEMPERATURE EXACTE

SOLUTION NUMERIQUE

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n U_j \tau_j(\mathbf{x})$$

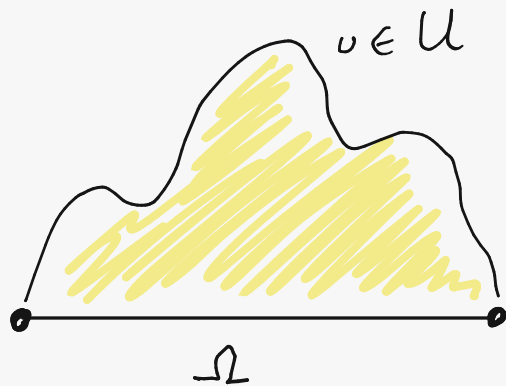
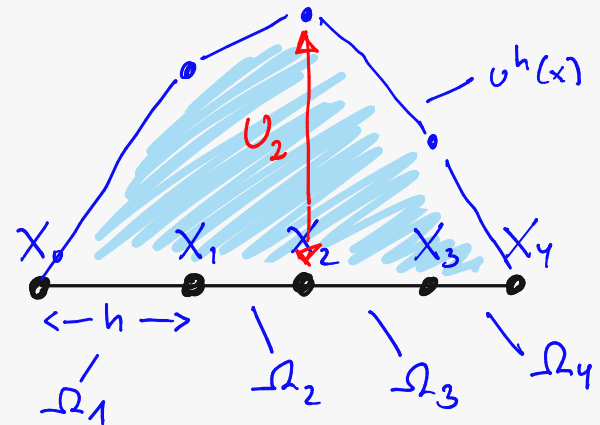
Fonctions de base
spécifiées a priori

Valeurs nodales inconnues

The problem geometry is divided in small finite elements.

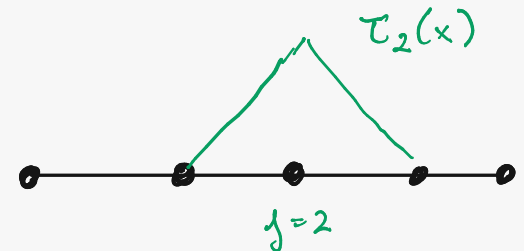
On each element, the solution is approximated
by means of unknown nodal values and given polynomials

1D!
SO EASY :-)



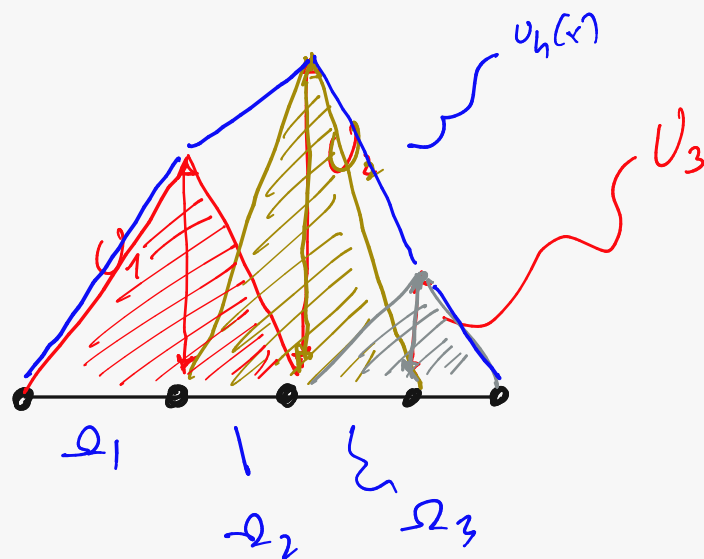
$$\dim(U) = \infty$$

$$u(x) \approx \underbrace{u^h(x)}_{\substack{\in U^h \subset U \\ \dim(U^h) = n}} = \sum_{j=1}^n \underbrace{U_j}_{\substack{\text{VALEURS} \\ \text{NODALES} \\ \text{INCONNUES}}} \underbrace{\tau_j(x)}_{\substack{\text{FONCTIONS} \\ \text{DE FORME} \\ \text{DEFINIES} \\ \text{A PRIORI} \\ \in U}}$$

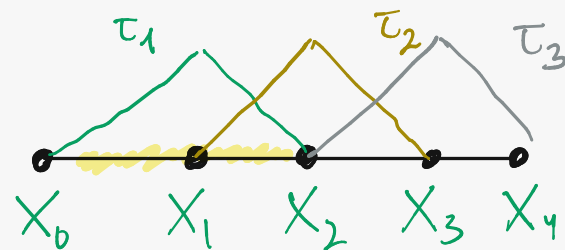


$\{\tau_j\}$ FORMENT UNE
BASE DE U^h

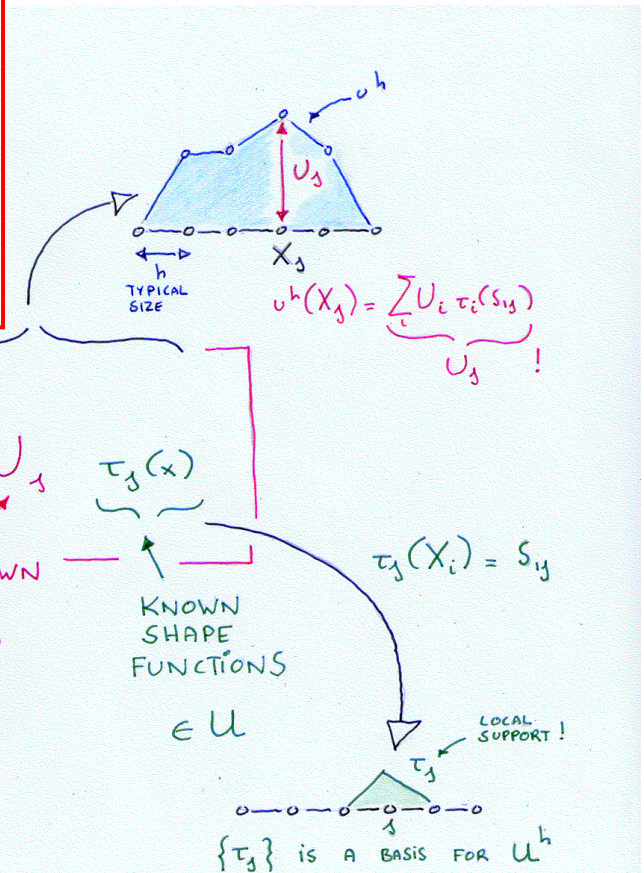
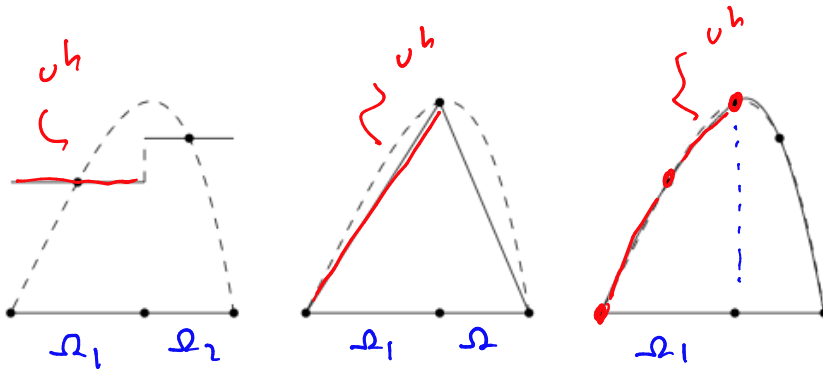
$$u_h(x) = U_1 \tau_1(x) + U_2 \tau_2(x) + U_3 \tau_3(x)$$



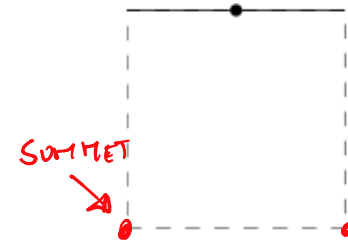
$$\tau_i(X_j) = \delta_{ij}$$



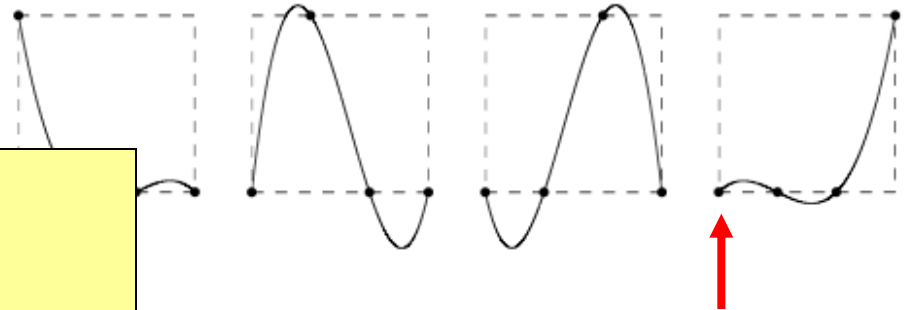
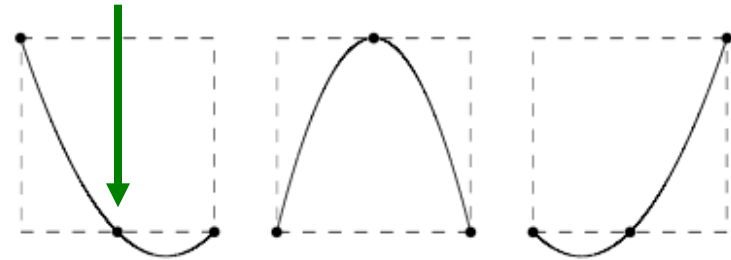
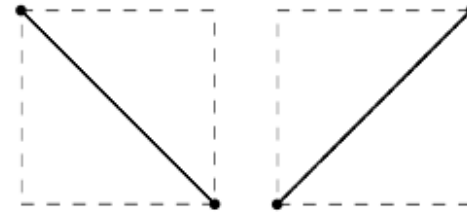
En une dimension...



Fonctions de forme unidimensionnelles de Lagrange



Ce nœud n'est pas un sommet



Nodes and other nodes :-)

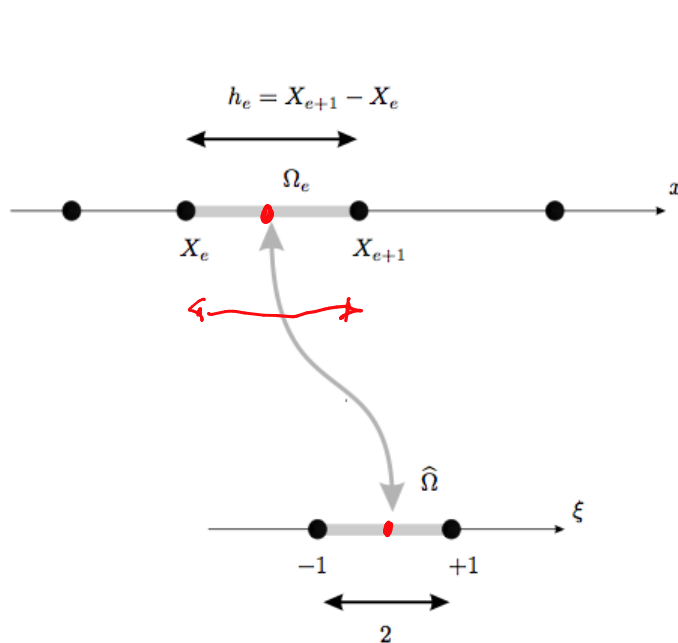
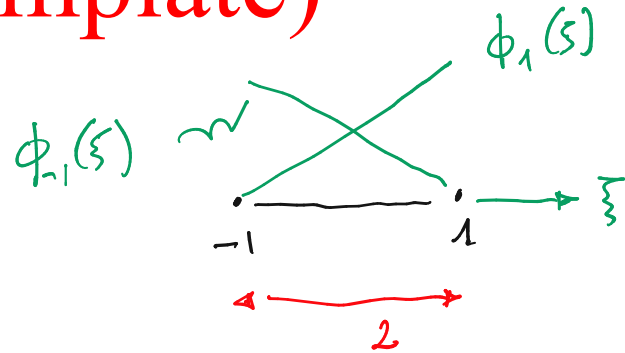
Nodes of the meshes = vertices

Location of nodal values = nodes

For linear piecewise interpolation, all nodes are vertices

Sommet

Un élément parent (template)
pour définir
les fonctions
de forme

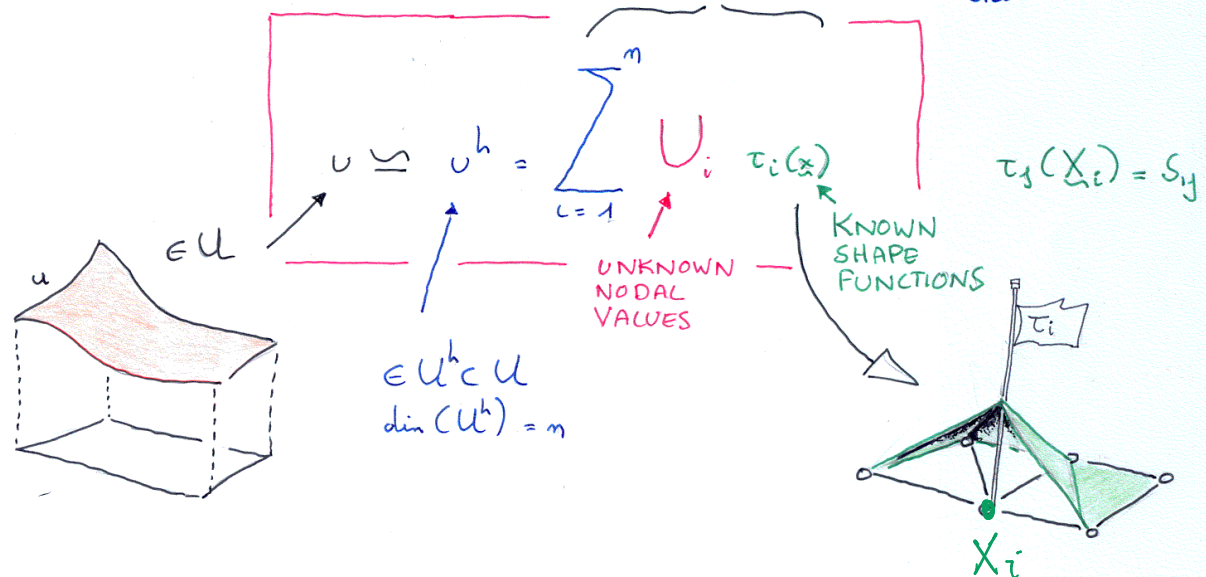
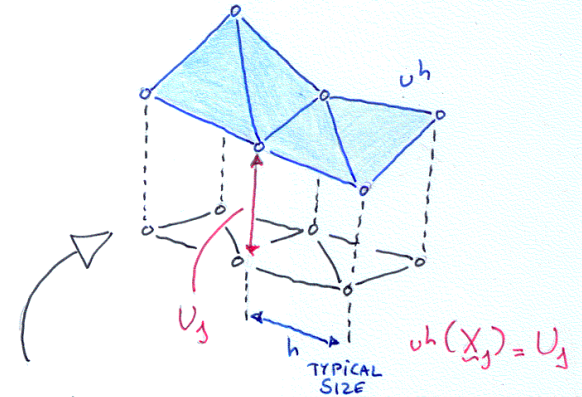
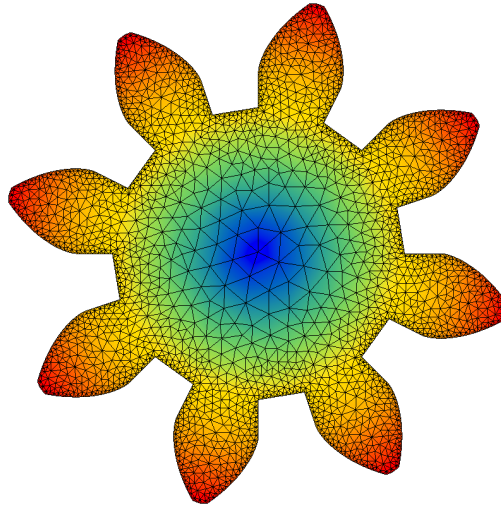


$$x(\xi) = \xi \frac{(X_{e+1} - X_e)}{2} + \frac{(X_{e+1} + X_e)}{2},$$

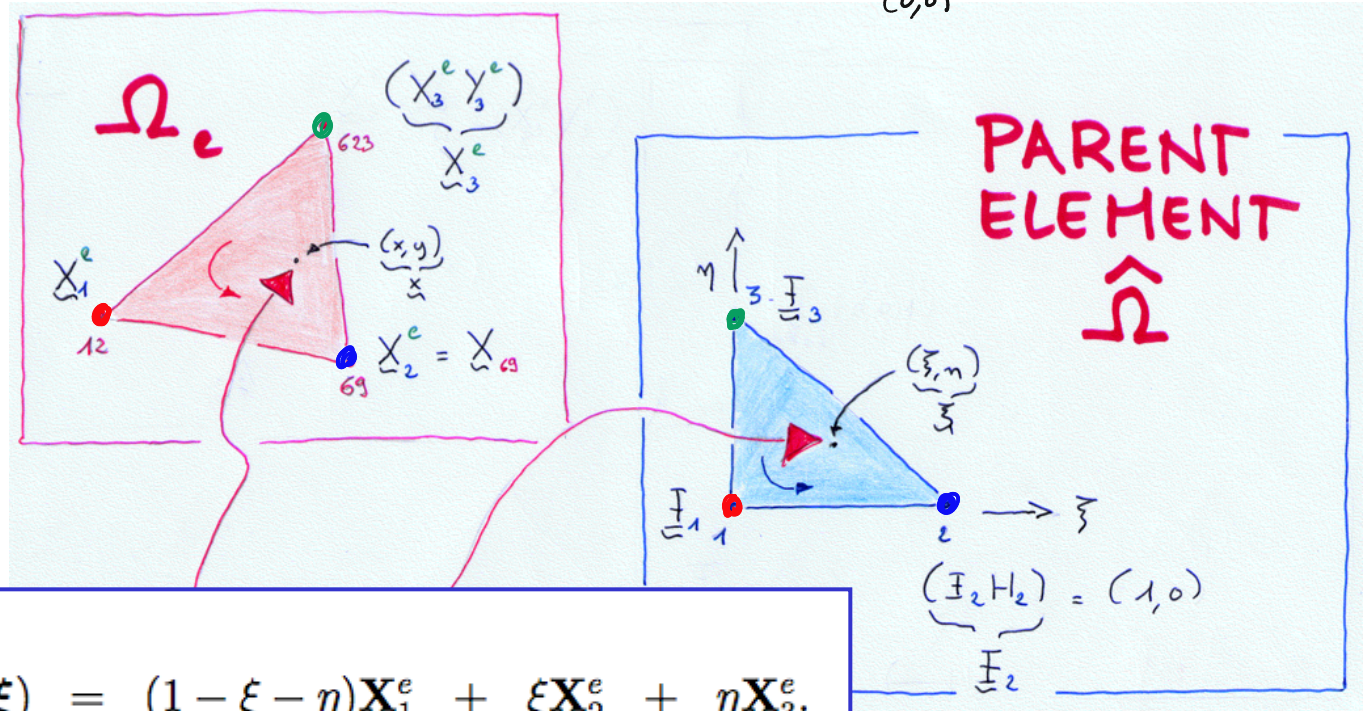
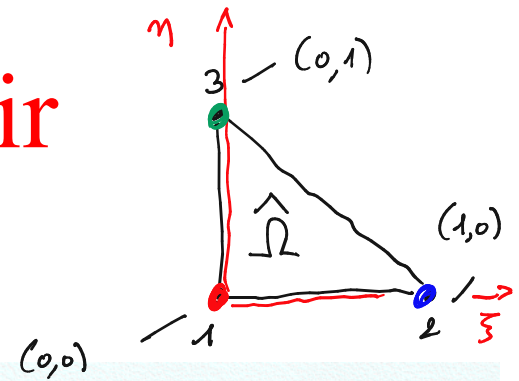
$$\xi(x) = \frac{2x - (X_{e+1} + X_e)}{(X_{e+1} - X_e)}.$$

Isomorphisme linéaire entre l'élément parent
et tous les autres éléments...

En deux dimensions



Un triangle parent pour définir toutes les fonctions de forme

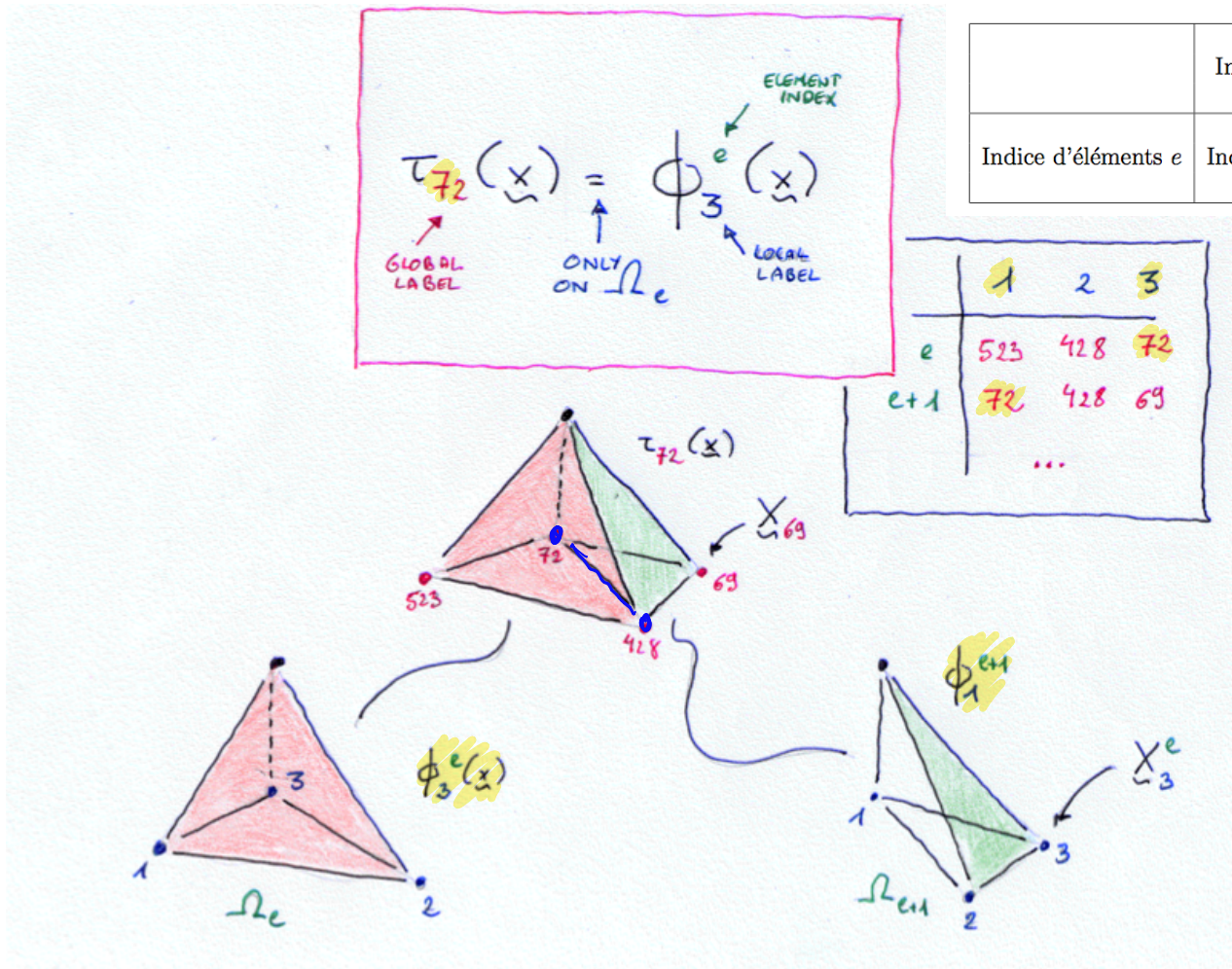


$$\mathbf{x}(\xi) = (1 - \xi - \eta)\mathbf{X}_1^e + \xi\mathbf{X}_2^e + \eta\mathbf{X}_3^e.$$

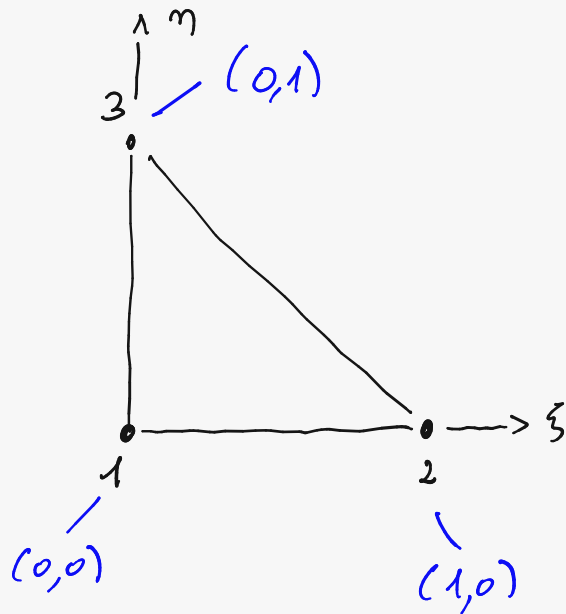
Isomorphisme linéaire entre le triangle parent et tous les autres triangles...

$$\begin{aligned} \underline{x}(1,0) &= \underline{X}_2^e \\ \underline{x}(0,1) &= \underline{X}_3^e \\ &\quad \quad \quad \underline{I}_3 \end{aligned}$$

Global shape functions...



... and
local
shape
functions

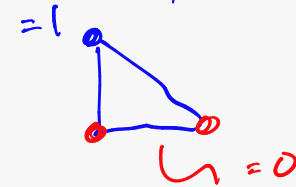
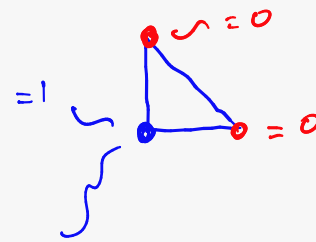
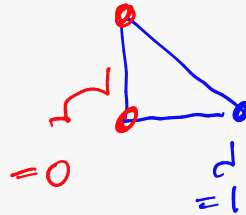


$$\sum_{i=1}^3 \phi_i(\xi, \eta) = 1$$

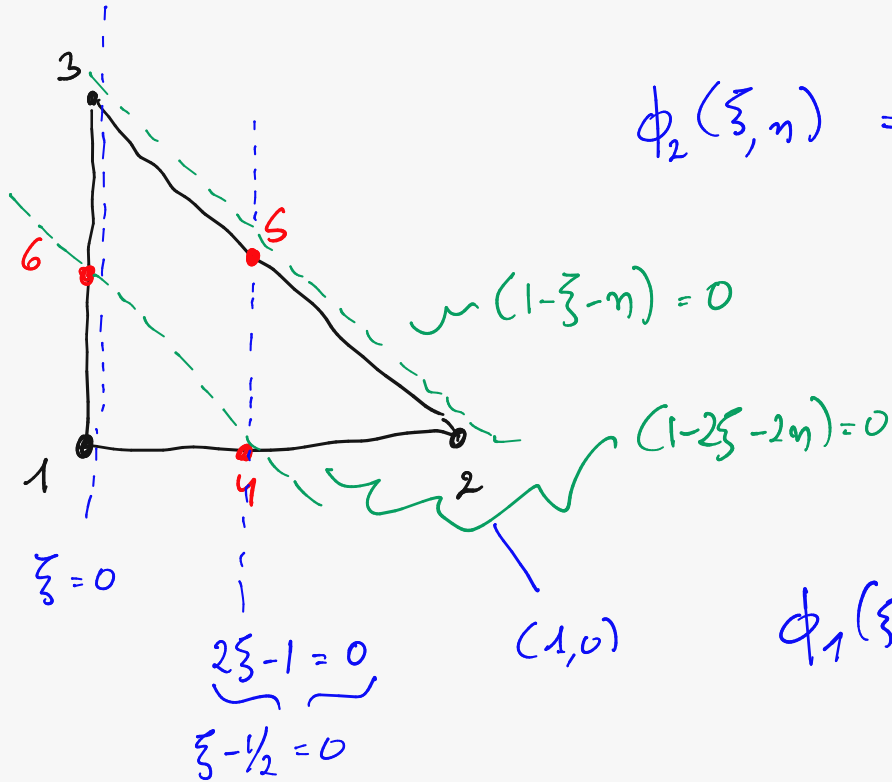
$$\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \eta$$



$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1 \quad \therefore$$



$$\phi_2(\xi, \eta) = \underbrace{\xi}_{\text{edge 1-2}} \underbrace{(2\xi-1)}_{\text{edge 3-2}} *$$

$$\phi_2(1,0) = 1(2-1) = 1 :-)$$

$$\phi_1(\xi, \eta)$$

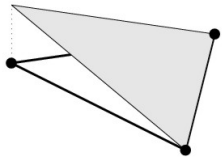
$$\phi_1(\xi, \eta) = \underbrace{(1-\xi-\eta)}_{\text{edge 1-2}} \underbrace{(1-2\xi-2\eta)}_{\text{edge 3-2}}$$

$$\begin{array}{rcl} 1-\xi-\eta & & \\ -2\xi & +2\xi^2 & +2\xi\eta \\ -2\eta & +2\eta^2 & +2\xi\eta \end{array}$$

$$= 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$$

Fonctions de forme usuelles sur le triangle parent

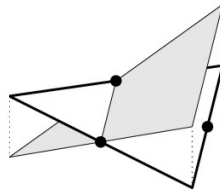
$$= 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$$



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi - \eta), \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta.\end{aligned}$$

Fonctions linéaire continue : P_1-C_0

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - 2\eta, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= -1 + 2(\xi + \eta), \\ \phi_3(\xi, \eta) &= 1 - 2\xi.\end{aligned}$$



Fonctions linéaire non-conforme : P_1-C_{-1}

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1), \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1), \\ \phi_4(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta), \\ \phi_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ \phi_6(\xi, \eta) &= 4\eta(1 - \xi - \eta).\end{aligned}$$

Fonctions quadratique continue : P_2-C_0

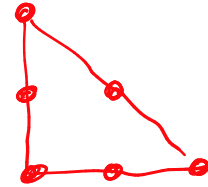
Il s'agit de fonctions polynomiales définies sur chaque élément

En fonction du choix des fonctions de base, le degré de continuité est différent...

En général, on essaie d'avoir le degré de continuité le plus élevé...

Quoique... on aura quelques surprises !

Le triangle semble optimal pour
obtenir des approximations
polynomiales complètes...



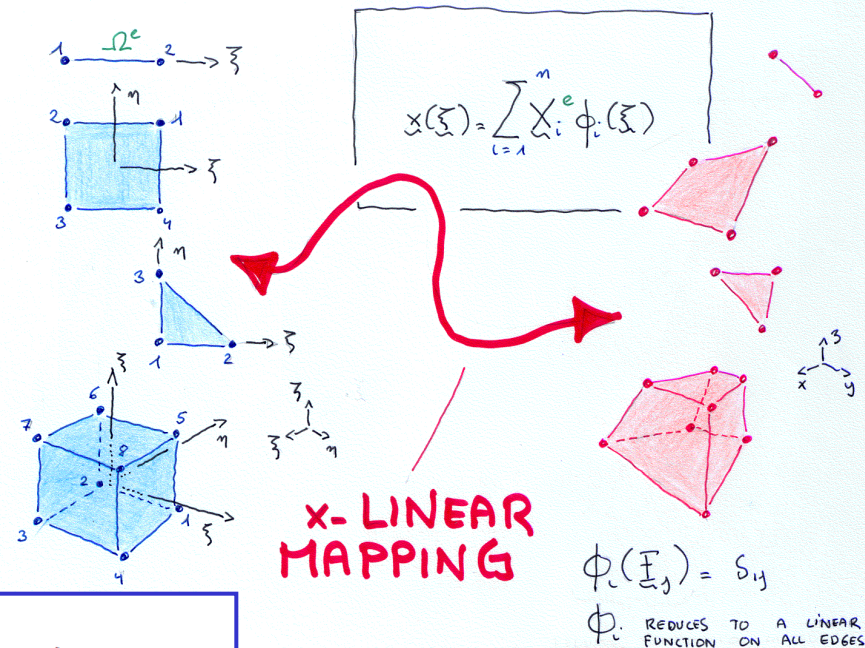
Triangle de Pascal

	1				0
	ξ		η		1
	ξ^2		$\xi\eta$	η^2	2
ξ^3		$\xi^2\eta$		$\xi\eta^2$	η^3
					3

Une des caractéristiques des éléments triangulaires est la possibilité de construire un ensemble de fonctions de forme complètes sur le triangle parent avec un nombre optimal de degrés de liberté.

... et pourtant !

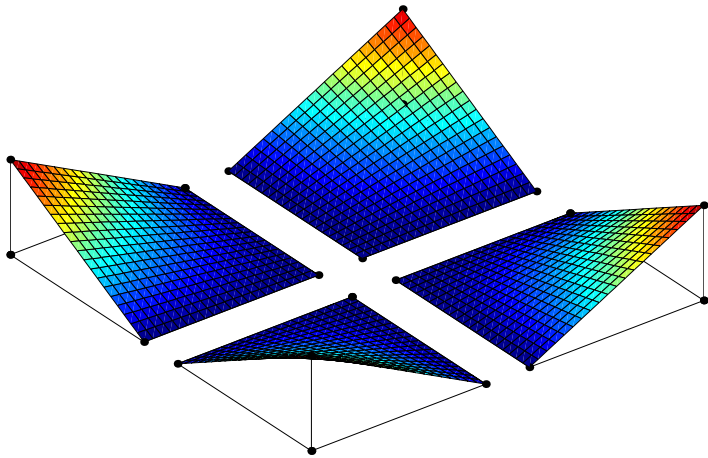
Et pourtant, on a aussi des maillages
de quadrilatères,
d'hexaèdres...



$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) = & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_1^e + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_2^e \\ & + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_3^e + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_4^e. \end{aligned}$$

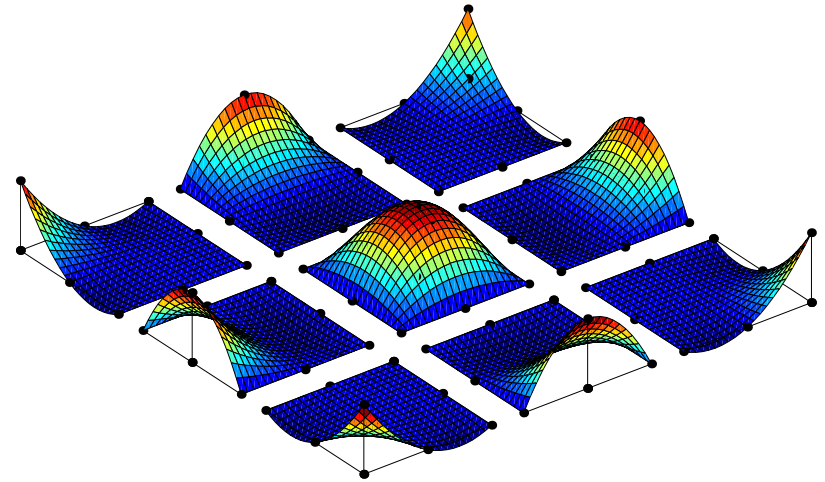
Isomorphisme bilinéaire (non linéaire donc !) entre le
carré parent et tous les autres quadrilatères

Eléments bilinéaires et biquadratiques



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4.\end{aligned}$$

Elément Q_1-C_0



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi, \eta) &= \xi(1 + \xi)\eta(1 + \eta)/4, \\ \phi_2(\xi, \eta) &= -\xi(1 - \xi)\eta(1 + \eta)/4, \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta)/4, \\ \phi_4(\xi, \eta) &= -\xi(1 + \xi)\eta(1 - \eta)/4, \\ \phi_5(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \xi)\eta(1 + \eta)/2, \\ \phi_6(\xi, \eta) &= -\xi(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)/2, \\ \phi_7(\xi, \eta) &= -(1 - \xi)(1 + \xi)\eta(1 - \eta)/2, \\ \phi_8(\xi, \eta) &= \xi(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta)/2, \\ \phi_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \eta).\end{aligned}$$

Elément Q_2-C_0

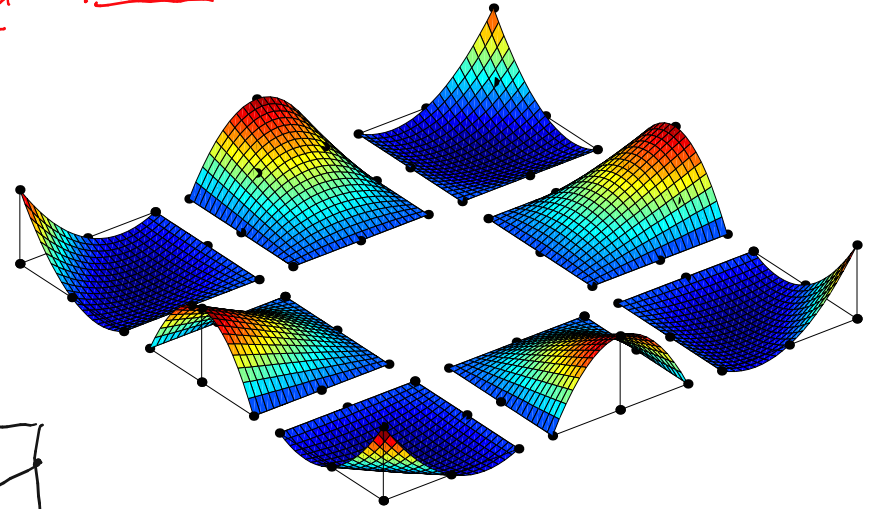
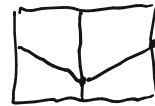
Elle sert à rien
la neuvième
fonction ?



	1		0
ξ		η	1
ξ^2	$\xi\eta$	η^2	2
$\xi^2\eta$	$\xi\eta^2$		3
	$\xi^2\eta^2$		4

Lagrange

La neuvième fonction de Q_2-C_0
génère un terme d'ordre quatre
alors qu'on n'est même pas
complet à l'ordre 3 :-)



$$\begin{aligned}
 \phi_1(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)(\eta + \xi - 1)/4, \\
 \phi_2(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)(\eta - \xi - 1)/4, \\
 \phi_3(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-\eta - \xi - 1)/4, \\
 \phi_4(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)(-\eta + \xi - 1)/4, \\
 \phi_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)/2, \\
 \phi_6(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2, \\
 \phi_7(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \xi)(1 - \eta)/2, \\
 \phi_8(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)/2.
 \end{aligned}$$

Elément de Serendip : S_2-C_0

L'erreur de l'élément de Serendip !

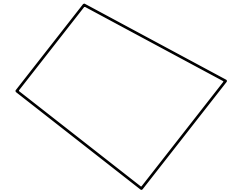
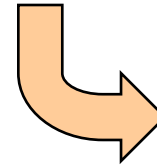
La démonstration du recteur :-)

L'élément de Serendip (8 nœuds) et celui de Lagrange (9 nœuds) sont complets à l'ordre deux sur le carré parent

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2,$$



$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) = & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_1^e + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \mathbf{X}_2^e \\ & + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_3^e + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \mathbf{X}_4^e. \end{aligned}$$



$$b_1 + b_2x(\xi, \eta) + b_3y(\xi, \eta) + b_4x(\xi, \eta)y(\xi, \eta) + b_5x^2(\xi, \eta) + b_6y^2(\xi, \eta),$$

$$c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi\eta^2 + c_8\eta\xi^2 + c_9\eta^2\xi^2.$$

L'élément de Serendip (8 nœuds) **n'est pas complet** à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.
L'élément de Lagrange (9 nœuds) est complet à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.

Trouver $u(x)$ tel que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

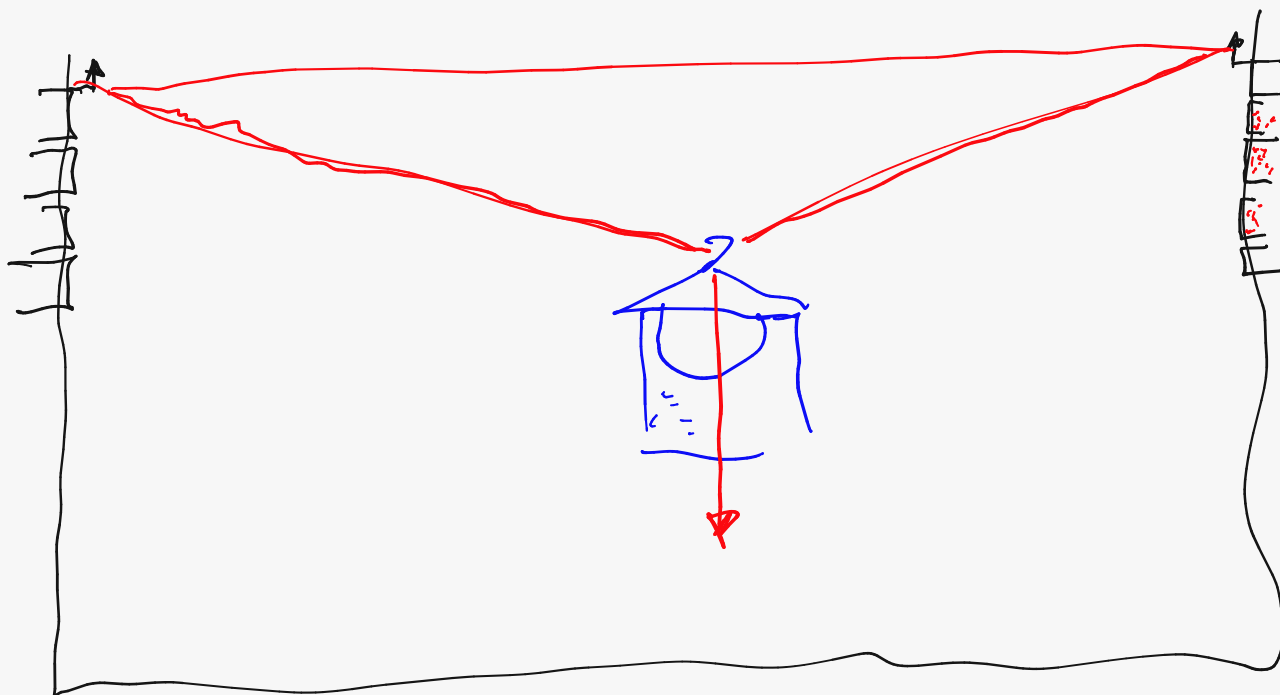
$$u(0) = 0,$$

$$u(1) = 0,$$

Effectuons
un tout petit
exemple :-)

Problème de la corde à linge tendue !





Formulation forte

Trouver $u(x)$ tel que

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

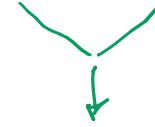
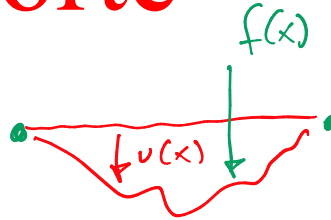
$$u(0) = 0,$$

$$u(1) = 0,$$

Plus exigeant !

Espace des solutions plus petit !

On perd des solutions réellement utiles !



Plus laxiste !!

Espace des solutions plus grand !

Les solutions en sus sont utiles !

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{\langle \frac{d\hat{u}}{dx} \frac{du}{dx} \rangle}_{a(\hat{u}, u)} = \underbrace{\langle \hat{u} f \rangle}_{b(\hat{u})}, \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},$$



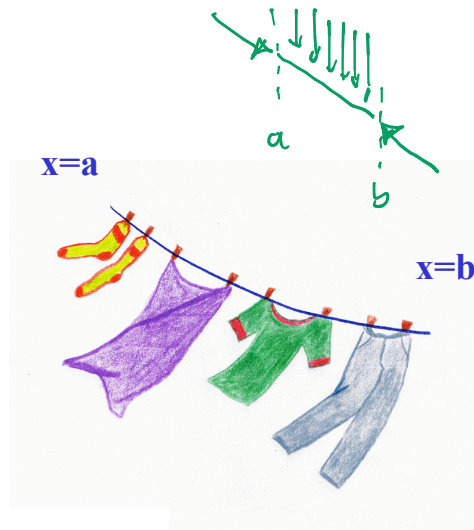
Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v, v) - b(v) \right)}_{J(v)},$$

Formulation faible

La vraie formulation physique...

C'est une formulation intégrale !



$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$\int_a^b f \, dx = T \frac{du}{dx}(a) - T \frac{du}{dx}(b) \quad \forall a, b$$

$$\int_a^b f \, dx = -T \left[\frac{du}{dx} \right]_a^b \quad \forall a, b$$

Si la fonction $\frac{du}{dx}$ est continue !

$$\int_a^b f + T \frac{d^2u}{dx^2} \, dx = 0 \quad \forall a, b$$

$$f + T \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

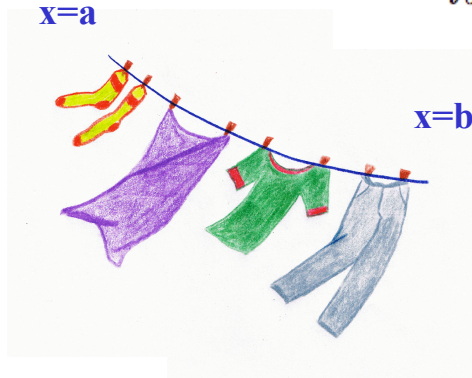
Equilibre vertical des forces

TENSION
DANS LA CORDE

La vraie formulation physique...

C'est minimiser l'énergie !

$$l = \int_0^L dl = \int_0^L \sqrt{dx^2 + du^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx \approx \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) dx$$



$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

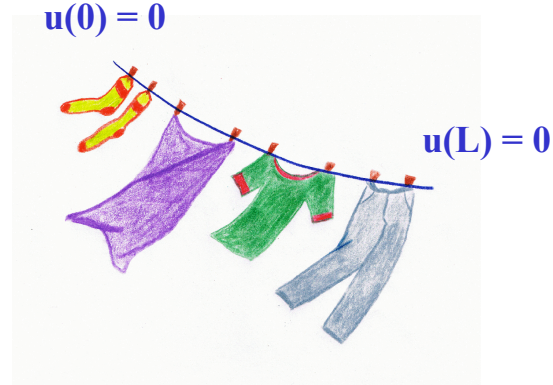
Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$J(u) = \overbrace{T(l - L)}^{\text{ALLONGE}} - \overbrace{\int_0^L f u dx}^{\text{TRAVAIL}}$$

$$\Downarrow$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^L T \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f u dx$$

Minimisation de l'énergie
On minimise le travail des forces !



Problème discret

$$\sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_j = B_i, \quad i = 2, N-1.$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 0, \\ U_N &= 0, \end{aligned}$$

**N-2 équations pour les valeurs intérieures
Deux conditions aux limites**

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \frac{d\tau_i}{dx}(x) \frac{d\tau_j}{dx}(x) dx,$$

$$B_i = \int_{\Omega} f(x) \tau_i(x) dx,$$