

Un petit mot
sur la résolution
de grands systèmes linéaires

Résoudre
un système
triangulaire
est facile...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_j = (b_j - \sum_{k=j+1}^n a_{jk}x_k) / a_{jj}$$

Backward substitution

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ & 5 & 6 \\ & & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Triangulation

$$z = 3/7$$

$$y = (2 - 6 \cdot 3/7) / 5$$

Triangularisation par élimination de Gauss

$$\begin{array}{l} L1 \rightarrow \\ L2 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L2 = L2 - 4L1$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Triangularisation par élimination de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2k}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ & & \dots & & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & & \dots & \\ & & & & & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} \quad i = k + 1, \dots, n, j = k, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} \quad i = k + 1, \dots, n,$$



Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{x}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^{(n)}}$$

Le problème discret

Trouver $U_j \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} U_j = F_i, \quad i = 1, n.$$

Matrice définie positive

Problème continu elliptique et linéaire
Méthode des éléments finis
Formulation de Galerkin

Trouver $U_j \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$J(U_j) = \min_{V_j \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} V_i A_{ij} V_j - \sum_{i=1}^n V_i F_i \right)}_{J(V_j)},$$

Aller simple vers le monde de l'algèbre linéaire...

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \right)}_{J(\mathbf{v})}$$

vecteur

vecteur

Utilisation des notations habituelles de l'algèbre linéaire

Deux grandes classes de méthodes de résolution

Solveurs directs (Elimination gaussienne)

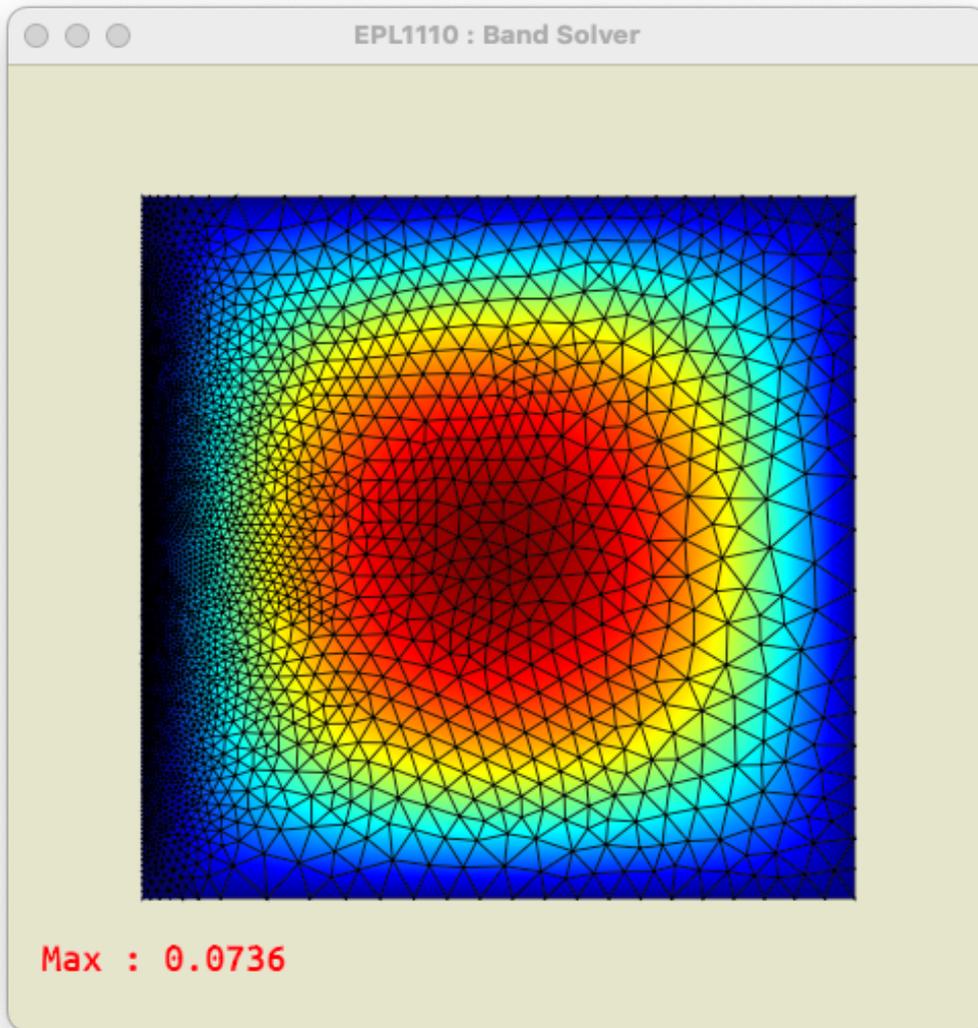
Solveur de Gauss
Solveur de Gauss bande
Solveur de Gauss « skyline »
Solveur de Gauss frontal
Solveur de Gauss « Nested dissection »

Solveurs itératifs

Méthode de la plus grande pente
Méthode des gradients conjugués
Méthode de GMRES

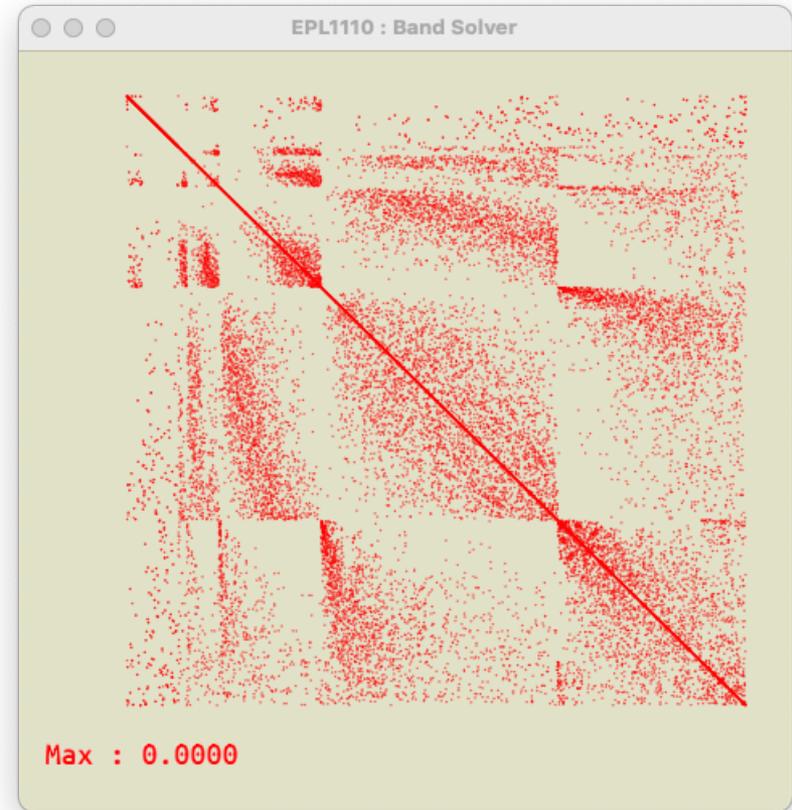
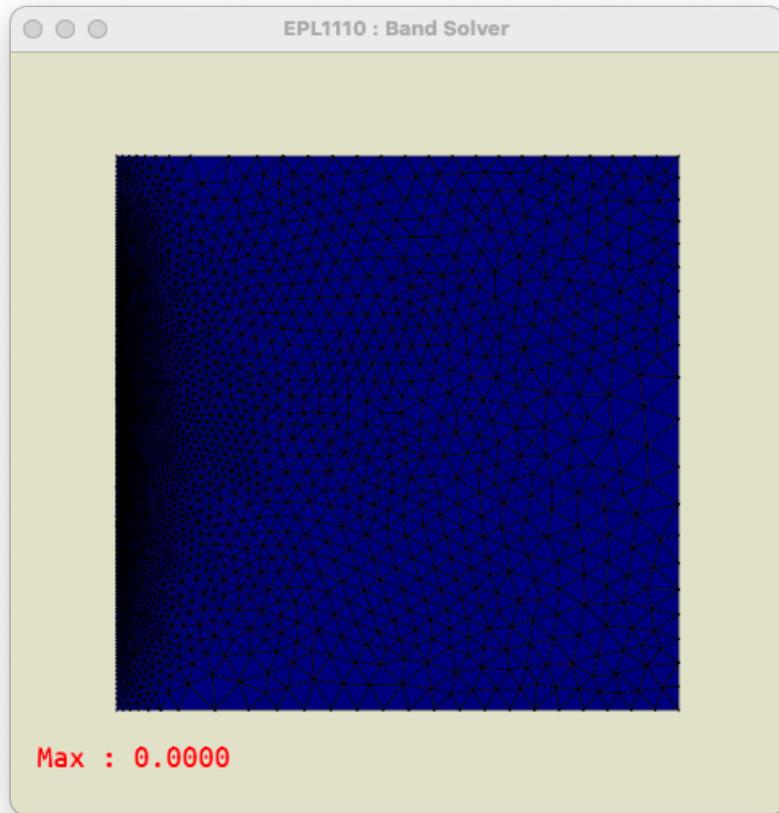
Les méthodes de la plus grande pente et des gradients conjugués ne sont utilisables que pour une matrice définie positive



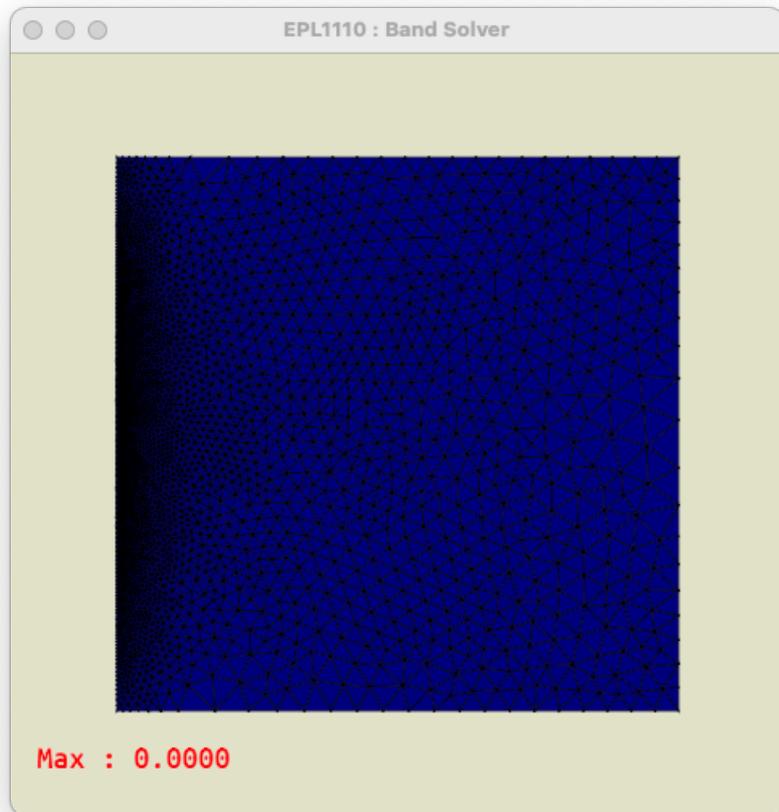


Revenons
à notre
problème:-)

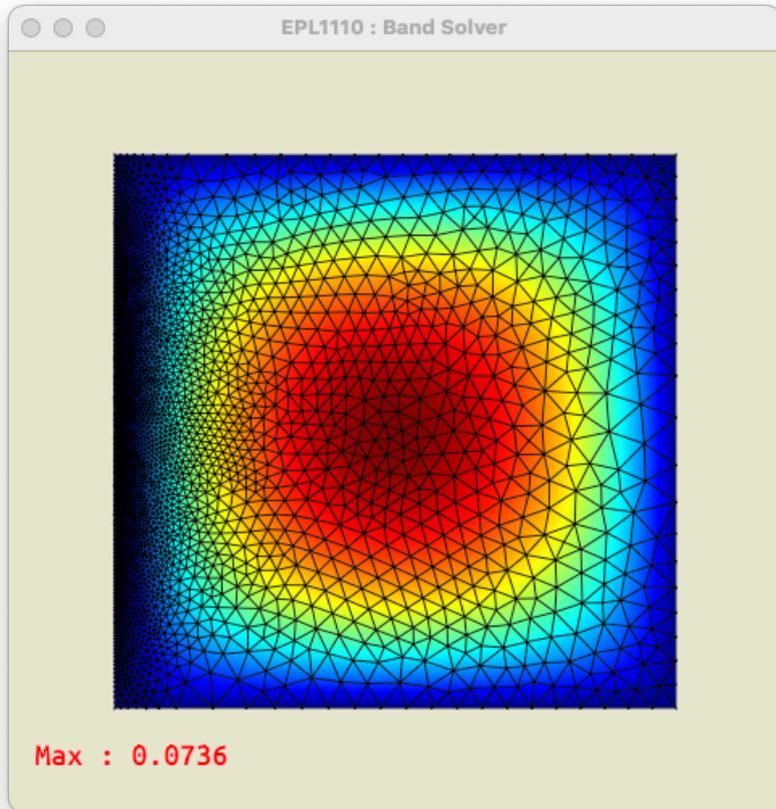
$$\begin{aligned} \Delta^2 u + 1 &= 0 && \text{sur } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$



Après l'assemblage :-)

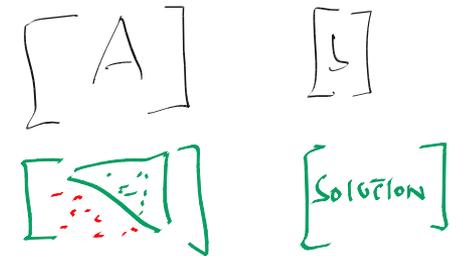


Après les conditions frontières :-)



Après résolution :-)

C'est facile à implémenter...



Elimination effectuée « en place »

Ok, si tous les pivots sont non-nuls pendant les processus

```
double *matrixSolve(double **A, double *B, int size)
{
    int i,j,k;

    /* Gauss elimination */
    for (k=0; k < size; k++) {
        if ( A[k][k] == 0 ) Error("zero pivot");
        for (i = k+1 ; i < size; i++) {
            factor = A[i][k] / A[k][k];
            for (j = k+1 ; j < size; j++)
                A[i][j] = A[i][j] - A[k][j] * factor;
            B[i] = B[i] - B[k] * factor; }

    /* Back-substitution */
    for (i = (size)-1; i >= 0 ; i--) {
        factor = 0;
        for (j = i+1 ; j < size; j++)
            factor += A[i][j] * B[j];
        B[i] = ( B[i] - factor)/A[i][i]; }
    return(B);
}
```

Oui, si la
matrice est définie positive

Coût calcul : $O(n^3)$

Résolution par factorisation LU

Factorisation de A en LU (*effectuée par élimination gaussienne*)
Résolution de $Lz = b$ par substitution directe
Résolution de $Ux = z$ par substitution arrière

$$LUx = b$$

$$Ux = z$$

$$Lz = b$$

$$l_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad i = k + 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$$

$$l_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

Même coût qu'une élimination gaussienne,

Il suffit juste de conserver L

Très utile, si on souhaite traiter plusieurs cas de charges !

Mais plus gourmand en mémoire : facteur critique..

Matrice symétrique définie-positive : Méthode de Cholesky

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$b_{i1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}} \quad i = 2, \dots, n$$

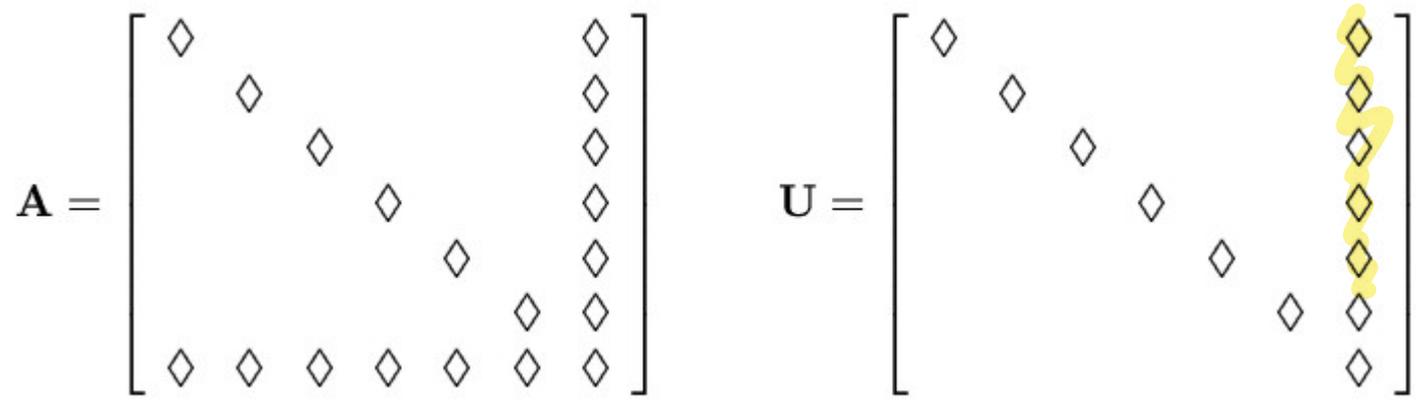
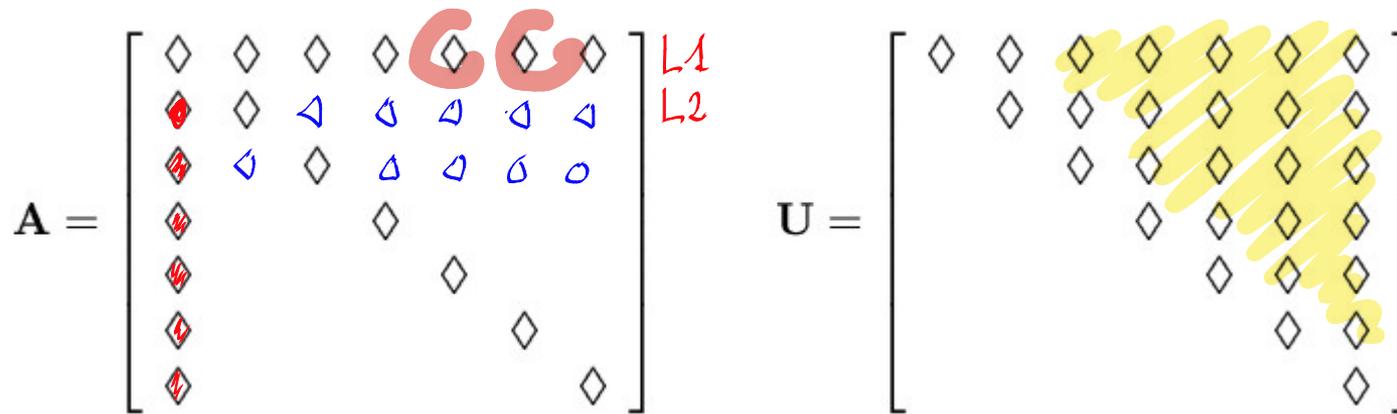
$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2} \quad j = 2, \dots, n$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}b_{jk}}{b_{jj}} \quad j = 2, \dots, n, i = j + 1, \dots, n$$

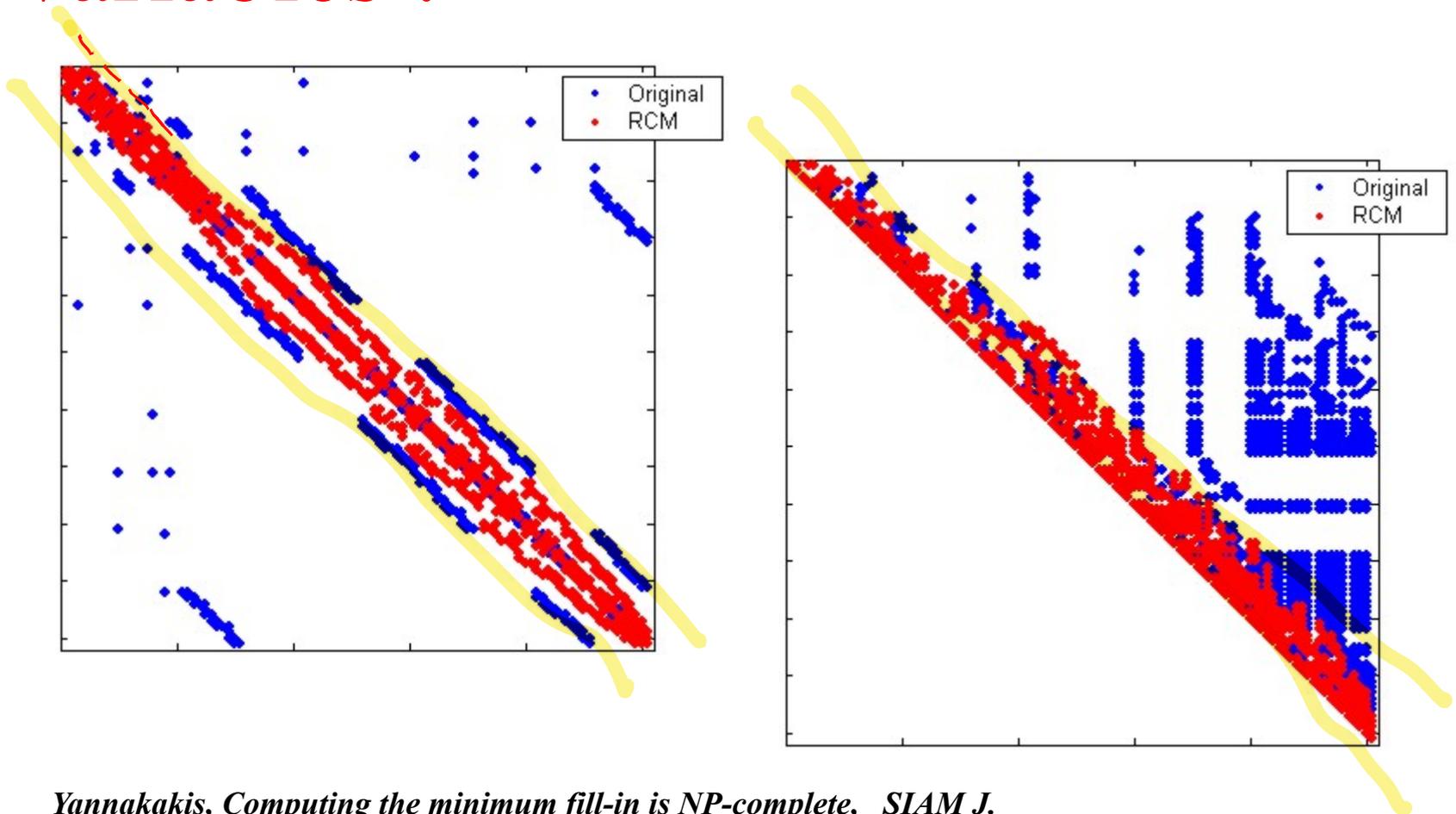
$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

Plus intéressante que l'élimination gaussienne en termes d'opération,
Mais valable que pour des matrices symétriques définies positives

Factorisation de matrices creuses : Problème du *fill-in*

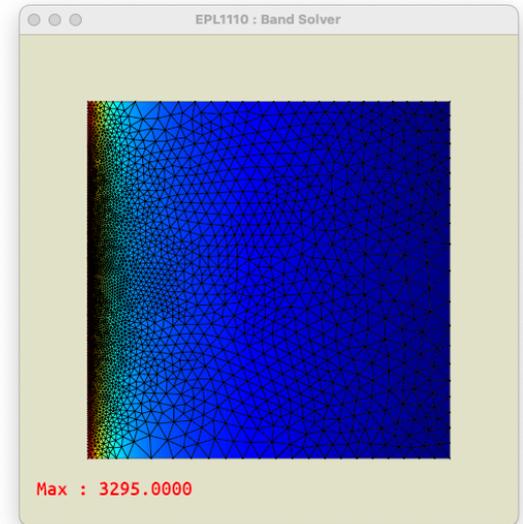
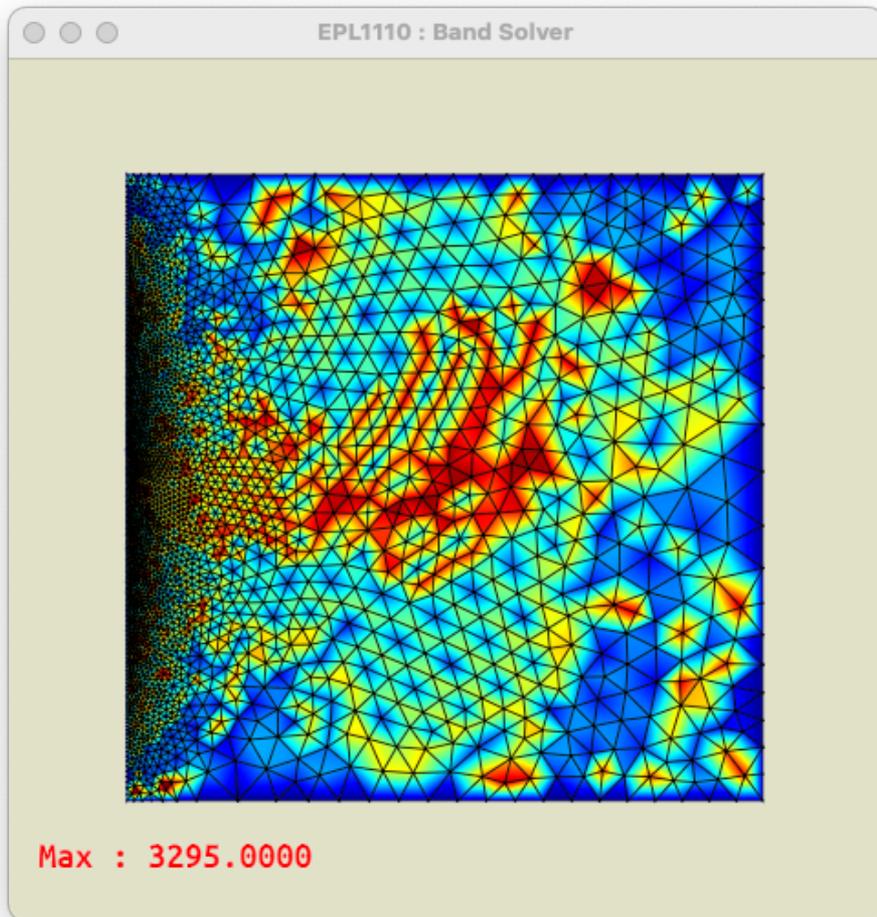


Fill-in et renumérotation des variables !



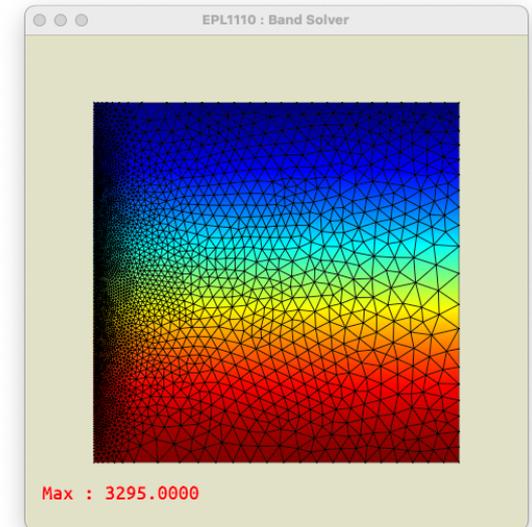
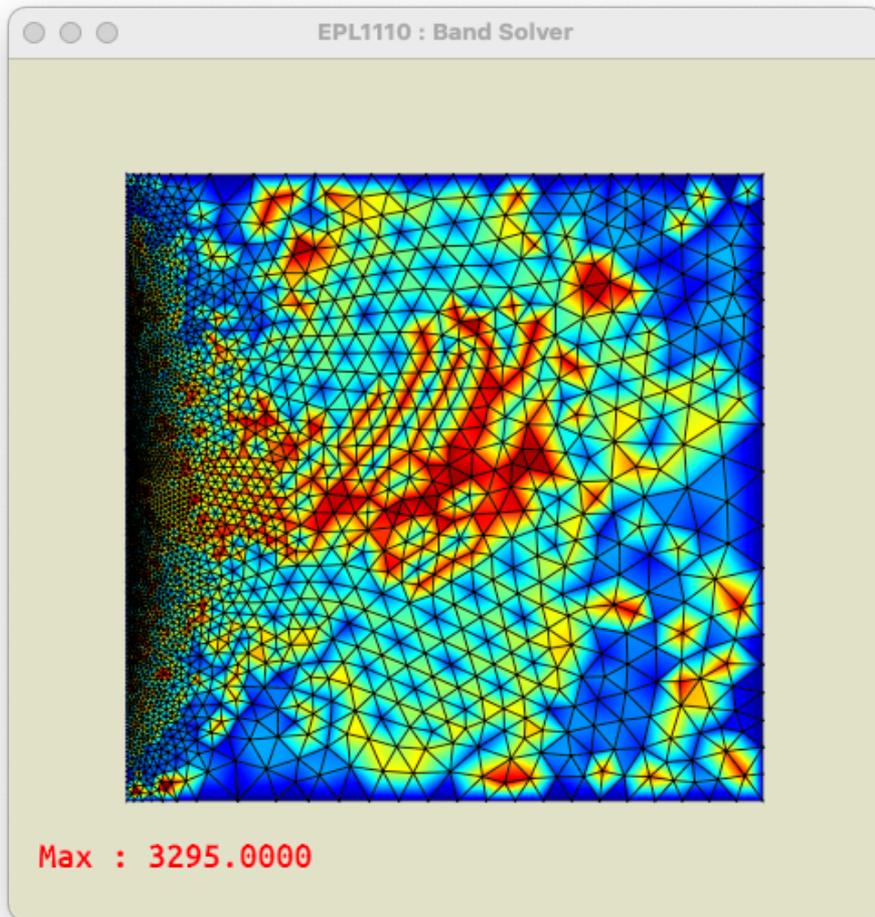
Yannakakis, Computing the minimum fill-in is NP-complete, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, Vol. 2, 1981, 77-79.

En modifiant la numérotation des noeuds...

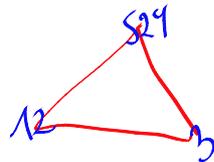
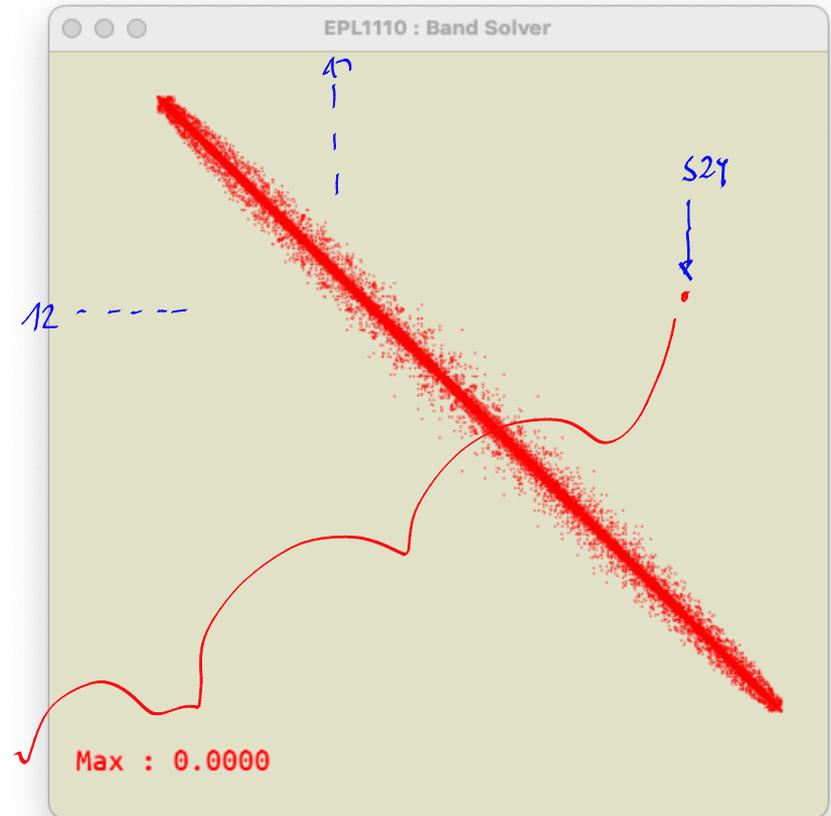
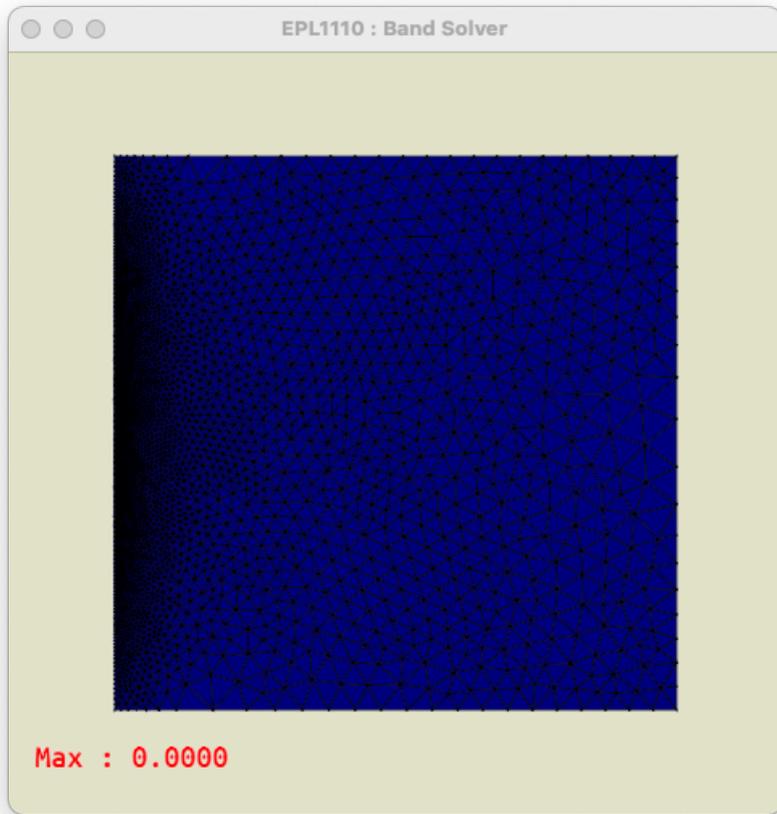


BandSize Gaussian	
Matrix size	: 3296
Matrix band	: 610
Bytes required	: 16110848
Full Gaussian elimination	
Matrix size	: 3296
Bytes required	: 86935296

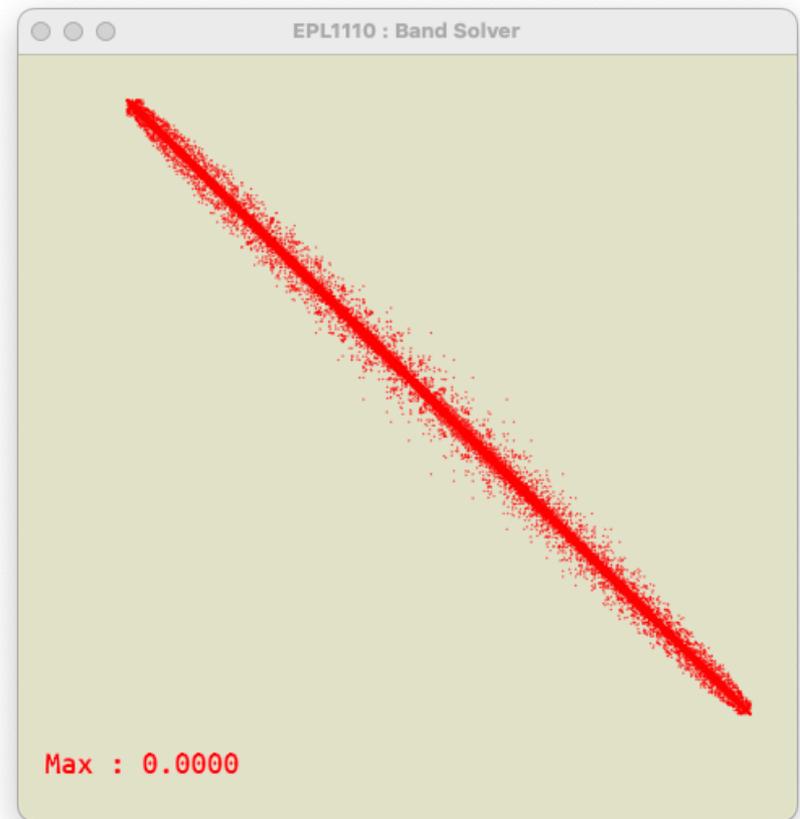
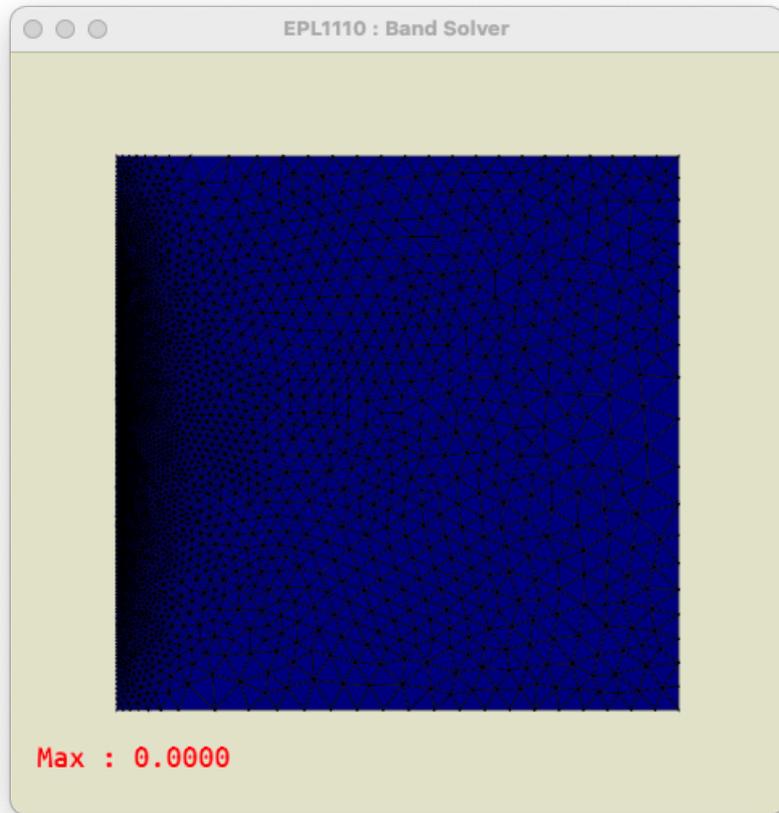
En modifiant la numérotation des noeuds...



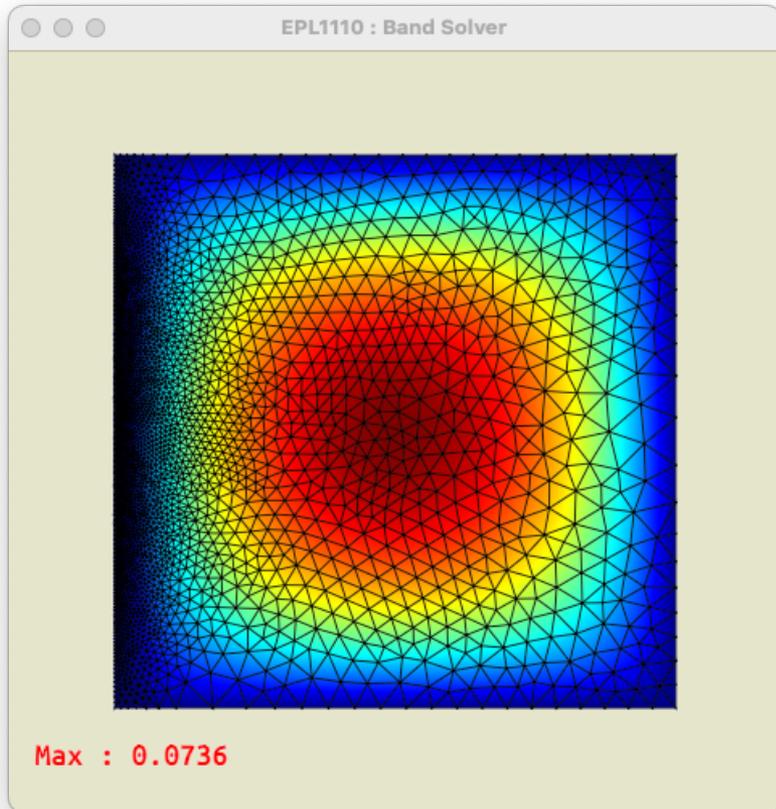
BandSize Gaussian	
Matrix size	: 3296
Matrix band	: 402
Bytes required	: 10626304
Full Gaussian elimination	
Matrix size	: 3296
Bytes required	: 86935296



Après l'assemblage :-)



Après les conditions frontières :-)



Après résolution :-)

Quel est le vrai facteur critique pour des simulations de grande taille ?

Précision du résultat

Faut-il pivoter ?

Comment minimiser la propagation des erreurs d'arrondis ?

Simple ou double précision ?

Matrices sym. déf. pos. : il n'est pas requis de pivoter !

Aujourd'hui



Espace mémoire requis

Stockage de U ou LU

Calcul en simple ou en double précision ?

Stockage en simple ou en double précision ?

Hier

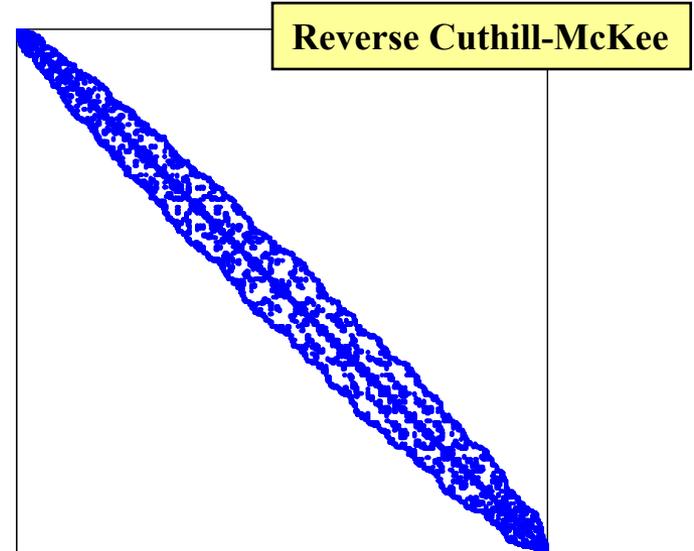
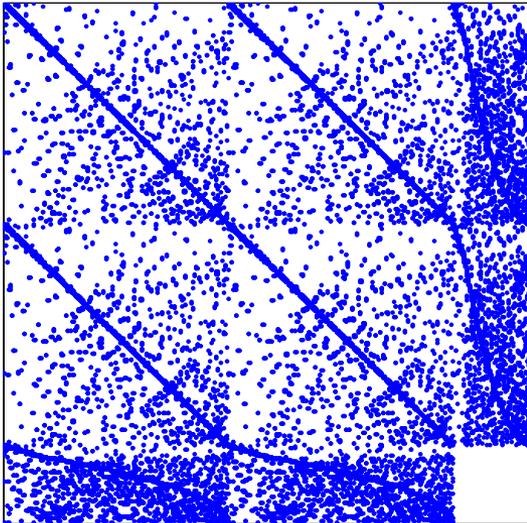


Temps de calcul « cpu »

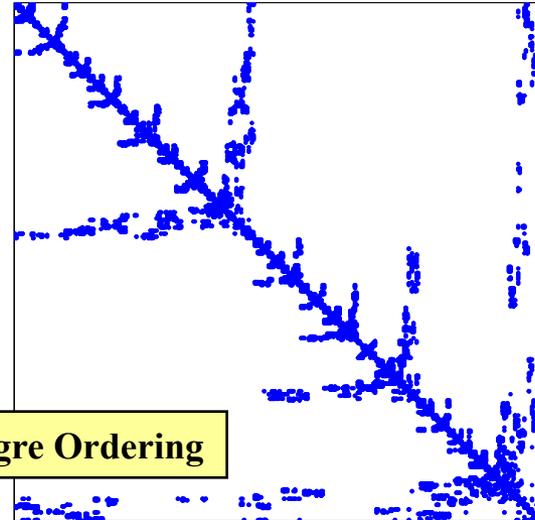
Heuristiques de rénumérotation

Utilisation des outils BLAS et LAPACK

Heuristiques de renumérotation



Mimimum Degre Ordering

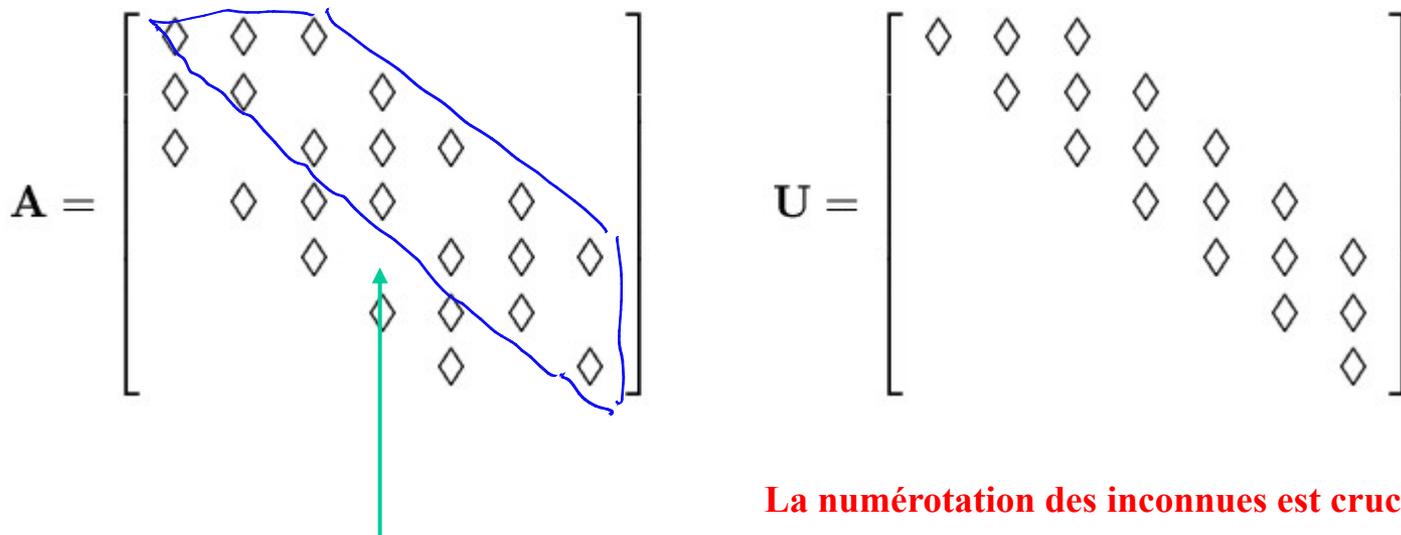


Solveur de Gauss pour matrices bandes

$$\beta(A_{ij}) - 1 = \max_{ij} \{|i - j|, \forall (i, j) \text{ tels que } A_{ij} \neq 0\}.$$

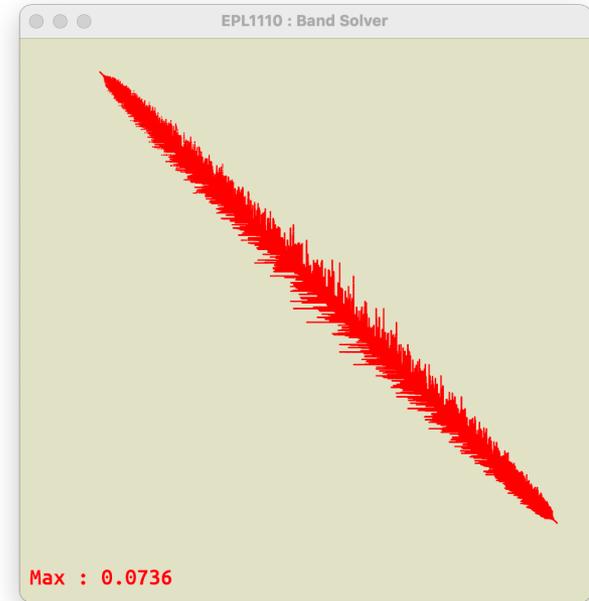
Coût calcul : $O(n\beta^2)$

Concept de largeur de bande



La numérotation des inconnues est cruciale

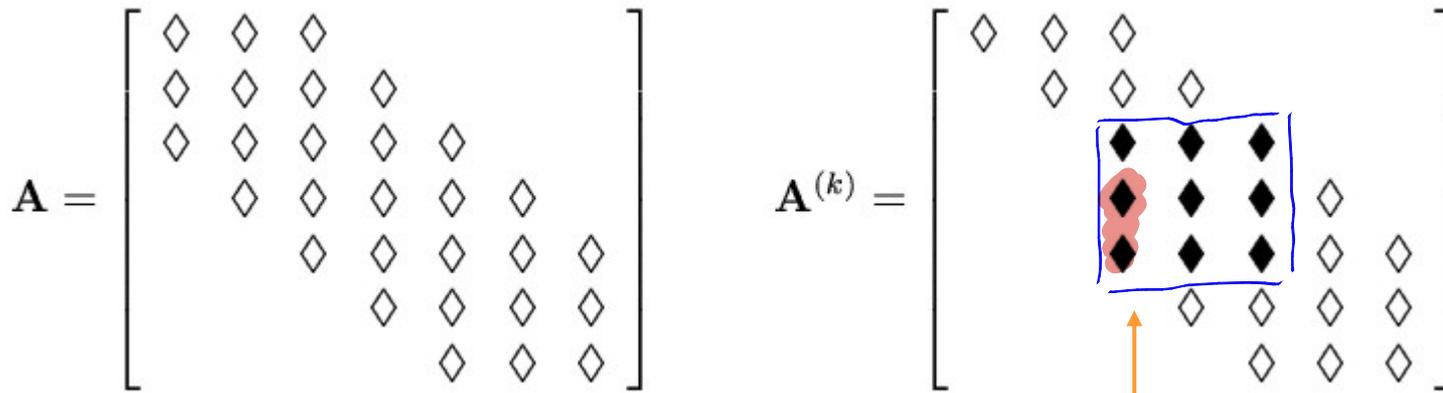
Zéro logique traité comme un zéro numérique



```
femBandSystem *femBandSystemCreate(int size,int band);  
void femBandSystemInit(Band *myBand);  
void femBandSystemPrint(Band *myBand);  
void femBandSystemPrintInfos(Band *myBand);  
void femBandSystemConstrain(Band *myBand,int myNode,double myValue);  
void femBandSystemdEliminate(Band *myBand);  
void femBandSystemAssemble(Band *myBand,double *A,double *B,int *row,int *col,int n);
```

Homework 5 :
un solveur creux bande !

Solveur de Gauss frontal



Coût calcul : $O(n\beta^2)$

Matrice active stockée sur la mémoire à accès rapide

Le reste est stocké sur la mémoire secondaire

La méthode frontale est cependant plus générale et peut s'appliquer à une matrice non-bande !
On effectue l'élimination et l'assemblage de manière simultanée :
ce sera la numérotation des éléments qui sera critique !

Solveur de Gauss frontal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \diamond & & & & & & & & \\ \diamond & \diamond & & & & & & & \\ \diamond & \diamond & \diamond & & & & & & \\ & \diamond & \diamond & \diamond & & & & & \\ & & \diamond & \diamond & \diamond & & & & \\ & & & \diamond & \diamond & \diamond & & & \\ & & & & \diamond & \diamond & \diamond & & \\ & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \\ & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond \end{bmatrix}$$

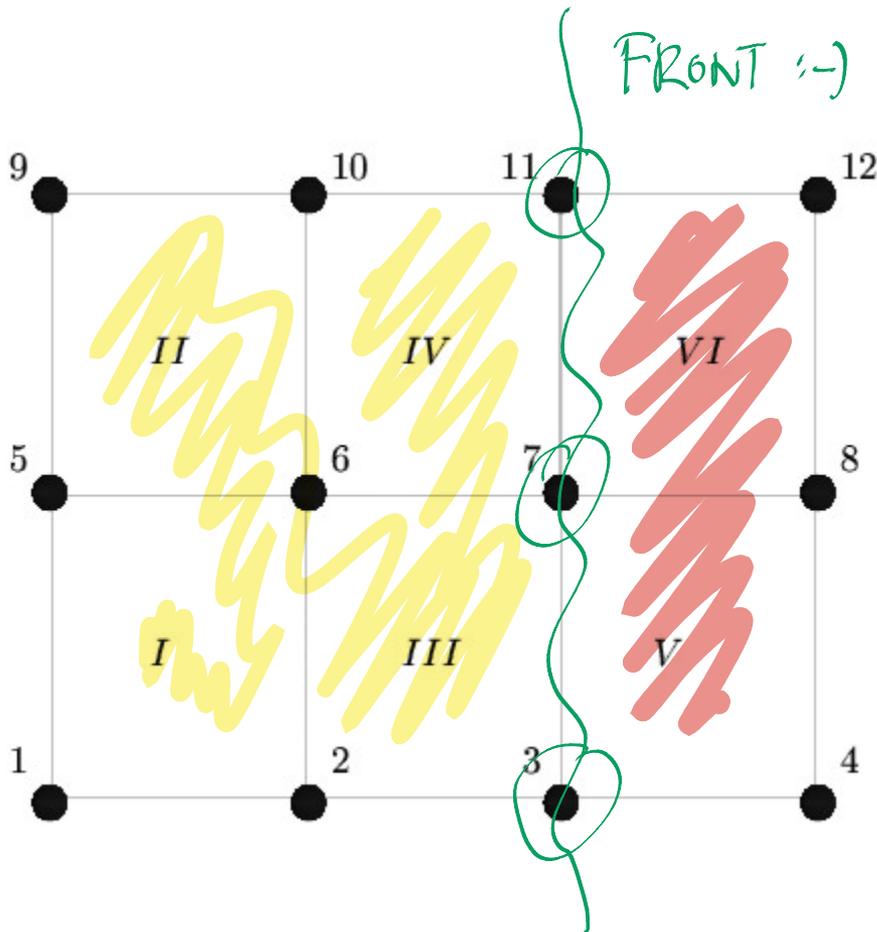
$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \diamond & & & & & & & & \\ & \diamond & & & & & & & \\ & & \diamond & & & & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & \\ & & & \diamond & \diamond & \diamond & & & \\ & & & & \diamond & \diamond & \diamond & & \\ & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \\ & & & & & & \diamond & \diamond & \diamond \end{bmatrix}$$

L1
L2 = L2 + αL1
L3 = L3 + βL1

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \diamond & & & & & & & & \\ & \diamond & & & & & & & \\ & & \diamond & & & & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & & \\ & & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & & \\ & & & \diamond & \diamond & \diamond & & & \\ & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & & \\ & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond & \\ & & & & & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{bmatrix}$$

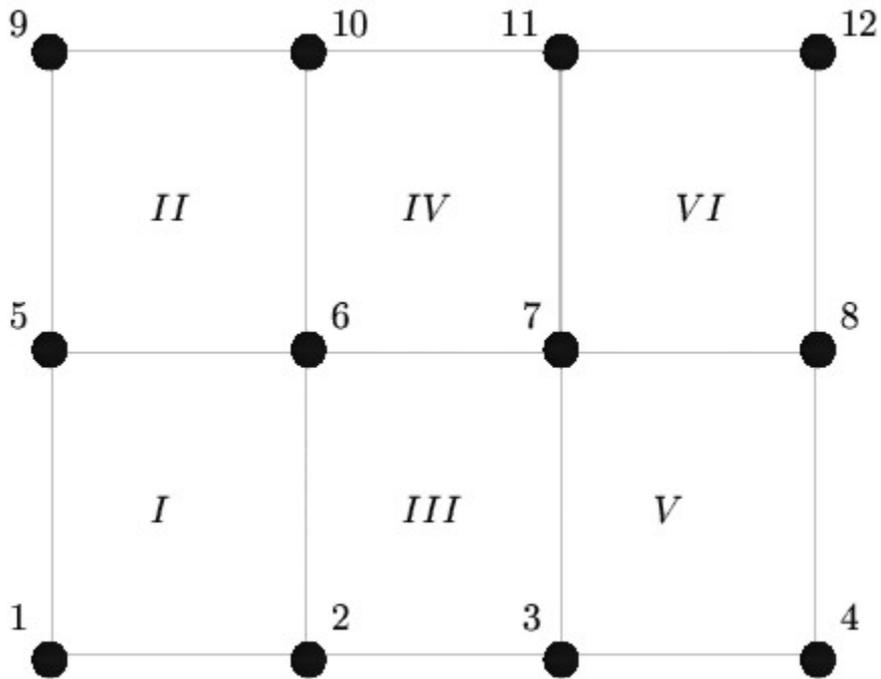
Exemple

Seule, la numérotation des éléments est cruciale !

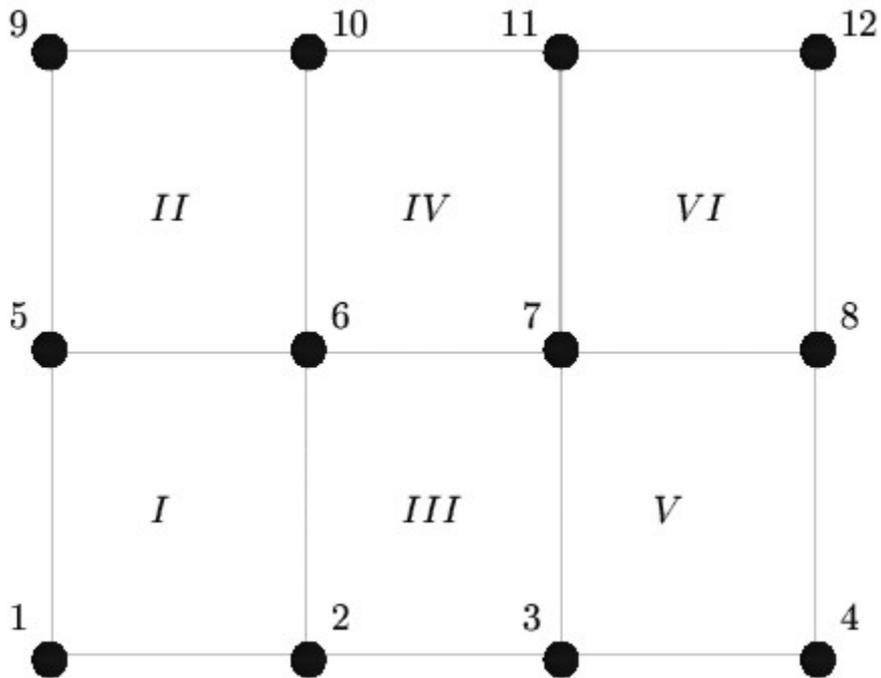


Elément	Sommets			
1	1	2	6	5
2	5	6	10	9
3	2	3	7	6
4	11	10	6	7
5	3	4	8	7
6	7	8	12	11

L'assemblage est un processus séquentiel

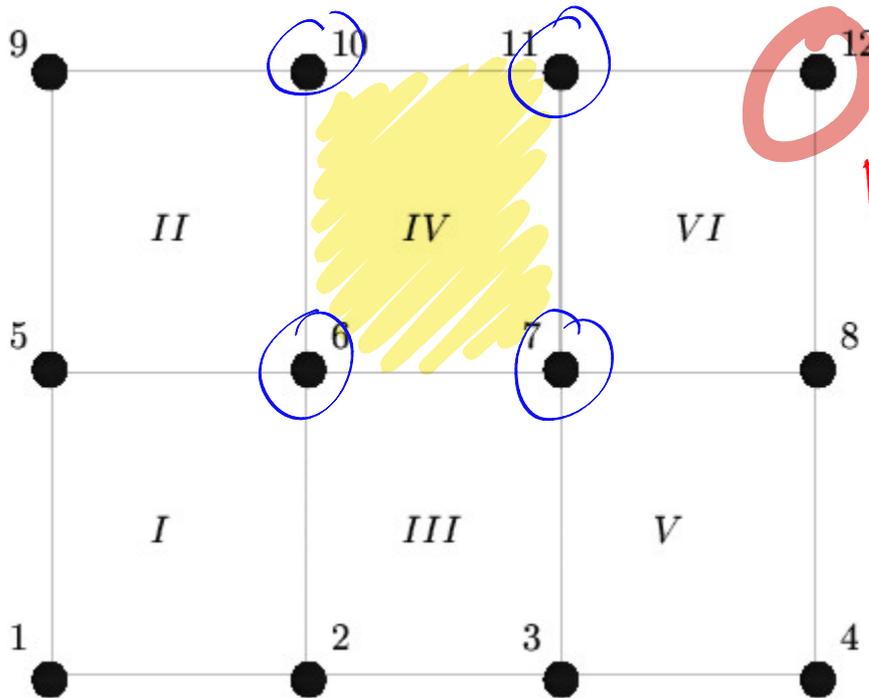


Chaque élément
est une heure !



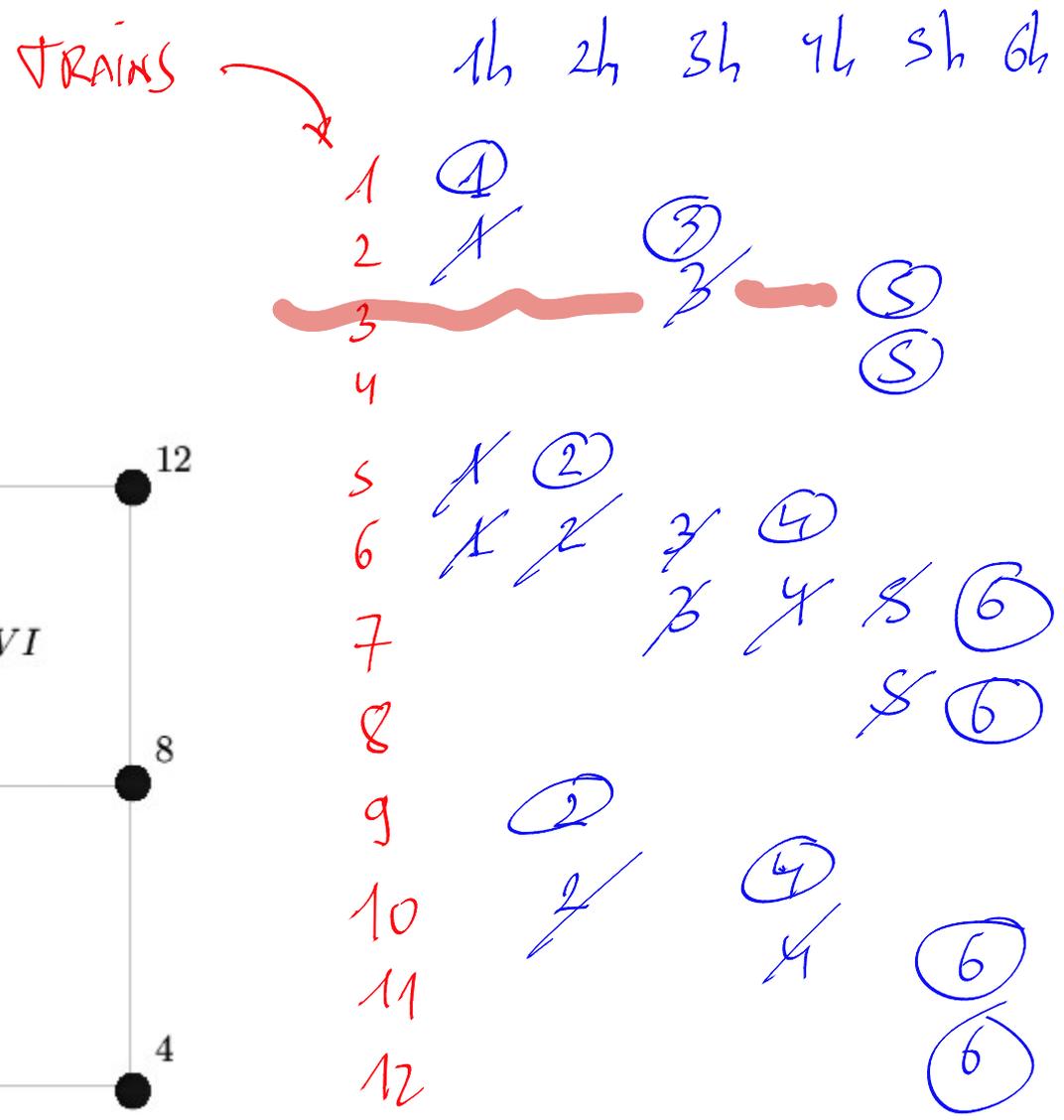
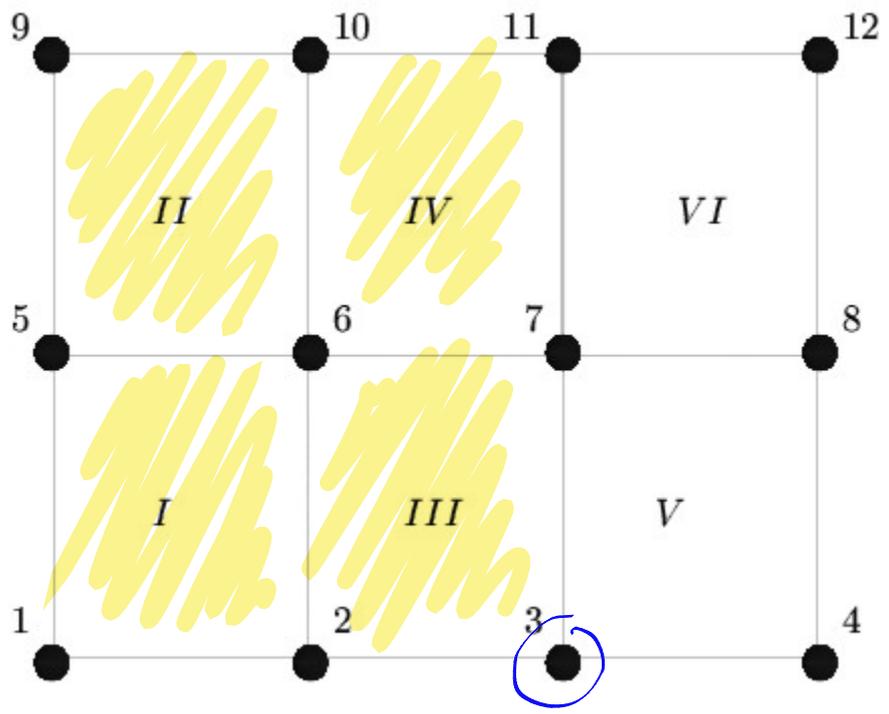
ELEMENT 1 = 13h 1h
ELEMENT 2 = 14h 2h
ELEMENT 3 = 15h 3h
4 = 16h 4h
5 = 17h 5h
6 = 18h 6h

Chaque nœud
est un train !

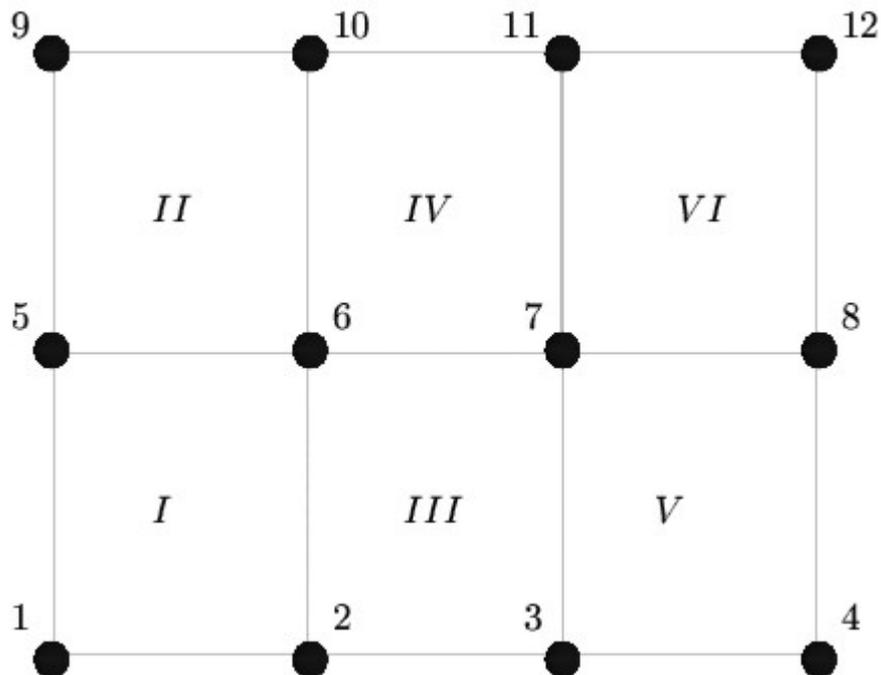


LES
NOEUDS
SONT LES TRAINS

Le train est passé !

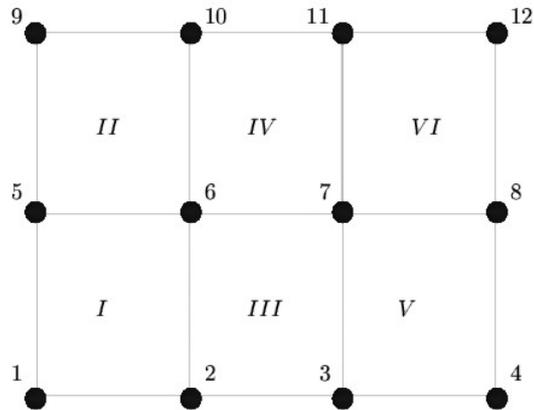


Heure ou élément
où le train est passé !



Élément	Sommets			
1	1	2	6	5
2	5	6	10	9
3	2	3	7	6
4	11	10	6	7
5	3	4	8	7
6	7	8	12	11

Calcul de l'élément de disparition

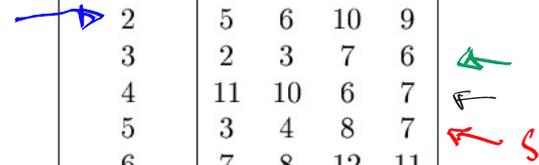


Sommet	Elément de disparition					
1	1					
2	3					
3	5					
4	5					
5	2					
6	4					
7	6					
8	6					
9	2					
10	4					
11	6					
12	6					

Attribuer une voie libre à un train !

	1	2	3	4	5	6
1	1	10	10	10	4	12
2	2	2	2	11	11	11
3	6	6	6	6	8	8
4	5	5	3	3	3	
5	9	7	7	7	7	7

Elément	Sommets				
1	1	2	6	5	
2	5	6	10	9	
3	2	3	7	6	
4	11	10	6	7	
5	3	4	8	7	
6	7	8	12	11	



Sommet	Elément de disparition					
1	1					
2	1	3				
3		3			5	
4					5	
5	1	2				
6	1	2	3	4		
7			3	4	5	6
8					5	6
9		2				
10		2		4		
11				4		6
12						6

Attribuer une voie libre à un train !

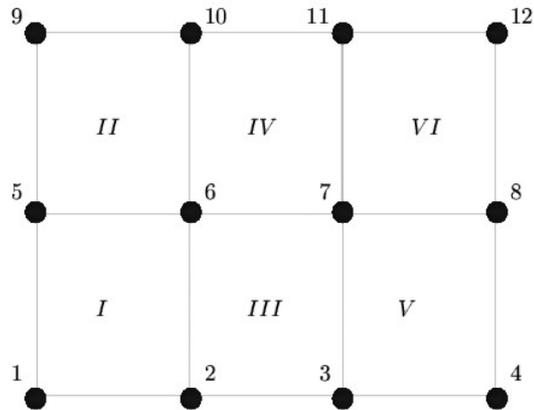


		Occupation de la matrice active lors de l'assemblage des éléments					
Elément		1	2	3	4	5	6
Destination							
1		1	10	10	10	4	12
2		2	2	2	11	11	11
3		6	6	6	6	8	8
4		5	5	3	3	3	
5			9	7	7	7	7
6							



**Calcul de la taille requise pour la matrice active
Comment dimensionner la jonction Nord-Midi ?**

Factorisation symbolique



		Occupation de la matrice active lors de l'assemblage des éléments					
Elément		1	2	3	4	5	6
Destination							
1		1	10	10	10	4	12
2		2	2	2	11	11	11
3		6	6	6	6	8	8
4		5	5	3	3	3	
5			9	7	7	7	7
6							

➡ Calcul de la taille requise pour la matrice active

Méthodes itératives

Matrice définie positive

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \right)}_{J(\mathbf{v})}$$

Soit \mathbf{x}^0 une approximation initiale de la solution exacte \mathbf{x} de (7.4),

il s'agit alors de construire une série d'approximations $\mathbf{x}^i \rightarrow \mathbf{x}$
de la manière suivante

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$$

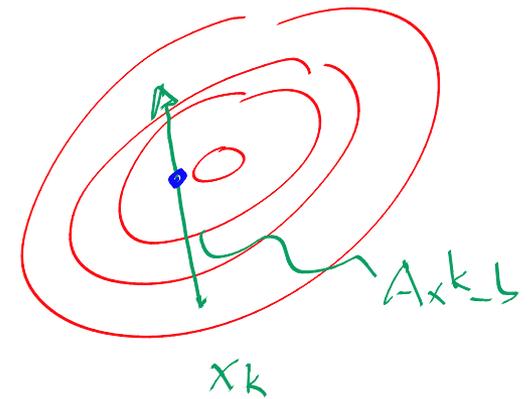
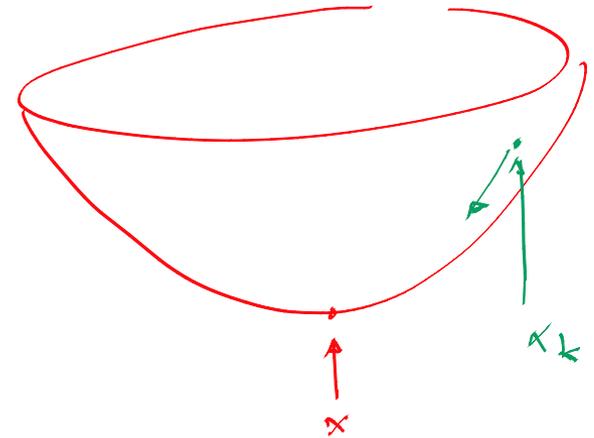
Méthode du gradient

(méthode de la plus grande pente)

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{d}^k = - \underbrace{(\mathbf{Ax}^k - \mathbf{b})}_{\mathbf{r}^k}$$

Calcul de la plus grande pente



Trouver $\alpha_k \geq 0$ tel que

$$J(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) = \min_{\alpha \geq 0} \underbrace{((\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k))}_{J((\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k))}$$

Méthode du gradient

(méthode de la plus grande pente)

$$\frac{dJ(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k)}{d\alpha} = 0$$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}^k = 0$$

$$\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b})}_{-\mathbf{d}^k} \cdot \mathbf{d}^k = -\alpha_k \mathbf{d}^k \cdot \mathbf{A}\mathbf{d}^k$$

$$\frac{\mathbf{r}_k^k \cdot \mathbf{r}^k}{\mathbf{r}^k \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^k} = \alpha_k$$

Calcul du pas optimal

La méthode de la plus grande pente est une méthode lente !

$$Ax = b$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha (Ax^k - b)$$

NOUVELLE ITEREE

ITEREE k

Analyse de la convergence

$$x^{k+1} = x^k - \alpha (Ax^k - b)$$

$$x^{k+1} - x = x^k - x - \alpha (Ax^k - b)$$

$$x^{k+1} - x = x^k - x - \alpha (Ax^k - b) + \alpha (Ax - b)$$

$$\underbrace{x^{k+1} - x}_{e^{k+1}} = (\delta - \alpha A) \underbrace{(x^k - x)}_{e^k}$$

$$\|e^{k+1}\| \leq \|\delta - \alpha A\| \|e^k\|$$

Un peu d'algèbre linéaire

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha\lambda_j| &\leq 1 \\ &\downarrow \\ \alpha\lambda_{max} &\leq 2 \\ &\downarrow \\ \alpha &\leq \frac{2}{\lambda_{max}} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}},$$

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

2

Choix d'un pas acceptable



$$\begin{aligned} \|\delta - \alpha\mathbf{A}\| &= 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \end{aligned}$$

Et pratiquement alors ?

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}\right)^n \leq \epsilon$$

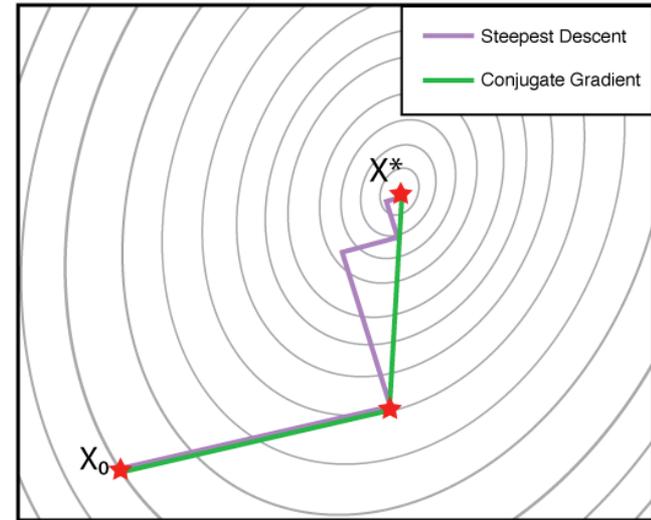
$$\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \leq \underbrace{-n \log\left(1 - \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}\right)}_{\leq \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}}$$

$$\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \kappa(\mathbf{A}) \leq n$$

C'est très mauvais !

Proportionnel à $O(h^{-2})$ pour une discrétisation d'un problème elliptique

Méthode des gradients conjugués



Le principe de l'algorithme est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k && \text{avec } \alpha^k \text{ tel que } \langle \mathbf{r}^{k+1}, \mathbf{r}^k \rangle = 0 \\ \mathbf{d}^{k+1} &= \mathbf{r}^{k+1} + \beta^k \mathbf{d}^k && \text{avec } \beta^k \text{ tel que } \langle \mathbf{d}^{k+1}, \mathbf{A} \mathbf{d}^k \rangle = 0 \end{aligned}$$

On peut montrer qu'un tel algorithme converge en (au plus) n étapes pour une matrice définie positive.



$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{\epsilon}\right) \sqrt{\kappa(\mathbf{A})} \leq n$$

La convergence est nettement meilleure !

Implémentation des gradients conjugués



$$\alpha^k = -\frac{\langle \mathbf{r}^k \mathbf{r}^k \rangle}{\langle \mathbf{A} \mathbf{d}^k \mathbf{r}^k \rangle}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \alpha^k \mathbf{A} \mathbf{d}^k$$

$$\beta^k = \frac{\langle \mathbf{r}^{k+1} \mathbf{r}^{k+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}^k \mathbf{r}^k \rangle}$$

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1} + \beta^k \mathbf{d}^k$$

Attention, on n'effectue pas le produit matriciel $\mathbf{A} \mathbf{d}^k$, mais on assemble un vecteur $\mathbf{s}^k = \mathbf{A} \mathbf{d}^k$, tout comme on assemble un vecteur $\mathbf{r}^k = \mathbf{A} \mathbf{x}^k - \mathbf{b}$! Tout l'intérêt d'un algorithme itératif est de ne pas nécessiter le stockage d'une matrice de grande taille : c'est une implémentation *matrix-free* qu'on veut réaliser :-)

Préconditionnement salut, les copains !

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \right)}_{J(\mathbf{v})}$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A} (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{y}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot \underbrace{(\mathbf{E}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{E}^{-1})}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{y} - \underbrace{(\mathbf{E}^{-T} \mathbf{b})}_{\tilde{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{y} \\ &= \tilde{J}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{E} \mathbf{x}$$

IL FAUT
RESOUDRE
CECI !

ON
TROUVE
COMMENT \mathbf{E}^{-1}



Trouver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\tilde{J}(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} \right)}_{\tilde{J}(\mathbf{v})}$$

Ah bon, et à quoi cela sert-il ?

*Le nouveau problème serait plus gentil...
(meilleur conditionnement)*

$$\begin{array}{l} \mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k - \alpha(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y}^k - \tilde{\mathbf{b}}) \\ \downarrow \\ \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha \underbrace{\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}^{-T}}_{\mathbf{C}^{-1}}(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{b}) \end{array}$$

...et donc, ce schéma convergerait plus vite !

Aahhh, et comment trouver C ?

ou les propriétés du bon préconditionneur

- Tout d'abord, le nombre de condition de $\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$ doit être le plus proche de l'unité. En tous cas, il doit au moins être nettement plus modeste que le nombre de condition de \mathbf{A} .
- Résoudre un système $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ doit être économique, par rapport au système original,
- Obtenir le préconditionneur doit être peu coûteux.

$\mathbf{C} = \mathbf{A}$ est le pire choix
 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ est le choix optimal

$\mathbf{C} = \mathbf{A}$ est le choix optimal
 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ est le pire choix

\mathbf{C} = factorisation incomplète de Cholesky, est un bon compromis entre les 2 propriétés souhaitées.