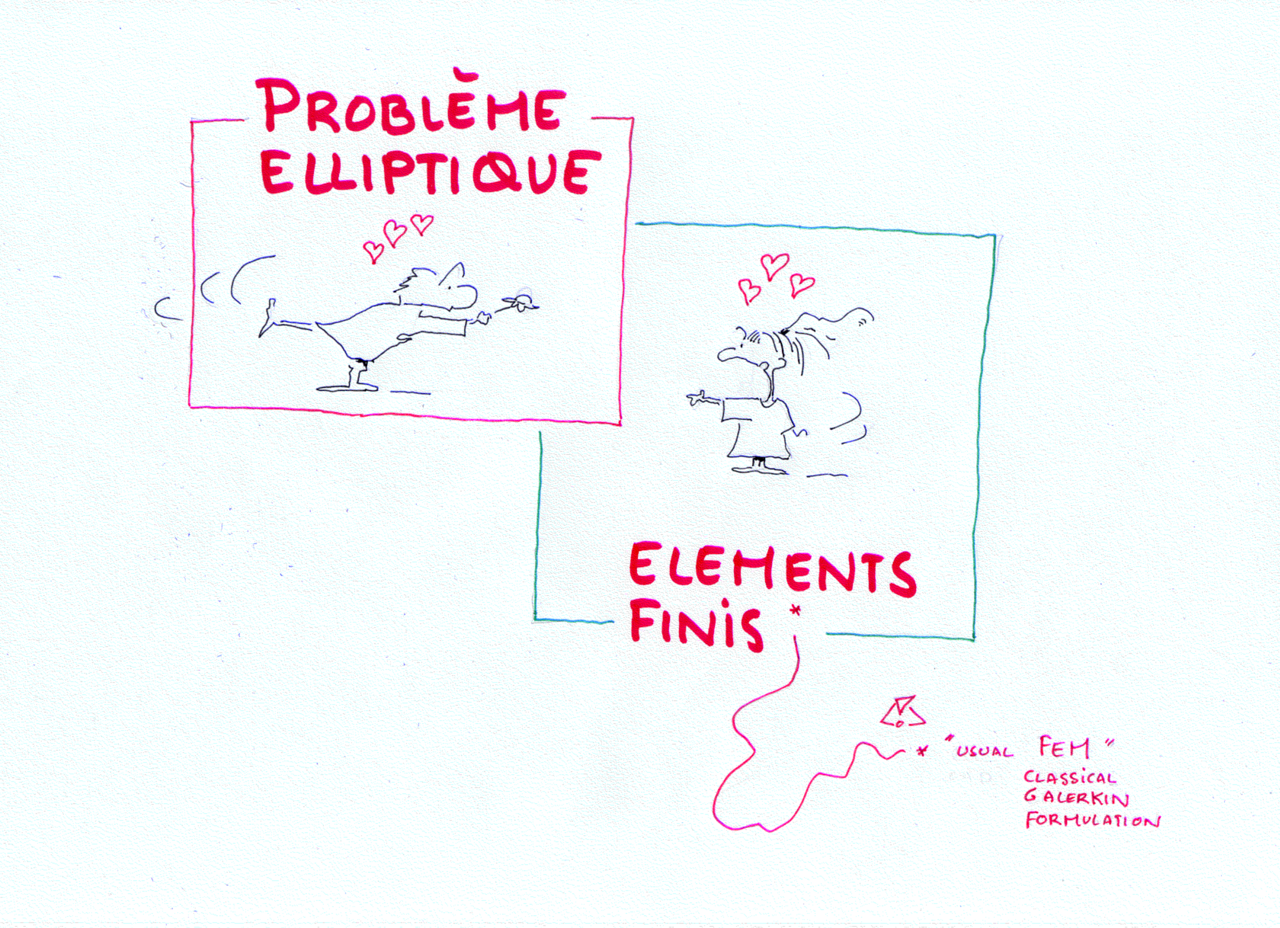


Un peu de mathématiques pour les éléments finis

PLANNING :-)

S7 1D - DG - ADVECTION

S8 2D - DG - ADVECTION

S9 STOMMEL : LES EQUATIONS DU TSUNAMI EN DG :-)

CECI EST DIFFERENT DES PODCASTS !!

S9 : ENONCE DU PROJET

S10 (APRES PAQUES :-) VENDREDI INTERRO :-(

S12 : REMISE DU PROJET

S13 : INTERVIEW ORALE

Typical Elliptic BoundaryValue Problem

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{< (\nabla \widehat{u}) \cdot (a \nabla u) >}_{a(\widehat{u}, u)} = \underbrace{< \widehat{u} f > + \ll \widehat{u} g \gg_N}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

Exemple de la conduction thermique

Equation elliptique
Il faut imposer une condition sur l'ensemble de la frontière !
Il faut au moins un point avec une condition essentielle !

Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet

Conditions naturelles
Conditions de Neumann

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\widehat{u}, u) = b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

Abstract generic elliptic problem

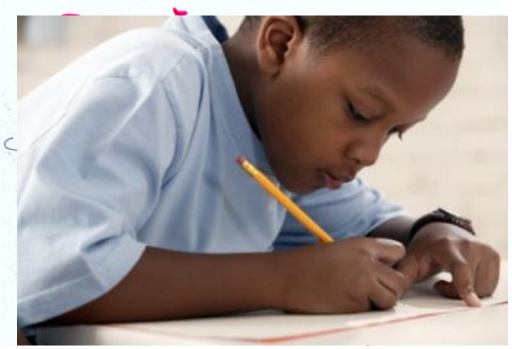
Trouver $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)}_{J(v)},$$

Il est aussi temps de commencer
à se poser quelques questions
sur la définition de l'espace fonctionnel…

a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive
b est une forme linéaire et continue

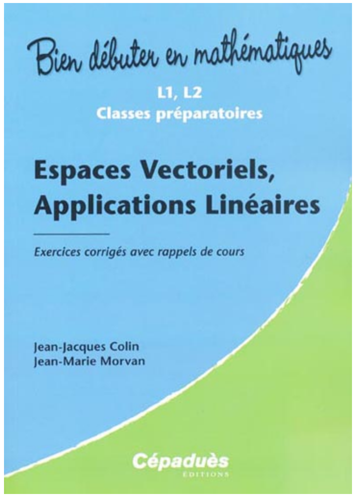
Ces hypothèses sont satisfaites
pour un problème faible d'une équation elliptique…



$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v)$

$\in \mathbb{R}$

C’est quoi une forme linéaire ?



Supposons tout d’abord que *U* est un espace vectoriel…

b est une forme linéaire si	$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}$
a est une forme bilinéaire si	$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$ $a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$

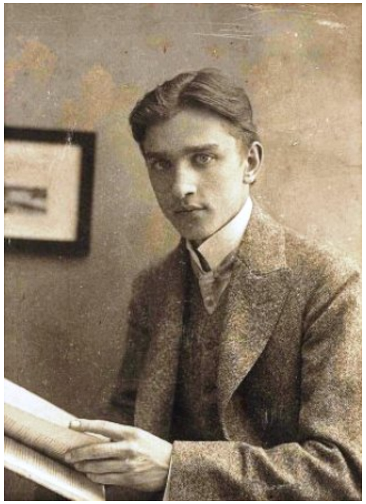
C’est quoi une forme continue ?

b est une forme continue si	$\exists\, c > 0$ tel que $\lvert b(u)\rvert \leq c\, \lVert u \rVert$ $\forall u \in \mathcal{U}$
a est une forme continue si	$\exists\, c > 0$ tel que $\lvert a(u,v)\rvert \leq c\, \lVert u \rVert\, \lVert v \rVert$ $\forall u, v \in \mathcal{U}$

$$b : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lVert v \rVert = \sqrt{\int_\Omega v^2 \, d\Omega}$$

Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



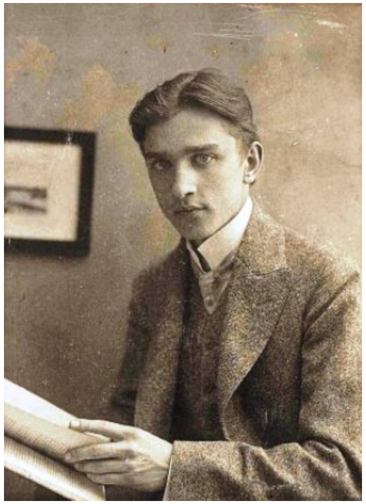
Donnons une norme à notre espace vectoriel *U* …
Supposons en outre qu’il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Banach

[1] Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\lVert\ \rVert$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\lVert\ \rVert$ converge. Oui, mais c’est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \ldots\}$ est une suite telle que $\forall\, \varepsilon\ \exists\, n\ \lVert u_i - u_j \rVert < \varepsilon, \quad i, j > n$. Oui, mais c’est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$ converge vers u si $\lVert u - u_i \rVert \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Noter que si le concept d’espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l’oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d’Hilbert, comme un espace vectoriel muni d’un produit scalaire. Mais, évidemment c’est moins joli d’un point de vue intellectuel...

C'est quoi une forme coercive ?

a est une forme coercive ou $\mathcal{U}$-elliptique si $\quad \exists\ \alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\ \|u\|^2$
$\forall u \in \mathcal{U}$

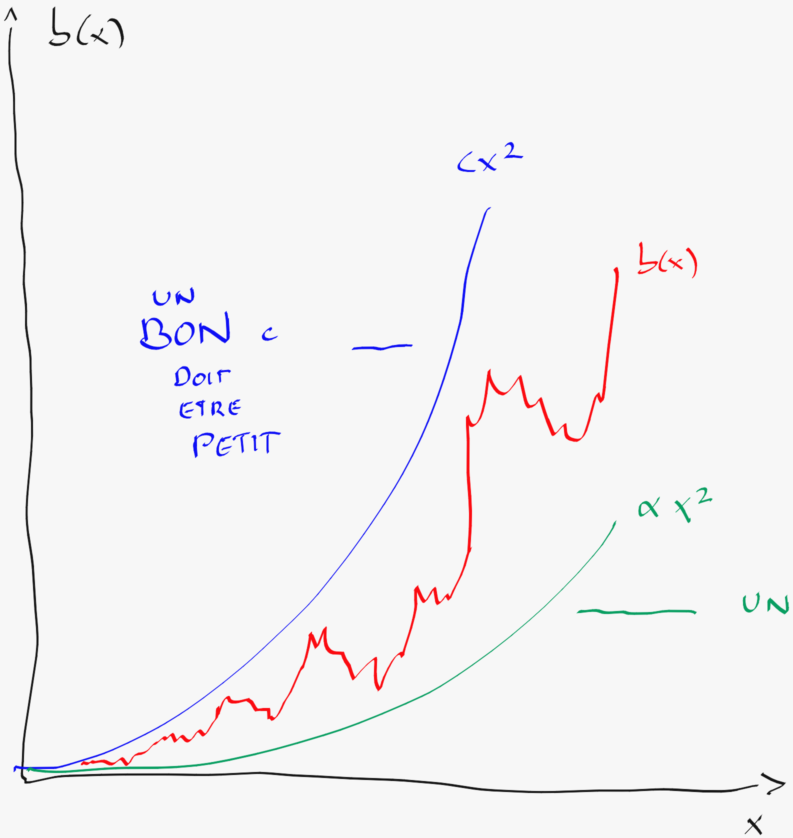
Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



Donnons une norme à notre espace vectoriel U …
Supposons en outre qu'il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Banach

[1]Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\|\ \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\|\ \|$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \ldots\}$ est une suite telle que $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n\ \|u_i - u_j\| < \varepsilon,\quad i,j > n$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$ converge vers u si $\|u - u_i\| \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



UN BON α
DOIT ETRE GRAND

CONTINUITE

$\exists\, c > 0$ tel que $|b(x)| \leq c\, x^2$

COERCIVITE

$\exists\, \alpha > 0$ tel que $\alpha x^2 \leq |b(x)|$

C’est quoi une forme continue et coercive ?

a est une forme définie positive
ou est un produit scalaire pour $\mathcal{U}$ si

$$\begin{aligned} & a \text{ symétrique}, \\ & a(u,u) \geq 0 \qquad \forall u \neq 0 \in \mathcal{U} \\ & a(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

$$< u, v >_* \;=\; a(u,v);$$

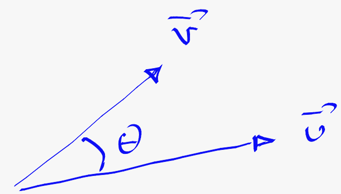
Donnons un produit scalaire à notre espace vectoriel U …
Supposons en outre qu’il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Hilbert

C’est un produit scalaire !

David Hilbert
Germany 1862 –1943

INÉGALITÉ DE CAUCHY

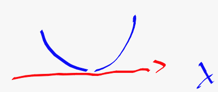
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$



$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = uv\cos\theta$$

$$0 \leq \langle u + \underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}} v \,;\, \underbrace{u + \lambda v}_{\in\mathcal{U}} \rangle$$

$$\leq \underbrace{\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle}_{\text{POLYNOME DE SECOND DEGRE EN } \lambda}$$



$$c + 2b\lambda + a\lambda^2 = 0$$

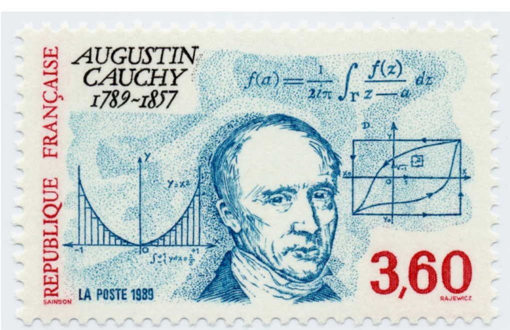
$$b^2 - ac \leq 0$$

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \underbrace{\langle u, u\rangle}_{\|u\|^2}\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\|v\|^2}$$

$\square$

Inégalité de Cauchy

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$



$\in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle \overbrace{u + \lambda v}^{\in \mathcal{U}} , u + \lambda v \rangle$$

$$\leq \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

SECOND ORDER POLYNOMIAL $c + 2b\lambda + \lambda^2 a$

POSITIVE FOR ALL λ $\quad b^2 - ac < 0$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \underbrace{\sqrt{\langle u, u \rangle}}_{\|u\|} \; \underbrace{\sqrt{\langle v, v \rangle}}_{\|v\|}}$$

$\square$

Théorème de Lax-Milgram :-)

Si $\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert
a est une forme bilinéaire continue et coercive
b est une forme linéaire continue,

alors, le problème abstrait

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\widehat{u}, u) = b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},$$

a une solution unique
qui dépend continûment du terme source b $(\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|)$.

où la norme d'une forme b est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v\in\mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

Notre problème est bien posé !

La solution existe, est unique et dépend gentiment des données…

Arthur Milgram
Philadelphia 1912 – 1962

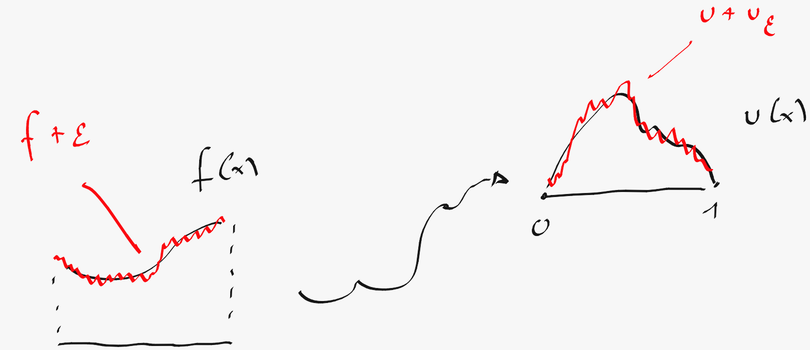
Peter Lax
Budapest 1926

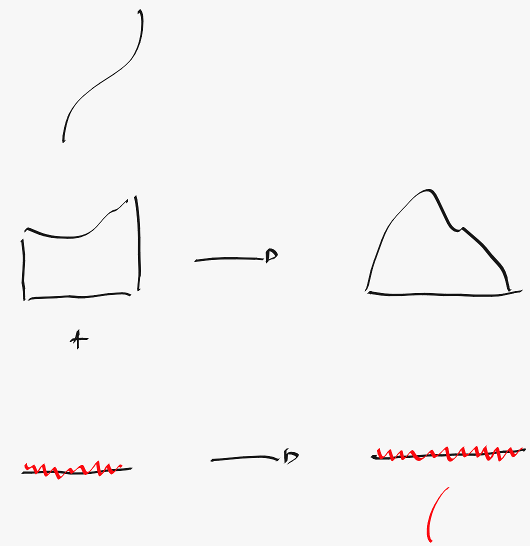
$$\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0$$

$$\|u\| < \frac{1}{\alpha}\,\|b\|_{\square}$$

CONSTANTE DE COERCIVITE

$$\|b\|_{\square} \triangleq \sup \frac{|b(v)|}{\|v\|}$$



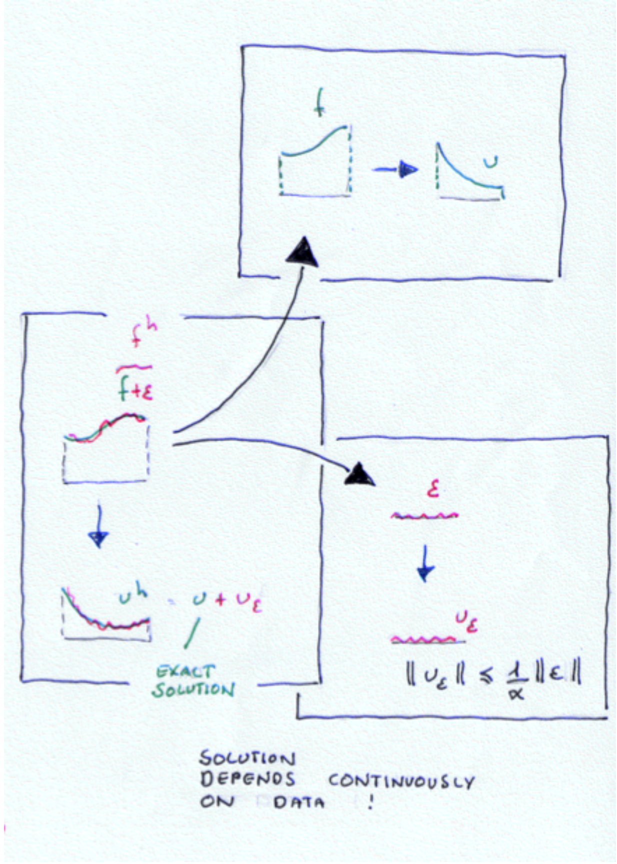


$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|\varepsilon\|$$

Ce théorème implique la stabilité des problèmes elliptiques…

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$$

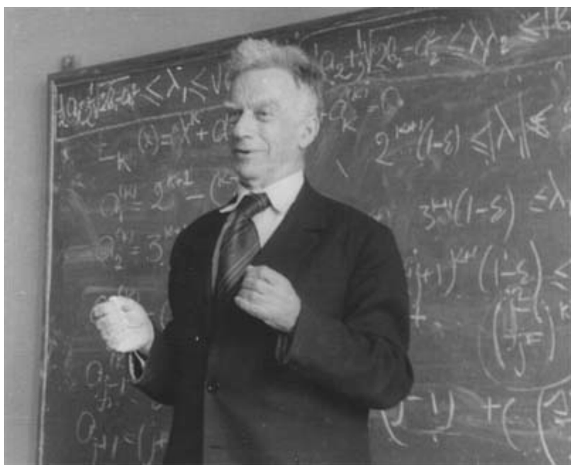
Constante de coercivité
Plus la constante est grande,
plus c'est stable !



…et ça c'est vachement utile !

Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev
Saint-Petersburg 1908 - 1989



$$L_2(\Omega) = H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^2 \subset H^1 \subset H^0$$

Définissons formellement U …
Définissons des normes et des produits scalaires !
Les dérivées sont comprises au sens des distributions afin de rendre les espaces complets !
Ce sont les espaces de Sobolev !

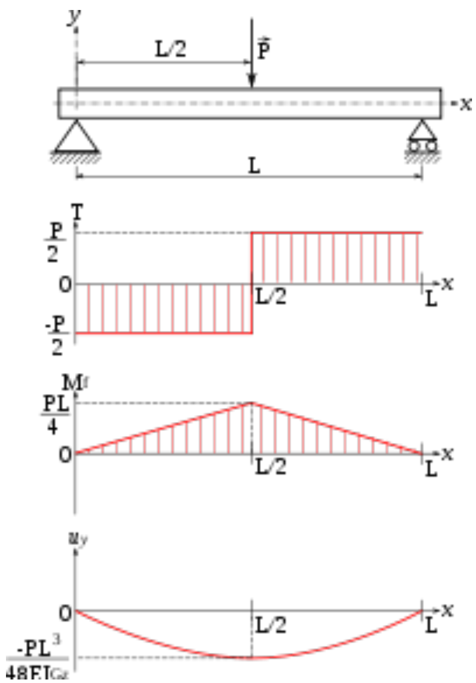
$$< uv >_0 = \int_\Omega uv \, dx$$

$$< uv >_1 = \int_\Omega uv + u'v' \, dx$$

$$< uv >_2 = \int_\Omega uv + u'v' + v''v'' \, dx$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$

Characterizing the smoothness of a function



$$\begin{aligned}
H^0(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^2(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}
\end{aligned}$$

$$x^{-1/4} \in L_2(]0,1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \left[2\,x^{1/2}\right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \left[\ln(x)\right]_0^1 = \infty$$

$$x^{-1/2} \notin L_2(]0,1[)$$

Ce n’est pas toujours évident …

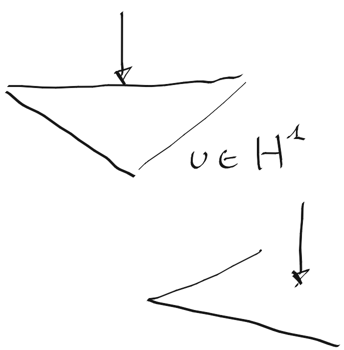
Théorèmes d’immersion de Sobolev
Est-ce que c’est continus, ces brols ?

Si $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $2k > n$, $n = 2$, $k = 1$

alors $H^k(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^0(\overline{\Omega}),\ \exists\, c \quad |w(x)| < c, \quad \forall x \in \Omega\}$

Si $\Omega \subset \mathcal{R}$,

alors $H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^k(\overline{\Omega}),\ \exists\, c \quad |w(x)| < c, \quad \forall x \in \Omega\}$



Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !
Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l’infini sous la force !

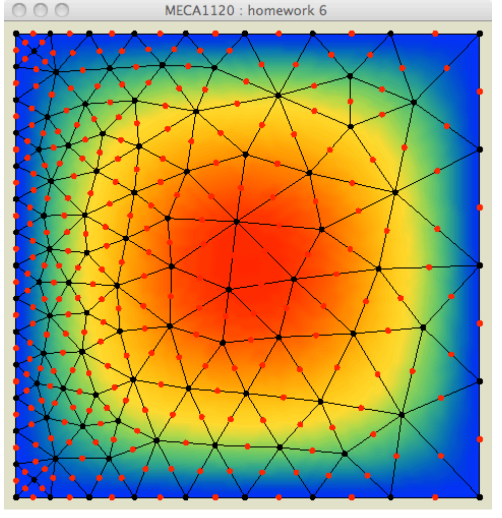
Et finalement, a(u,v) est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},$$

Pour le cas de la conduction stationnaire

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ a(u,v) &= < \boldsymbol{\nabla} u \cdot k \boldsymbol{\nabla} v > \\ b(u) &= < f u > \end{aligned}$$



$$a(u,v) = \int_0^1 k\, u' v' \, dx$$

CONTINU

$$|a(u,v)| = |k \langle u' v' \rangle_0| \leq k \underbrace{\|u'\|_0 \|v'\|_0}_{\leq \|u\|_1}$$

$$\leq k \|u\|_1 \|v\|_1$$

$$\|u'\|_0^2 = \int_0^1 (u')^2 \, dx$$

$$\|u\|_1^2 = \int_0^1 u^2 + (u')^2 \, dx$$

COERCIVITÉ

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x v'(t)\, dt$$

$$\langle v', 1 \rangle_0 \leq \|v'\|_0 \|1\|_0$$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x 1 \, dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x (v')^2 \, dt}_{\leq \|v'\|_0^2}$$

EN INTEGRANT SUR $\Omega =]0,1[$

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \|v'\|_0^2$$

$$C_2 \underbrace{(\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k \|v'\|_0^2}_{a(v,v)}$$

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{dv}{dx}(t)dt$$

$\downarrow$ Par l'inégalité de Cauchy $< v_{,x}, 1 > \leq \|v_{,x}\| \; \|1\|$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \|\frac{dv}{dx}\|_0^2}$$

$\downarrow$ En intégrant sur Ω

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \|\frac{dv}{dx}\|_0^2$$

$\downarrow$

$$kC_2 \underbrace{\left(\|v\|_0^2 + \|\frac{dv}{dx}\|_0^2\right)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k\,\|\frac{dv}{dx}\|_0^2}_{a(v,v)}$$

C'est coercif !

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_0 \, \|\nabla v\|_0$$

$\downarrow$

$$\leq \|u\|_1 \, \|v\|_1$$

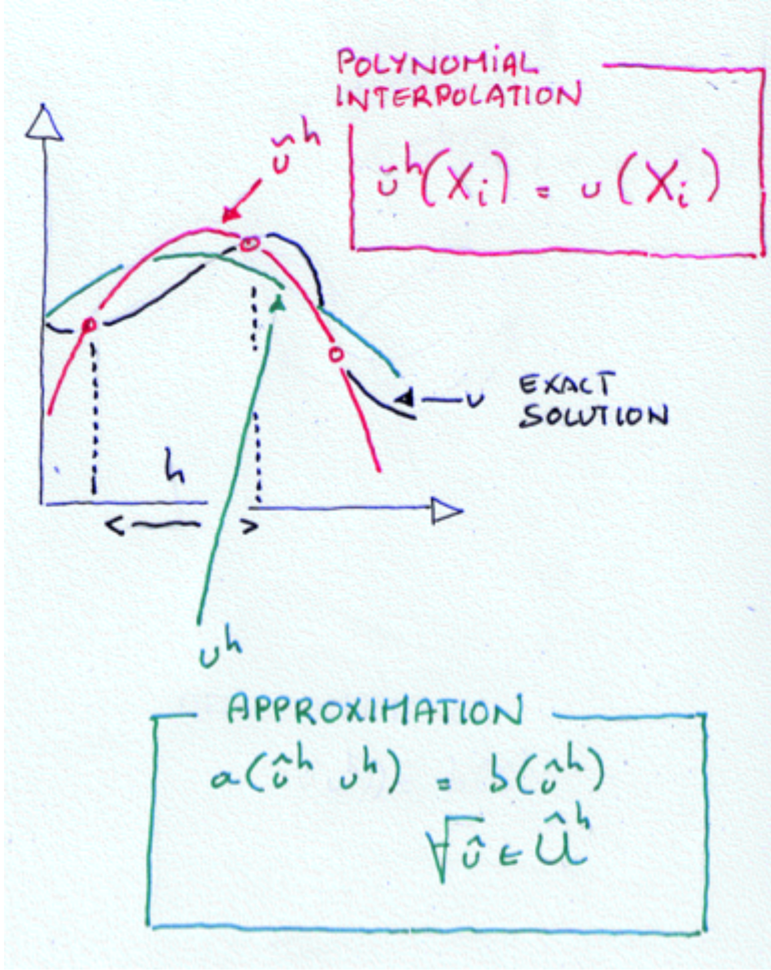
C'est continu !

Exemple de la conduction thermique

Pour avoir un problème bien posé,
il faut au moins un point avec une condition essentielle !

Estimation a priori de l'erreur

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 \, h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,$$



Lemme de Bramble-Hilbert

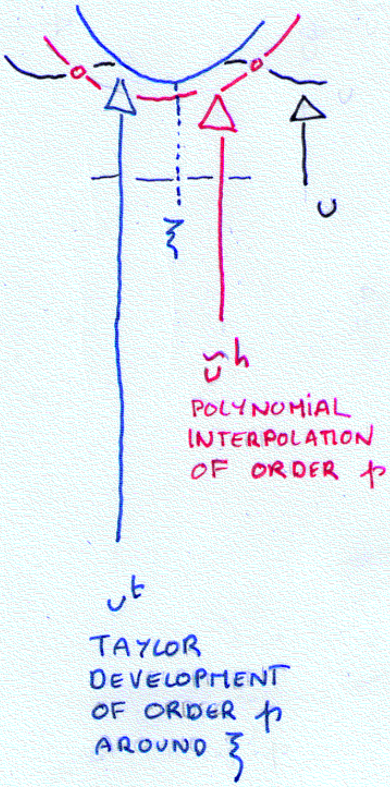
Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

BRAMBLE - HILBERT LEMMA

$$\frac{d^i}{d\xi^i}\big(\overbrace{u - \tilde{u}^h}^{\tilde{e}^h}\big) = \frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \underbrace{\frac{d^i u^t}{d\xi^i}}_{=\ \sum_{j=0}^{p} u^t(\Xi_j)\frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}} - \underbrace{\frac{d^i \tilde{u}^h}{d\xi^i}}_{=\ \sum_{j=0}^{p} u(\Xi_j)\frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}}$$

$$\frac{d^i u^t}{d\xi^i} = \frac{d^i u^t}{d\xi^i} \overset{!}{=} \sum_{j=0}^{p} u^t(\Xi_j)\frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}$$



$$\left|\frac{d^i \tilde{e}^h}{d\xi^i}\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i}\right|}_{\leqslant C \max\left|\frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}}\right|} + \sum_{j=0}^{p} \underbrace{\left|\big(u^t(\Xi_j) - u(\Xi_j)\big)\right|}_{\leqslant C \max\left|\frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}}\right|} \overbrace{\left|\frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}\right|}^{\leqslant C}$$

$$\|\tilde{e}\|_m^2 = \sum_{e=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\int_{\Omega_e} \left(\frac{d^i \tilde{e}}{dx^i} \right)^2 dx}$$

ON PASSE SUR L'ELEMENT PARENT

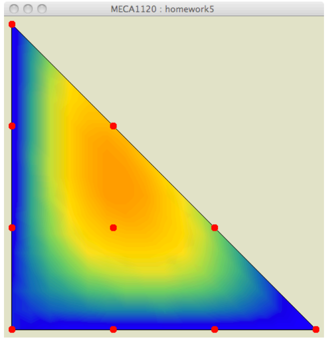
$$= \left(\frac{h}{2}\right)^{1-2i} \underbrace{\int_{-1}^{1} \left(\frac{d^i \tilde{e}}{d\xi^i} \right)^2 d\xi}$$

$$\leqslant C^2 \int_{-1}^{1} \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|^2 d\xi$$

$$\leqslant C^2 \left(\frac{2}{h}\right)^{1-2(p+1)} \underbrace{\int_{\Omega_e} \max \left| \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} \right|^2 dx}$$

$$\leqslant C \|u\|_{p+1}^2$$

$$\leqslant C^2 \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{h}{2}\right)^{2(p+1-i)} \|u\|_{p+1}^2$$



Erreur de l'interpolation

$$\|\tilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

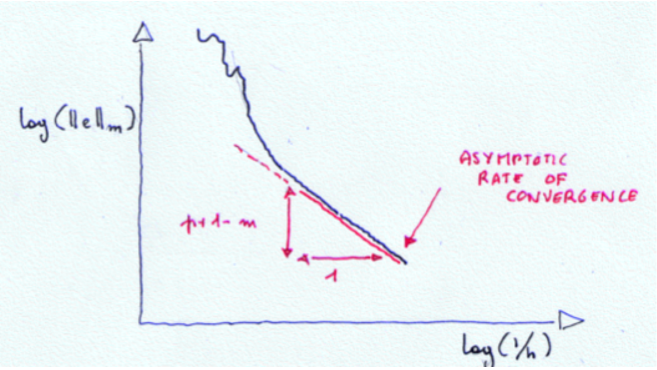
Lemme de Bramble Hilbert

Concrètement…

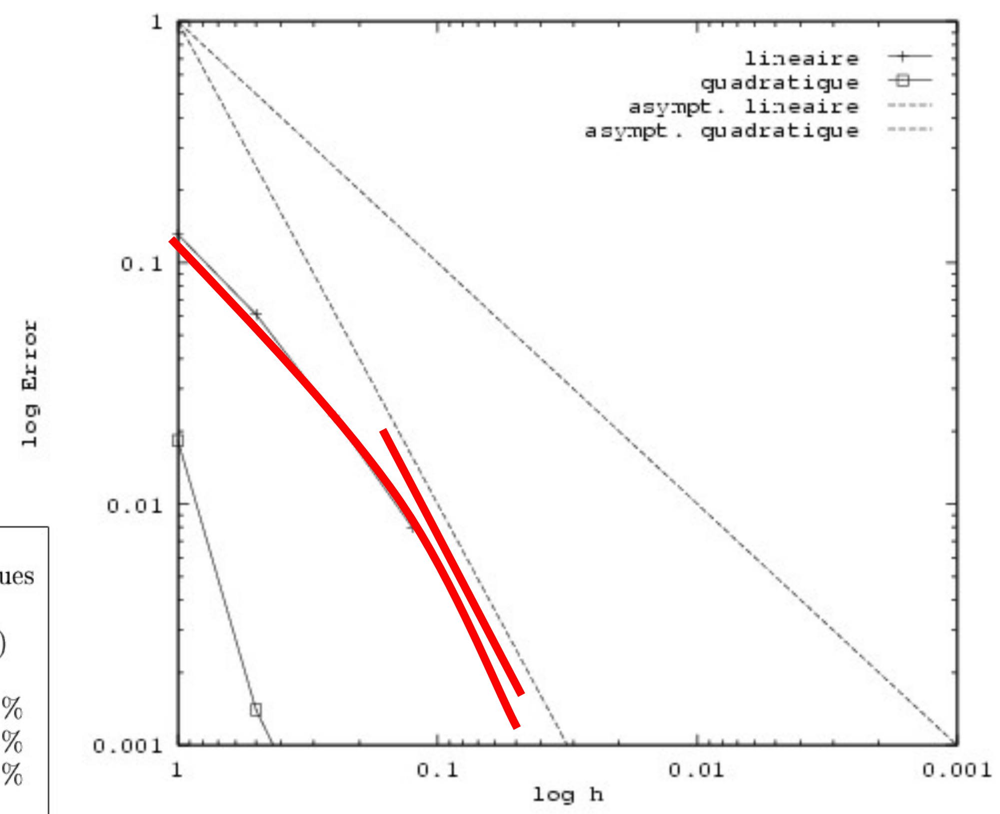
$$\|\tilde{e}\|_0 \leq C_0 \, h^2 \, \|u\|_2$$

$$\|\tilde{e}\|_1 \leq C_1 \, h^1 \, \|u\|_2$$

$$\|\tilde{e}\|_* \leq C_1 \, h^1 \, \|u\|_2$$

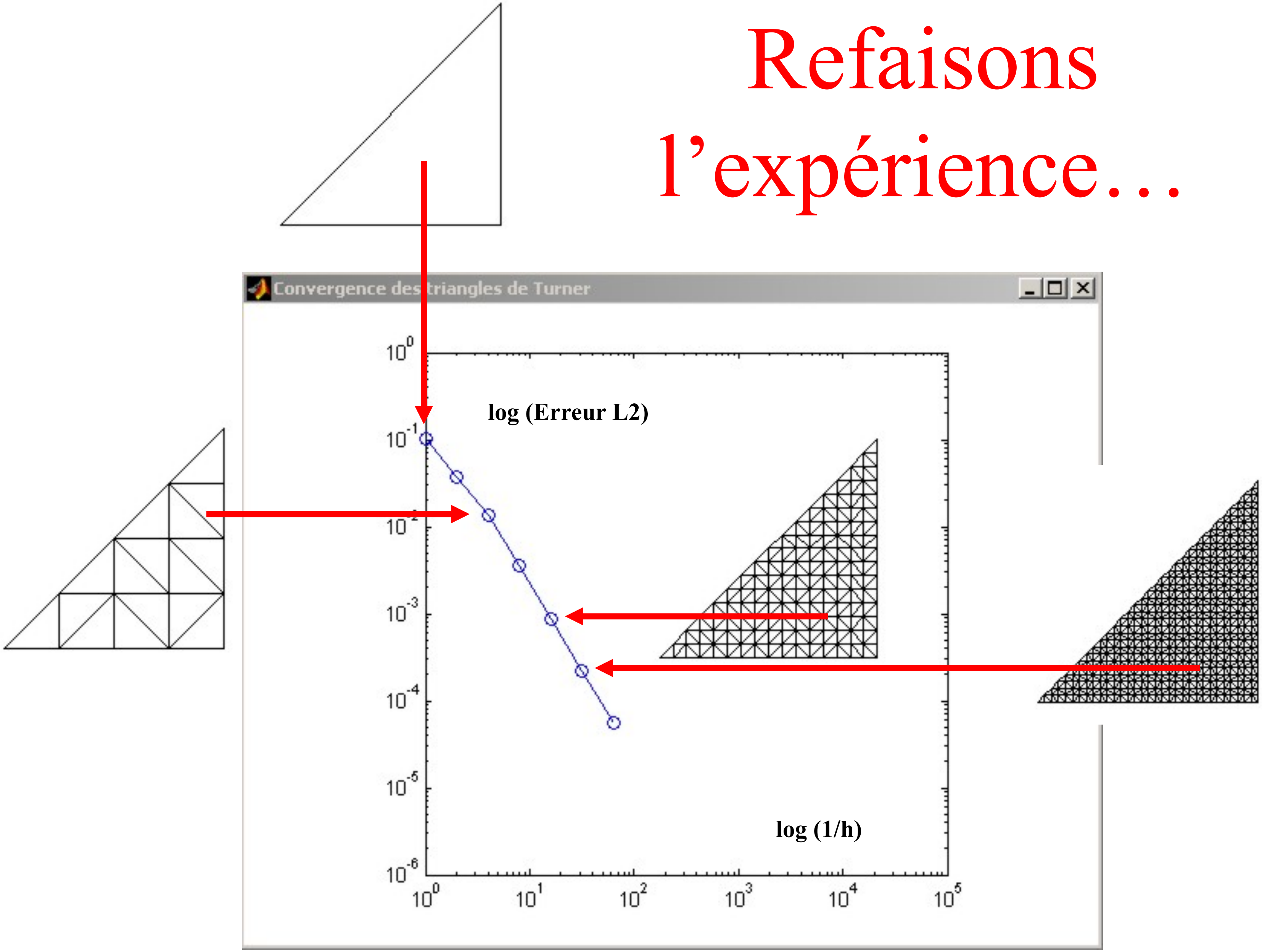


Eléments		Triangles linéaires			Triangles quadratiques		
N_1	h	N	$u^h(0)$	$e(0)$	N	$u^h(0)$	$e(0)$
1	1	3	-0.3333	13.1 %	6	-0.3000	1.83 %
4	1/2	6	-0.3125	6.1 %	15	-0.2950	0.14 %
16	1/4	15	-0.3013	2.3 %	45	-0.2947	0.03 %
64	1/8	45	-0.2969	0.8 %			



Et expérimentalement…

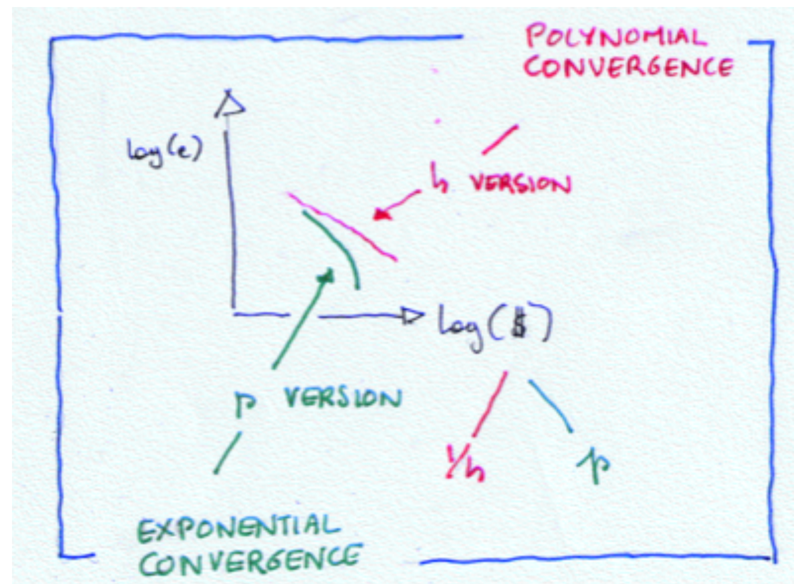
Refaisons l'expérience…



La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d’ordre élevé !

$$\|\widetilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

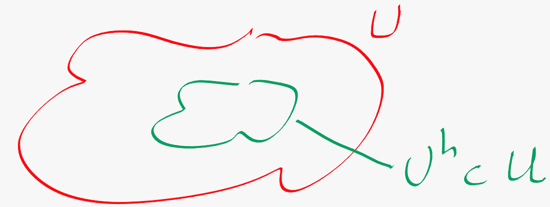


Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !
Sinon pas de super convergence…
Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-(

$$a(u, \hat{v}) = b(\hat{v}) \qquad \forall \hat{v} \in \hat{U}$$

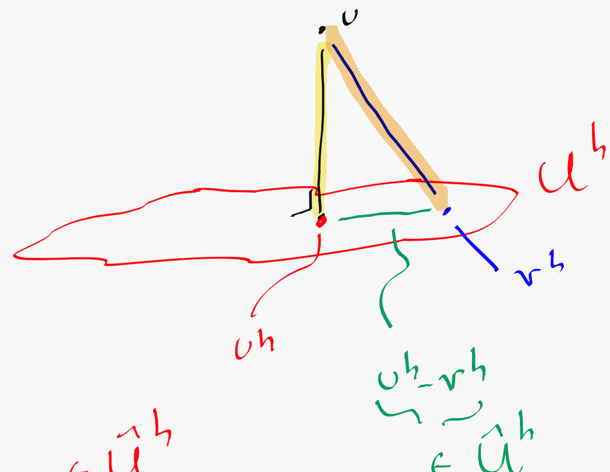
$$a(u, \hat{v}^h) = b(\hat{v}^h) \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h \subset \hat{U}$$

$$a(u^h, \hat{v}^h) = b(\hat{v}^h) \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h$$



$$a(\underbrace{(u-u^h)}_{e^h}, \hat{v}^h) = 0 \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h$$

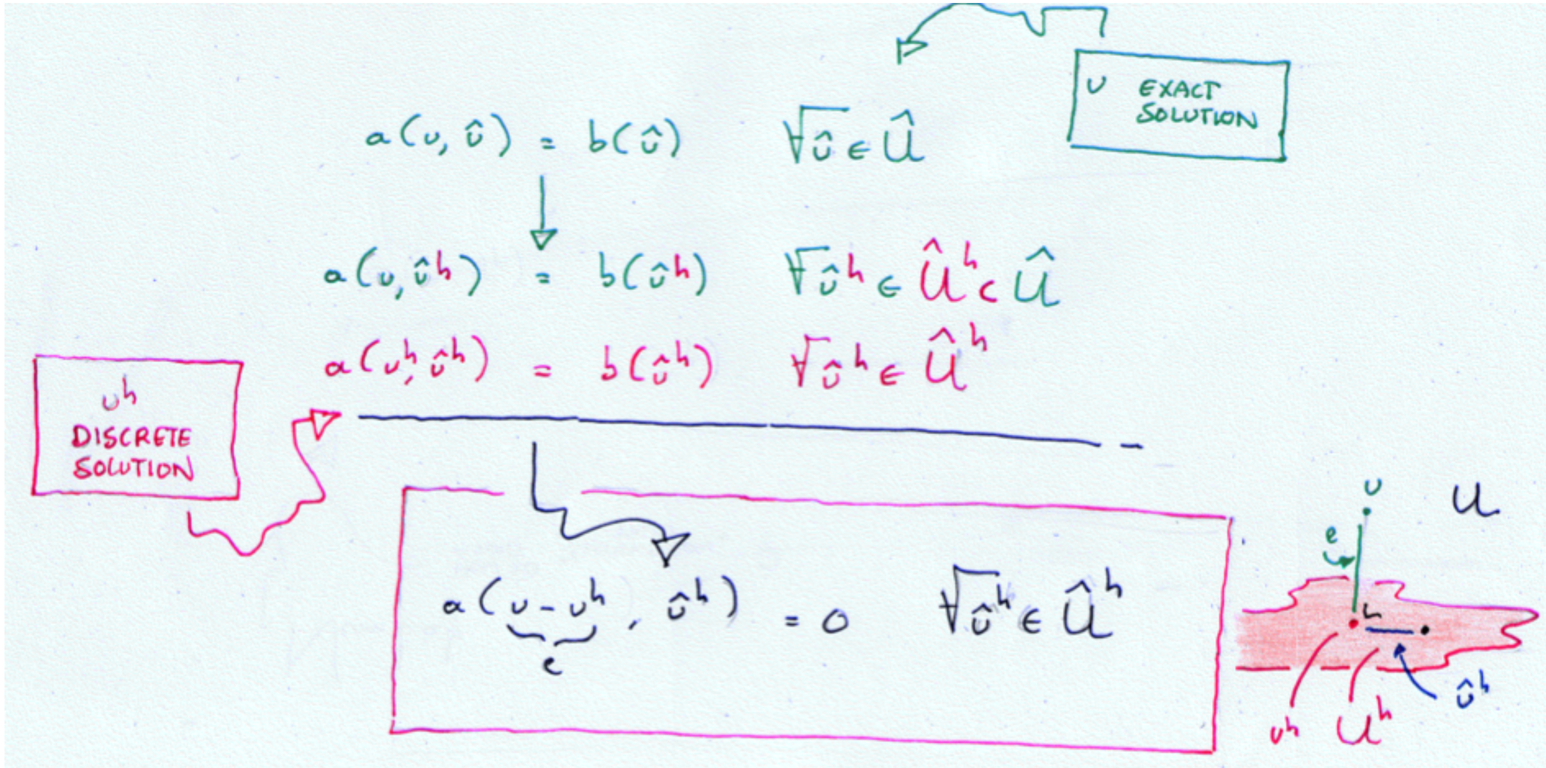
$$\langle e^h, \hat{v}^h \rangle_* = 0$$



$$a(u-v^h, u-v^h)$$

$$= a(u - u^h + u^h - v^h, \; \ldots\ldots)$$

$$= \underbrace{a(e^h, e^h)}_{} + \underbrace{2a(e^h, \overbrace{u^h - v^h}^{\in \hat{U}^h})}_{=0} + \underbrace{a(u^h - v^h, u^h - v^h)}_{\geq 0}$$



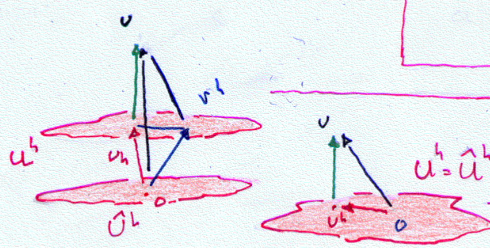
Les éléments finis :
c’est une projection orthogonale !

$$a(u-v^h, u-v^h) = a(\underbrace{u-u^h}_{e} + u^h - v^h, \; \overbrace{u-u^h}^{e} + u^h - v^h) \qquad v^h \in \mathcal{U}^h$$

$$= a(e,e) + \underbrace{a(u^h - v^h, u^h - v^h)}_{\geq 0} + 2\overbrace{a(e, \underbrace{u^h - v^h}_{\in \hat{\mathcal{U}}^h})}^{=0}$$

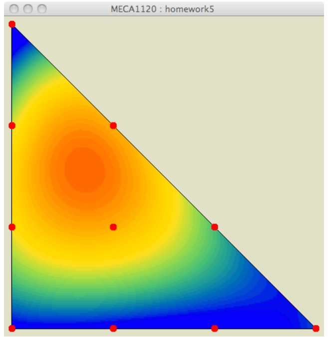
BEST ENERGY APPROXIMATION THEOREM

$$\| u - v^h \|_* \geq \| e \|_* \qquad \forall v^h \in \mathcal{U}^h$$



$$\| u - v^h \|_*^2 = \| e \|_*^2 + \| u^h - v^h \|_*^2$$

$$\| u \|_*^2 = \| e \|_*^2 + \| u^h \|_*^2 \qquad \text{IF } \hat{\mathcal{U}}^h = \mathcal{U}^h$$



C’est la meilleure approximation !

Oui, mais c’est une norme bizarre, non ?

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|e\|_*^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|\tilde{e}\|_*^2 \leq \frac{c}{\alpha}\|\tilde{e}\|_m^2 \leq \boxed{\frac{c}{\alpha}} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$

a EST COERCIF

$\|e\|_*^2 = a(e,e)$

MEILLEURE APPROXIMATION ENERGETIQUE

a EST CONTINU

Lemme de Cea

$$\boxed{\|e\|^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\, \|\tilde{e}\|^2}$$

$$\|e\|^2 \;\leq\; \tfrac{1}{\alpha}\|e\|_*^2 \;\leq\; \tfrac{1}{\alpha}\|\tilde{e}\|_*^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\|\tilde{e}\|^2,$$

En vertu de la continuité de a,

Car u^h est la meilleure approximation énergétique,

En vertu de la coercivité de a,

Non, c'est aussi vrai dans toutes les normes de Sobolev !

Estimation de l'erreur

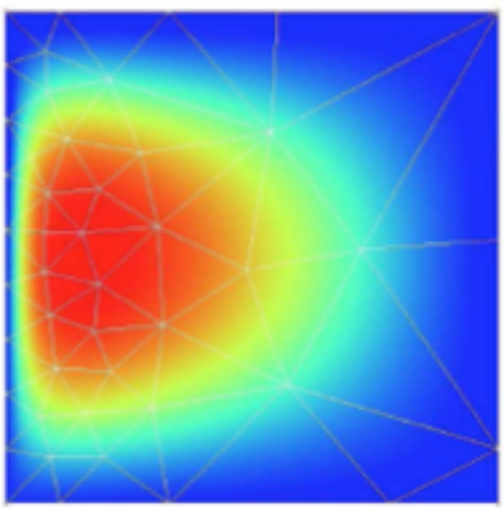
$$\boxed{\|e\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\, C^2\; h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,}$$

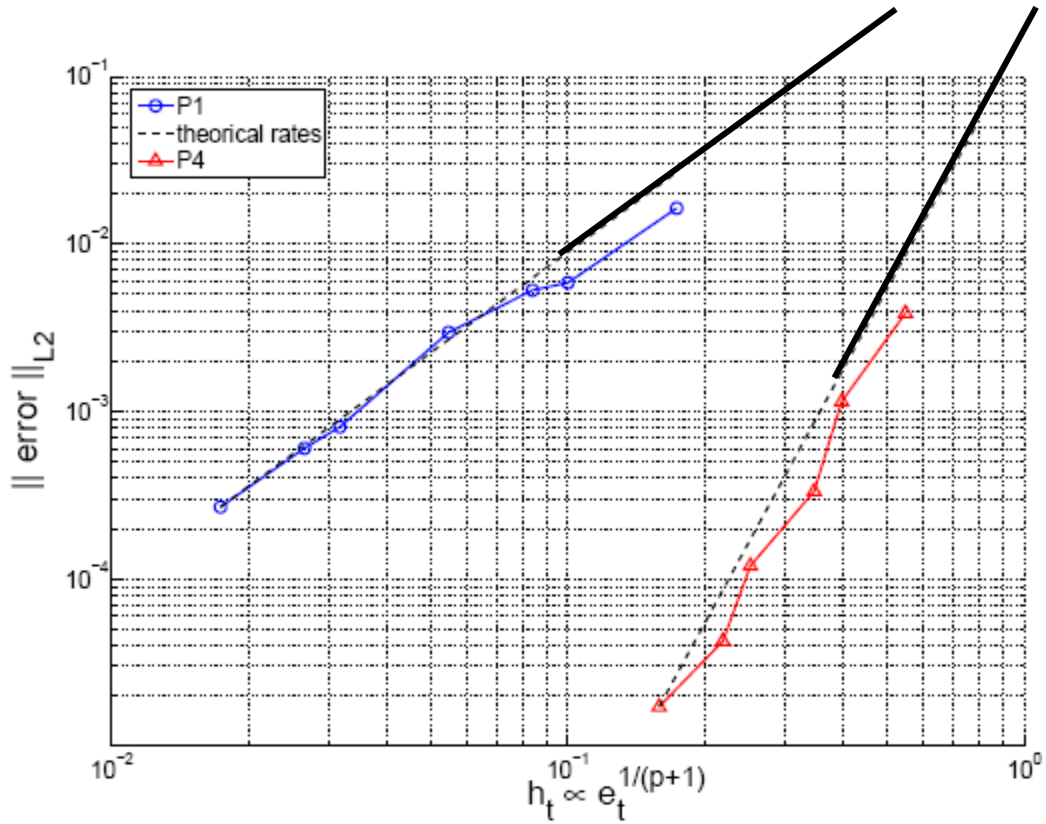
$$\|e\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\, \|\tilde{e}\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\, C^2\; h^{2(p+1-m)}\; \|u\|_{p+1}^2,$$

Estimation de l'erreur d'interpolation,

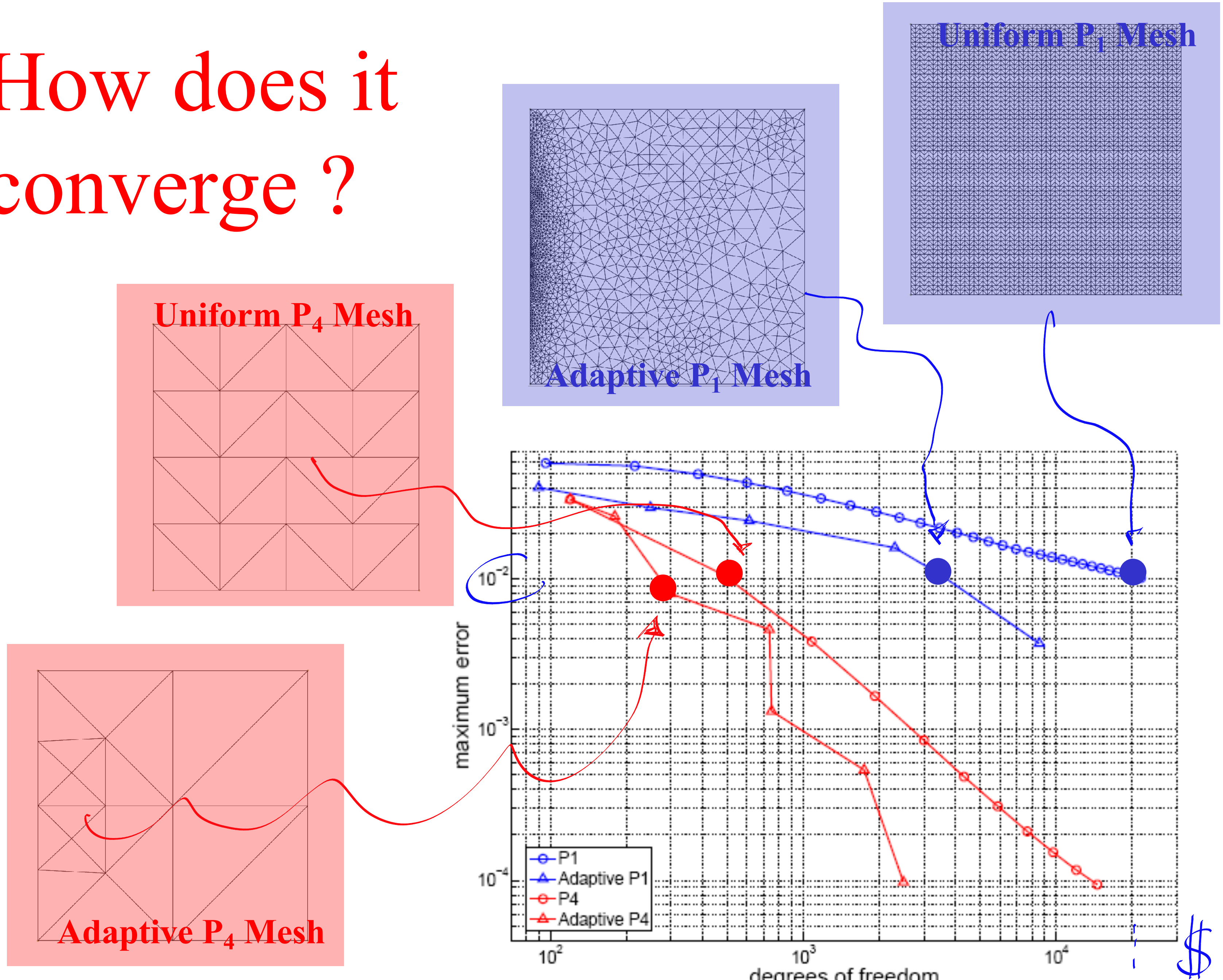
En vertu du lemme de Cea,

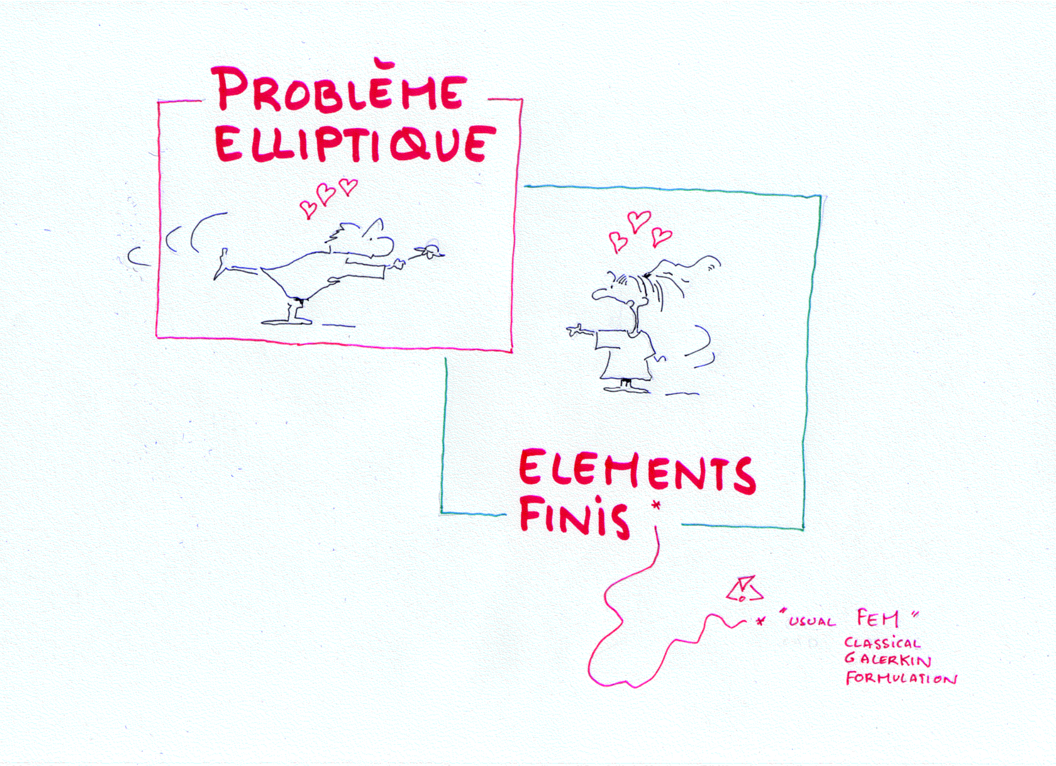
Theoretical rates of convergence are obtained for the analytical Stommel problem





How does it converge ?





Galerkin, c'est donc optimal pour des équations elliptiques