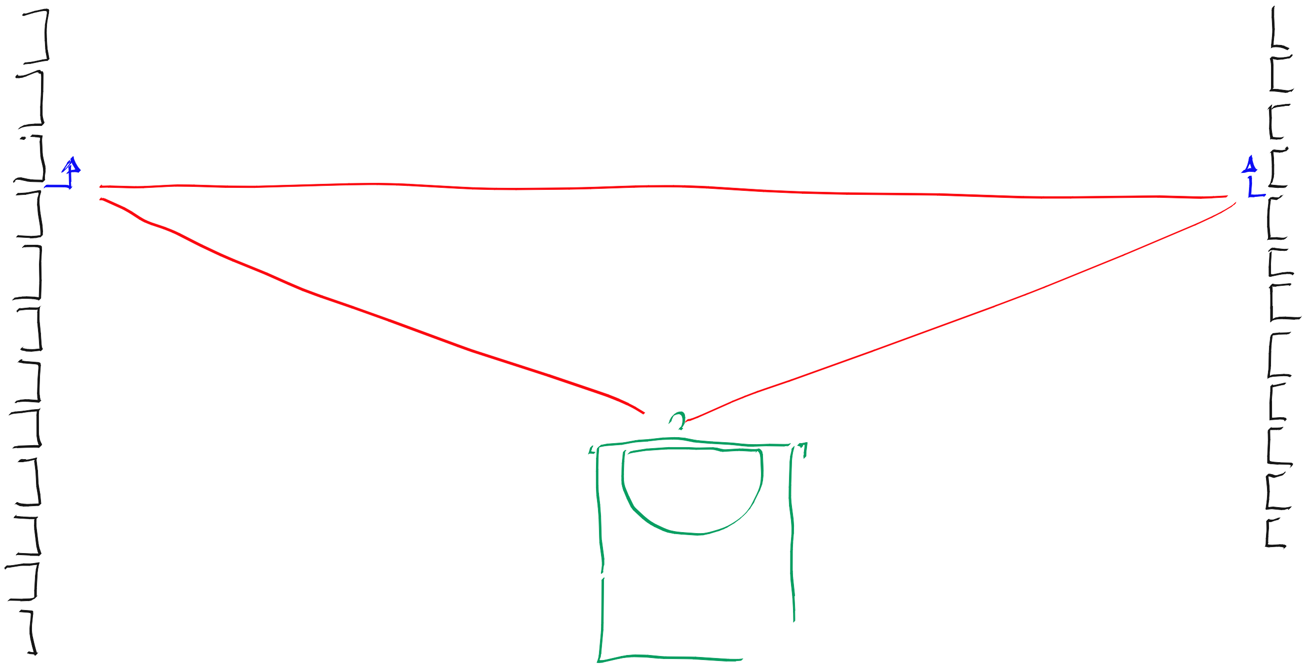
Comment installer une corde à linge ?



Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Effectuons un tout petit exemple :-)

Problème de la corde à linge tendue !

Formulation forte

$< \hat{v}' v' > = < f \hat{v} > \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{U}$

Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Plus exigeant !
Espace des solutions plus petit !
On perd des solutions réellement utiles !

$< \hat{v}\, v'' > + < f\, \hat{v} > = 0 \qquad \forall \hat{v} \in \mathcal{U}$

$< (\hat{v}\, v')' > - < \hat{v}'\, v' >$

$[\hat{v}\, v']_0^1 = 0$ car $\hat{v}(0) = \hat{v}(1) = 0$

$\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}}$

Plus laxiste !!
Espace des solutions plus grand !
Les solutions en sus sont utiles !

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

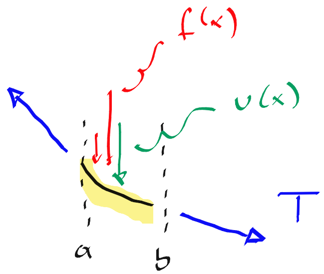
$$
\underbrace{< \frac{d\hat{u}}{dx}\frac{du}{dx} >}_{a(\hat{u},u)} \;=\; \underbrace{< \hat{u} f >}_{b(\hat{u})}, \qquad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},
$$

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$
J(u) \;=\; min_{v\,\in\,\mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},
$$

Formulation faible

La vraie physique :
c'est la formulation faible !



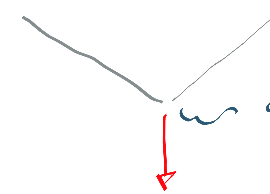
FORM. FORTE !

$$\boxed{f + T u'' = 0}$$

FORM FAIBLE !

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{T \left.\frac{du}{dx}\right|_a - T \left.\frac{du}{dx}\right|_b}_{-\left[T \frac{du}{dx}\right]_a^b}}$$

PETITS DEPLACEMENTS...



$\frac{du}{dx}$ N'EST PAS DERIVABLE ICI

$\frac{du}{dx}$ EST DERIVABLE

$$\int_a^b f(x) + T \frac{du}{dx^2} \quad dx = 0 \qquad \forall a, b$$

La vraie physique :
c'est minimiser l'énergie !

$$J(v) = \underbrace{T(\ell - L)}_{\text{TRAVAIL DU A L'ALLONGEMENT DE LA CORDE}} - \underbrace{\int_0^L f\, v \, dx}_{\text{TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES}}$$

$$\ell = \int_0^L d\ell = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dv^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\simeq \int_0^L 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

PETITS DEPLACEMENTS

$$\boxed{J(v) = \int_0^L \frac{1}{2} T \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - f\, v \quad dx}$$

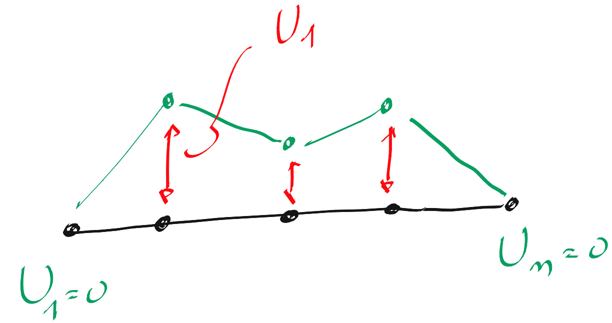
$$\delta J = 0$$

$$\int_0^L T \frac{dv}{dx}\frac{d\hat{v}}{dx} + f\,\hat{v} \quad dx = 0$$

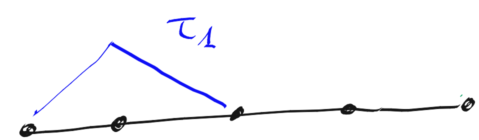
$$\forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{U}}$$

Ecrire une formulation discrète !

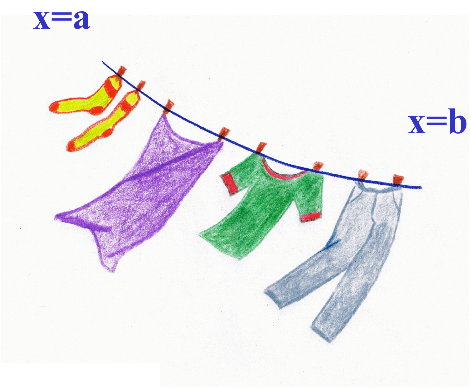
Eléments finis 1D



$$u \simeq u^h = \underbrace{\sum U_i \, \tau_i}_{\in \, U^h \underbrace{\subset U}_{\text{CECI EST TRES IMPORTANT}}}$$



La vraie formulation physique…
C'est une formulation intégrale !



$$(\frac{du}{dx})^2 \ll 1.$$

Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$\int_a^b f\ dx \quad = \quad T\frac{du}{dx}(a) - T\frac{du}{dx}(b) \qquad \forall a,b$$

$$\int_a^b f\ dx \quad = \quad -T\left[\frac{du}{dx}\right]_a^b \qquad \forall a,b$$

$$\Big\downarrow \quad \text{Si la fonction } \frac{du}{dx} \text{ est continue !}$$

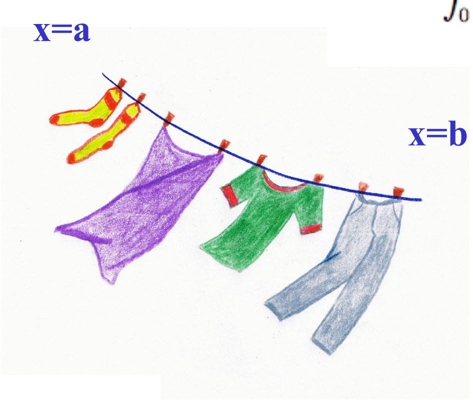
$$\int_a^b f + T\,\frac{d^2u}{dx^2}\ dx \quad = \quad 0 \qquad \forall a,b$$

$$f + T\,\frac{d^2u}{dx^2} \quad = \quad 0$$

Equilibre vertical des forces

La vraie formulation physique…
C'est minimiser l'énergie !

$$l \;=\; \int_0^L dl \;=\; \int_0^L \sqrt{\;dx^2+du^2} \;=\; \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\,dx \;\approx\; \int_0^L \left(1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)dx$$



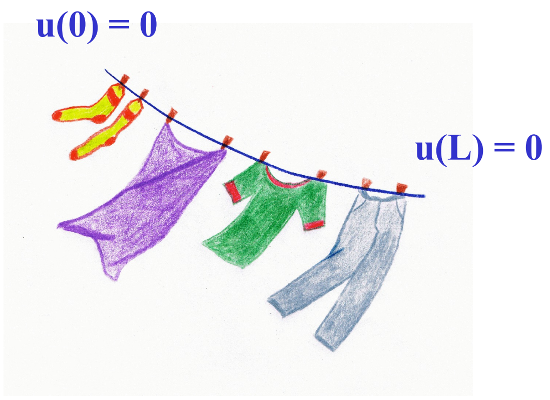
$$(\frac{du}{dx})^2 \ll 1.$$

Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$J(u) = T(l-L) - \int_0^L f\ u\ dx$$

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f\ u\ dx$$

Minimisation de l'énergie
On minimise le travail des forces !



Problème discret

$$\sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_j = B_i, \qquad i = 2, N-1.$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 0, \\ U_N &= 0, \end{aligned}$$

N-2 équations pour les valeurs intérieures
Deux conditions aux limites

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_\Omega \frac{d\tau_i}{dx}(x)\, \frac{d\tau_j}{dx}(x)\, dx, \\ B_i &= \int_\Omega f(x)\tau_i(x)\, dx, \end{aligned}$$

Retrouvons notre petit exemple

Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Problème de la corde à linge tendue !

Formulation forte

Trouver $u(x)$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

Plus exigeant !
Espace des solutions plus petit !
On perd des solutions réellement utiles !

Plus laxiste !!
Espace des solutions plus grand !
Les solutions en sus sont utiles !

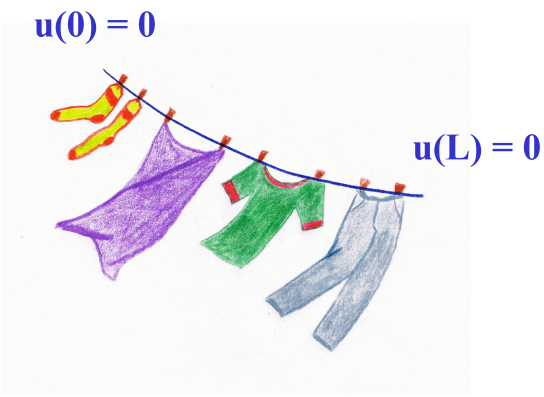
Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{< \frac{d\widehat{u}}{dx}\frac{du}{dx} >}_{a(\widehat{u},u)} = \underbrace{< \widehat{u} f >}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},$$

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},$$

Formulation faible



Problème discret

$$\sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_j = B_i, \qquad i = 2, N-1.$$

$$\begin{aligned} U_1 &= 0, \\ U_N &= 0, \end{aligned}$$

N-2 équations pour les valeurs intérieures
Deux conditions aux limites

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_\Omega \frac{d\tau_i}{dx}(x)\, \frac{d\tau_j}{dx}(x)\, dx, \\ B_i &= \int_\Omega f(x)\tau_i(x)\, dx, \end{aligned}$$

Problème discret

SPD6

$T = 1$

$$u^h = \sum U_i \tau_i$$

u(0) = 0

u(L) = 0

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \langle (\sum U_i \tau_i')(\sum U_j \tau_j') \rangle + \langle f (\sum U_i \tau_i) \rangle$$

$$\frac{1}{2} \sum_i U_i \sum_j U_j \underbrace{\langle \tau_i' \tau_j' \rangle}_{A_{ij}} + \sum U_i \underbrace{\langle f \tau_i \rangle}_{B_i}$$

$$\frac{\partial J}{\partial U_i} = 0$$

$$\boxed{\sum_{j=2}^{n-1} A_{ij} U_j = B_i}$$

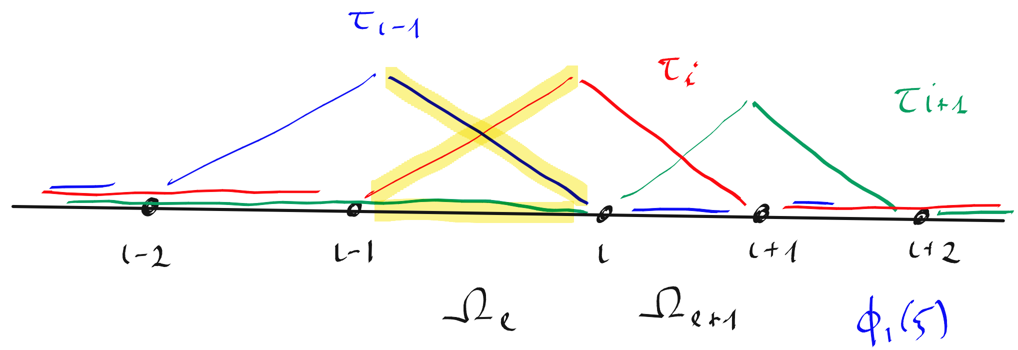
$i = 2 \ldots n-1$

$$J(U_1, U_2) = \frac{1}{2} \underbrace{\langle (U_1\tau_1' + U_2\tau_2')(U_1\tau_1' + U_2\tau_2') \rangle}_{U_1^2\langle\tau_1'\tau_1'\rangle + 2U_1U_2\langle\tau_1'\tau_2'\rangle + U_2^2\langle\tau_2'\tau_2'\rangle} + \langle f(U_1\tau_1 + U_2\tau_2)\rangle$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial U_1} = \cancel{\frac{1}{2}} \langle \cancel{2} U_1 \langle\tau_1'\tau_1'\rangle + \cancel{2} U_2 \langle\tau_2'\tau_1'\rangle + \langle f\tau_1\rangle$$

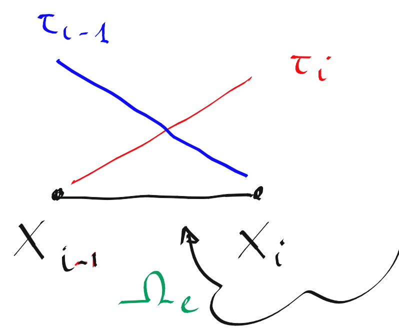
La version
pour toi qui
n’a pas compris !

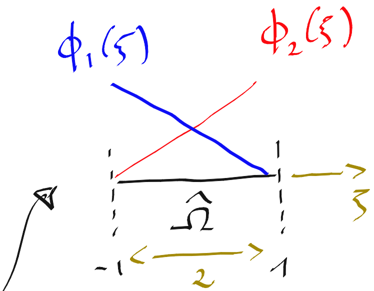
Construisons le système linéaire



$$A_{ij} = \langle \tau_i' \, \tau_j' \rangle$$

$$B_i = \langle \tau_i \, f \rangle$$





$$\phi_1(\xi) = (1-\xi)/2$$
$$\phi_2(\xi) = (1+\xi)/2$$

$$\underbrace{A_{ij}}_{\text{MATRICE GLOBALE } n \times n} = \underbrace{\oplus}_{\text{PROCÉDURE D'ASSEMBLAGE}} \underbrace{A^e_{ij}}_{\text{MATRICES LOCALES } 2 \times 2}$$

MATRICE GLOBALE

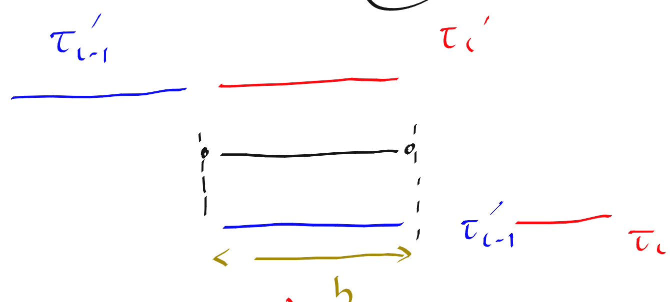
$n \times n$

PROCÉDURE D'ASSEMBLAGE

MATRICES LOCALES

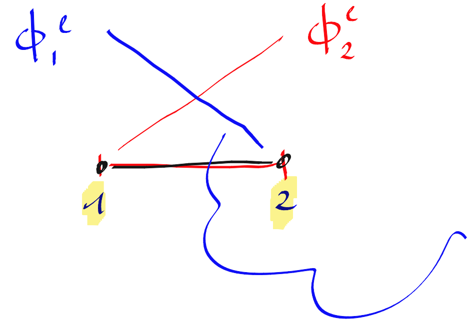
2×2

$$\int_\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e}$$



$$\tau_i = \phi_2^e$$
$$\tau_{i-1} = \phi_1^e$$

Assemblage des matrices locales



	$\phi_i(\xi)$	$\phi_i'(\xi)$
	$(1-\xi)/2$	$-1/2$
	$(1+\xi)/2$	$1/2$

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \frac{d\phi_i^e}{dx}\,\frac{d\phi_j^e}{dx}\,dx$$

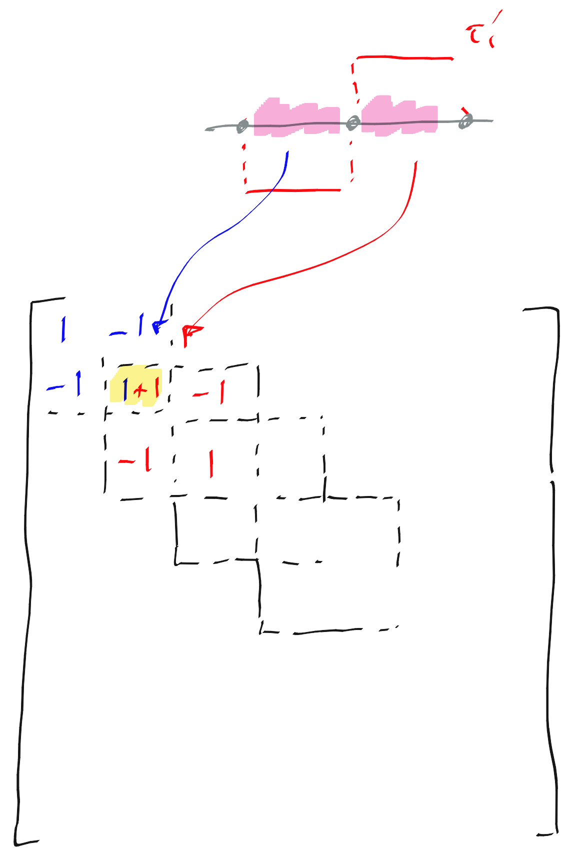
i, j: $1..2$, $1..2$

$$\underbrace{\cancel{\frac{h}{2}}\,\cancel{\frac{2}{h}}\,\frac{2}{h}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$B_i^e = \int_{\Omega_e} f\,\tau_i$$

$$B_i = \oplus\, B_i^e$$

$$A_{ij} = \frac{1}{h}$$



Construisons le système linéaire

$$\begin{aligned}
A_{i\ i-1} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{2,x}(x)\ \phi^e_{1,x}(x)\ dx, \\
A_{ii} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{2,x}(x)\ \phi^e_{2,x}(x)\ dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ dx, \\
A_{i\ i+1} &= \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_{1,x}(x)\ \phi^{e+1}_{2,x}(x)\ dx, \\
B_i &= \int_{\Omega_e} \phi^e_2(x)\ f(x)\ dx + \int_{\Omega_{e+1}} \phi^{e+1}_1(x)\ f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

On peut obtenir aisément
le système global
en assemblant les systèmes locaux !

Matrices de raideur locales

$$A^e_{ij} = \int_{\Omega_e} \phi^e_{i,x}(x)\ \phi^e_{j,x}(x)\ dx,$$

$$B^e_i = \int_{\Omega_e} f(x)\phi^e_i(x)\ dx.$$

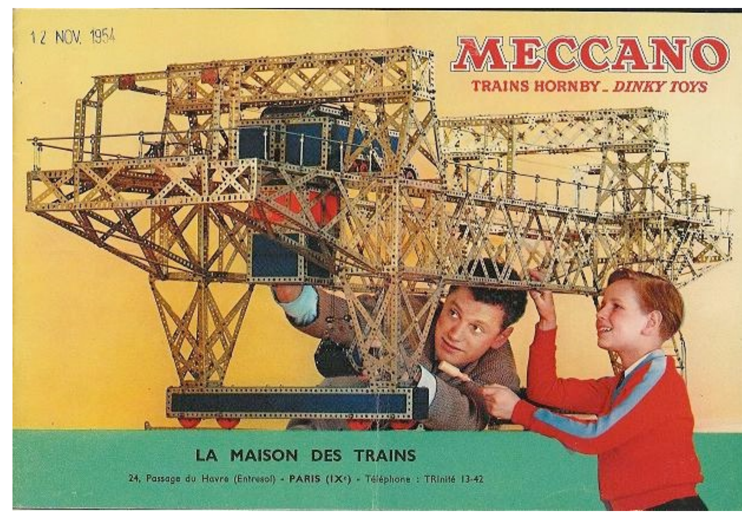
Vecteurs des forces locales

C' est comme construire un système multicorps !

$$
\begin{aligned}
A_{i\ i-1} &= A^e_{21}, \\
A_{ii} &= A^e_{22} + A^{e+1}_{11}, \\
A_{i\ i+1} &= A^{e+1}_{12}, \\
B_i &= B^e_2 + B^{e+1}_1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
B_1 & = & 0.5 & \\
 & & 0.5 & \\
 & & \dots & \\
 & & 1.0 & \\
B_i & = & 1.0 & \boxed{+\ 3.5} \\
 & & 0.0 & \\
 & & \dots & \\
 & & 1.0 & \\
B_j & & 0.5 & \boxed{+\ 4.5} \\
 & & 0.5 & \\
 & & \dots & \\
 & & 1.0 & \\
B_N & = & 4.0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
B^e_1 & = & 3.5 \\
B^e_2 & = & 4.5
\end{array}
$$

Eléments	Noeuds
...	
e	i j
...	



Chaque élément fini peut être vu comme une pièce d'un petit Mecano !

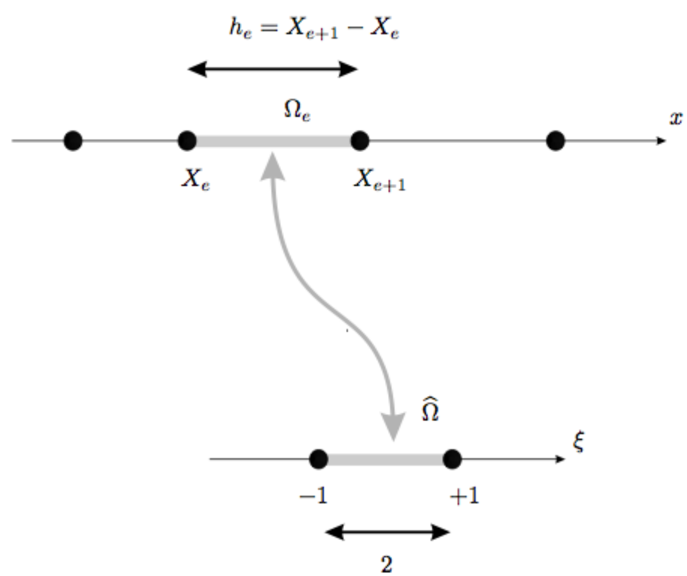
Il y a beaucoup d' intégrales !

$$
\begin{aligned}
x(\xi) &= \xi\frac{(X_{e+1}-X_e)}{2} + \frac{(X_{e+1}+X_e)}{2},\\
\xi(x) &= \frac{2x-(X_{e+1}+X_e)}{(X_{e+1}-X_e)}.
\end{aligned}
$$

Isomorphisme linéaire entre l'élément parent et tous les autres éléments…

$x(\xi) = \phi_1(\xi)\,X_1^e + \phi_2(\xi)\,X_2^e$

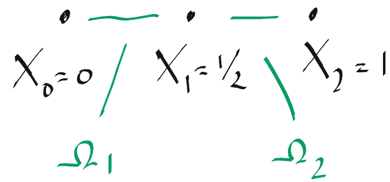
$$
\begin{aligned}
A^e_{ij} &= \int_{\Omega_e} \phi^e_{i,x}(x)\ \phi^e_{j,x}(x)\ dx,\\
&= \int_{-1}^{1} \left(\phi_{i,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\right)\ \left(\phi_{j,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\right)\ \left(\frac{dx}{d\xi}\ d\xi\right),\\
&= \int_{-1}^{1} \phi_{i,\xi}(\xi)\phi_{j,\xi}(\xi)\frac{d\xi}{dx}\ d\xi,\\
&= \frac{2}{(X_{e+1}-X_e)}\int_{-1}^{1} \phi_{i,\xi}(\xi)\phi_{j,\xi}(\xi)\ d\xi,\\
B^e_i &= \int_{\Omega} \phi^e_i(x)\ f(x)\ dx,\\
&= \frac{(X_{e+1}-X_e)}{2}\int_{-1}^{1} \phi_i(\xi) f(x(\xi))\ d\xi.
\end{aligned}
$$



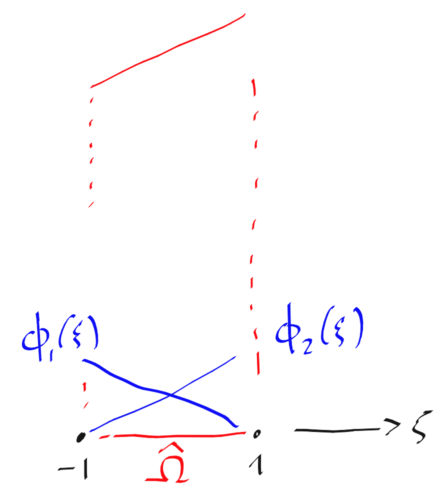
On intègre systématiquement sur l'élement parent !

Effectuons un tout petit exercice à la main

$f(x) = x$



$x = X_1^e \phi_1(\xi) + X_2^e \phi_2(\xi)$



$\phi_1(\xi) = (1-\xi)/2$

$\phi_2(\xi) = (1+\xi)/2$

$$A^e_{ij} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_i^e = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \left(X_1^e \phi_1(\xi) \quad X_2^e \phi_2(\xi)\right) \phi_1(\xi) \, d\xi \\ \int_{-1}^{1} \left(X_1^e \phi_1(\xi) \quad X_2^e \phi_2(\xi)\right) \phi_2(\xi) \, d\xi \end{bmatrix}$$

$$B_i^e = \langle f \, \phi_i^e \rangle_{\Omega_e}$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_1^2 = \int_{-1}^{1} \frac{(1+\xi)^2}{4} = \overbrace{\frac{1}{4}\left[\xi + \frac{\xi^3}{3} \dots \right]_{-1}^{1}}^{2/3}$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_1 \phi_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{4} = \frac{1}{4}\left[\xi - \frac{\xi^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1/3$$

$$B_i^e = \frac{h}{2}\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \left(X_1^e\,\phi_1(\xi) \quad X_2^e\,\phi_2(\xi) \right) \phi_1(\xi)\, d\xi \\ \int_{-1}^{1} \left(X_1^e\,\phi_1(\xi) \quad X_2^e\,\phi_2(\xi) \right) \phi_2(\xi)\, d\xi \end{bmatrix}$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_1^2 = \int_{-1}^{1} \frac{(1+\xi)^2}{4} = \overbrace{\frac{1}{4}\left[\xi + \frac{\xi^3}{3} \dots \right]_{-1}^{1}}^{2/3}$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_1 \phi_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{4} = \frac{1}{4}\left[\xi - \frac{\xi^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1/3$$

$$B_i^e = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2X_1^e + X_2^e \\ X_1^e + 2X_2^e \end{bmatrix}$$

$x = 1/2$ $\quad$ $x = 1$

$x = 0$ $\quad$ $x = 1/2$

$$B_i = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 + 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 6/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$U_1 = 0 \qquad U_3 = 0$

$$\boxed{U_2 = \frac{h^2}{4}}$$

Et zou !

Effectuons un tout petit exercice à la main :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= (1-\xi)/2, & \phi_{1,\xi}(\xi) &= -1/2, \\ \phi_2(\xi) &= (1+\xi)/2, & \phi_{2,\xi}(\xi) &= 1/2. \end{aligned}$$

$$B_i^e = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2X_e + X_{e+1} \\ X_e + 2X_{e+1} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^1 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_i^1 = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^2 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_i^2 = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

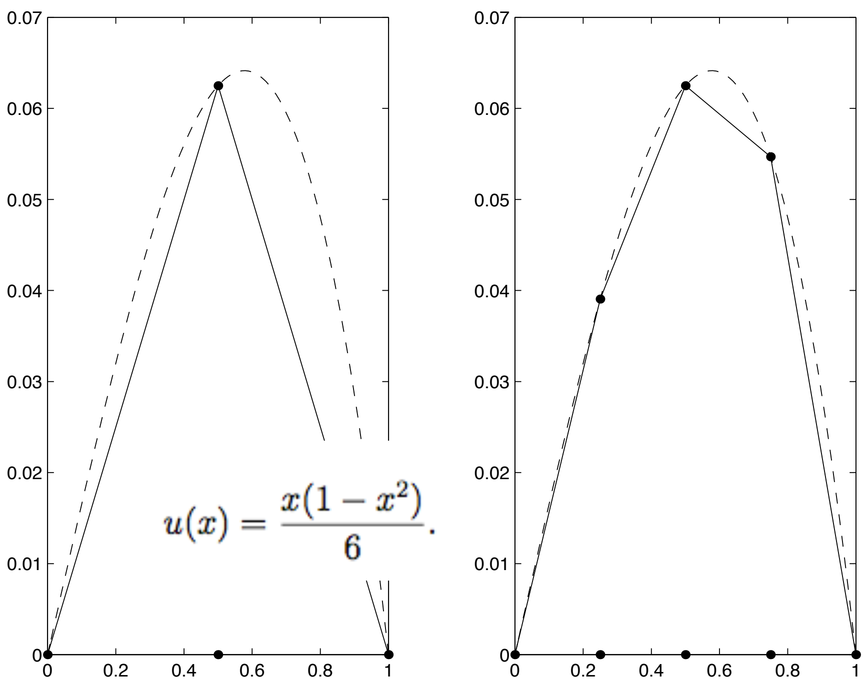
$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 6/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

Système discret

$f(x) = x$

Exemple

$f(x) = x$



$$u(x) = \frac{x(1-x^2)}{6}.$$

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/4 \\ 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \\ 11/4 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 6/4 \\ 12/4 \\ 18/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/128 \\ 8/128 \\ 7/128 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Système discret :
3 valeurs nodales inconnues
2 conditions aux limites

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 6/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = h^2/4 = 1/16,$$

Système discret :
1 valeur nodale inconnues
2 conditions aux limites

Les éléments finis fournissent la solution exacte ! Miracle !

$$u \simeq u^h = \sum U_i \tau_i$$

$$u'' + f = 0$$

$$\underbrace{\langle u'' \tau_i \rangle} + \langle f \tau_i \rangle = 0$$

$$\underbrace{\sum_e -\langle u' \tau_i' \rangle_e} + \underbrace{[\tau_i u']_e}_{=0}$$

$$\sum_e \underbrace{\langle u \tau_i'' \rangle}_{=0} - \overbrace{[\underbrace{u}_{=u^*} \tau_i']_e} = [u^* \tau_i']_e$$

CAR LES FONCTIONS DE FORME SONT LINEAIRE

SUR LES NOEUDS

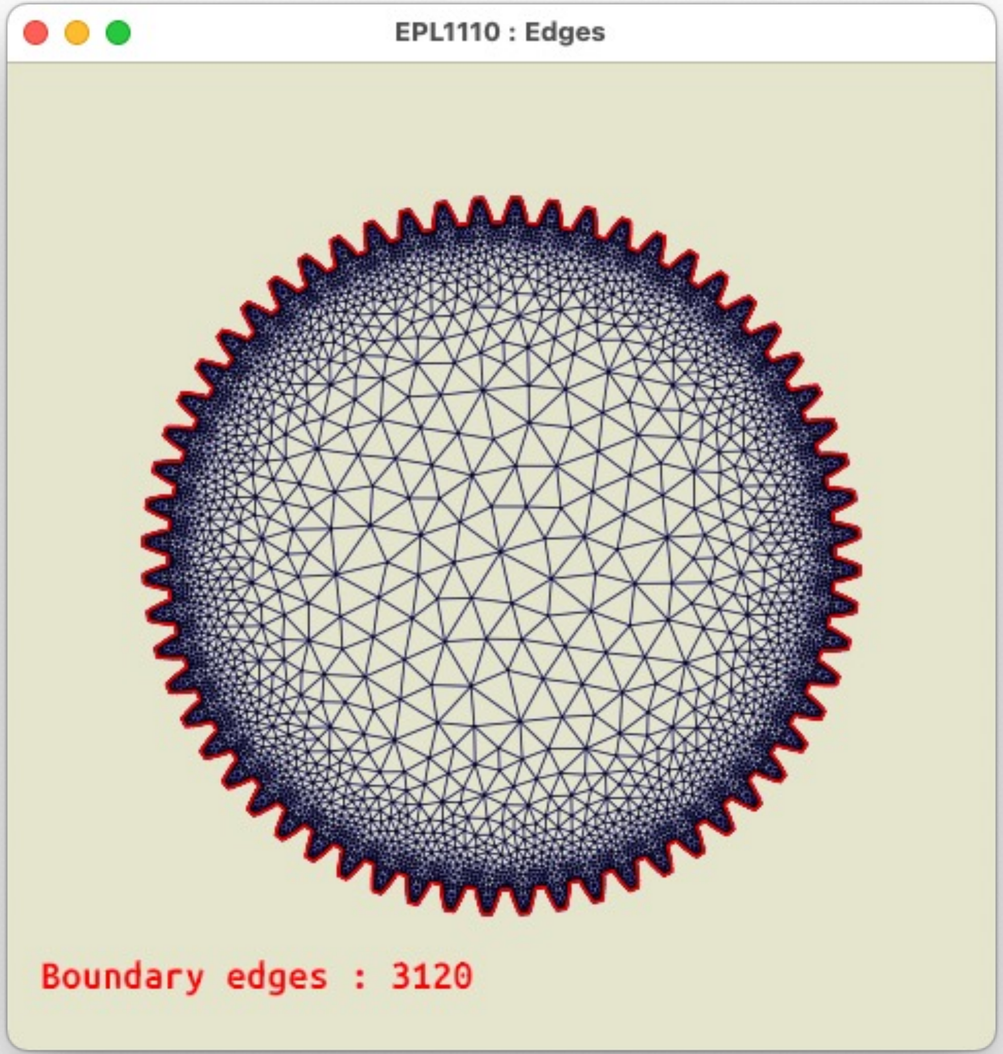
$$u^* = \sum u(X_i)\, \tau_i$$

INTERPOLATION SOLUTION EXACTE

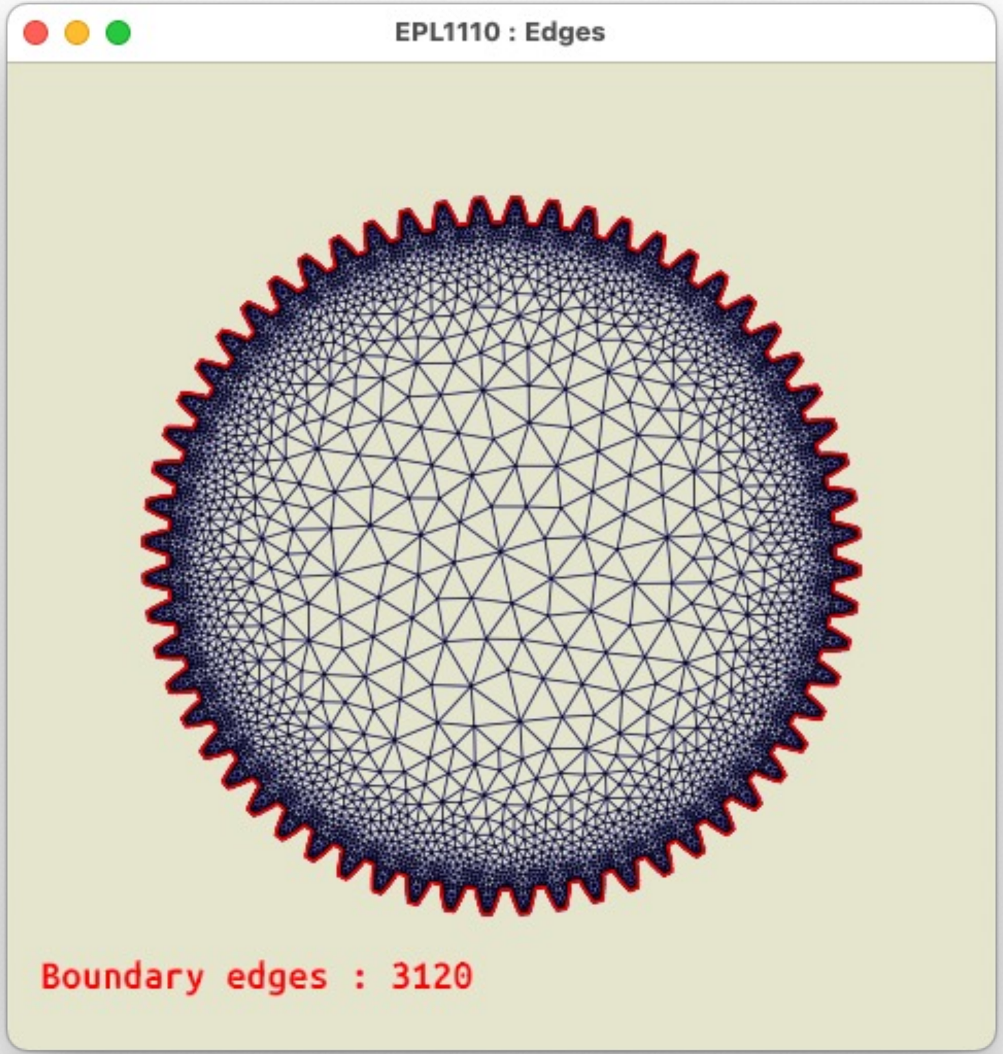
$$= \sum_e -\langle \sum_j u(X_j)\, \tau_j' \tau_i' \rangle_e$$

$$= \sum_j u(X_j) \langle \tau_j \tau_i \rangle$$

$\square$



Le maillage est un graphe !



Déduire la table des segments
Obtenir la frontière du maillage
Obtenir la longueur de la frontière

Une structure pour un segment

EDGE/
ARETE

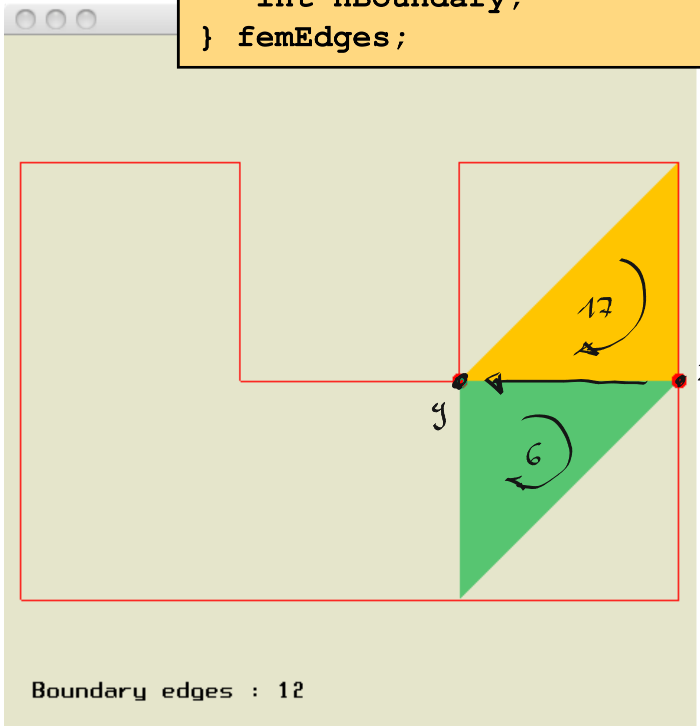
```
typedef struct {
    int elem[2];
    int node[2];
} femEdge;
```

EDGES

```
typedef struct {
    femMesh *mesh;
    femEdge *edges;
    int nEdge;
    int nBoundary;
} femEdges;
```

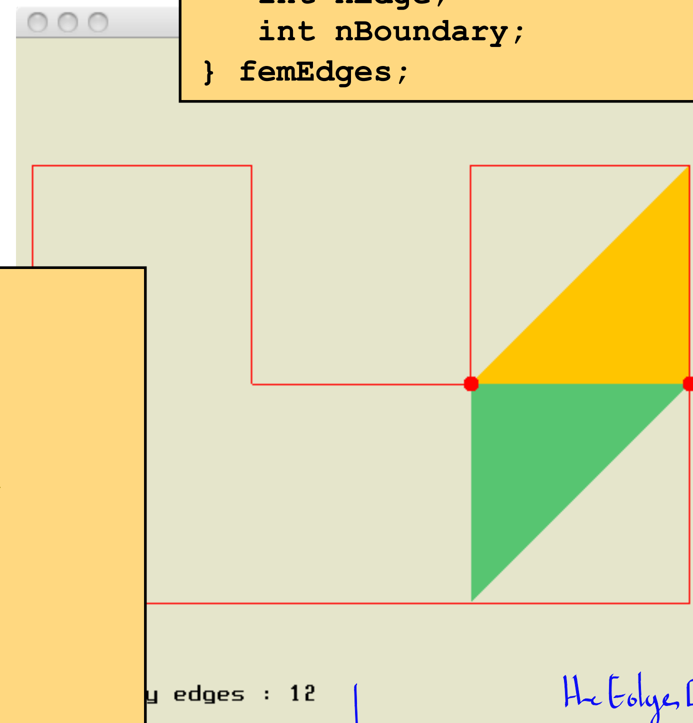
Nous allons faire les tâches suivantes :

- Collationner tous les segments
- Les trier…
- Supprimer les doublons
- Identifier les segments frontières

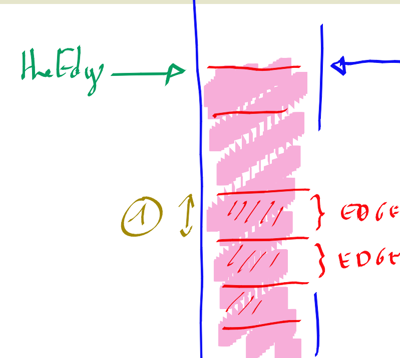


Une structure pour les segments

```
typedef struct {
    femMesh *mesh;
    femEdge *edges;
    int nEdge;
    int nBoundary;
} femEdges;
```




```
femEdges *femEdgesCreate(femMesh *theMesh)
{
    femEdges *theEdges = malloc(sizeof(femEdges));
    int nLoc = theMesh->nLocalNode;
    int n    = theMesh->nElem * nLoc;
    femEdge* edges = malloc(n * sizeof(femEdge));
    theEdges->mesh  = theMesh;
    theEdges->edges = edges;
    theEdges->nEdge = n;
    theEdges->nBoundary = n;
    return theEdges;
}
```

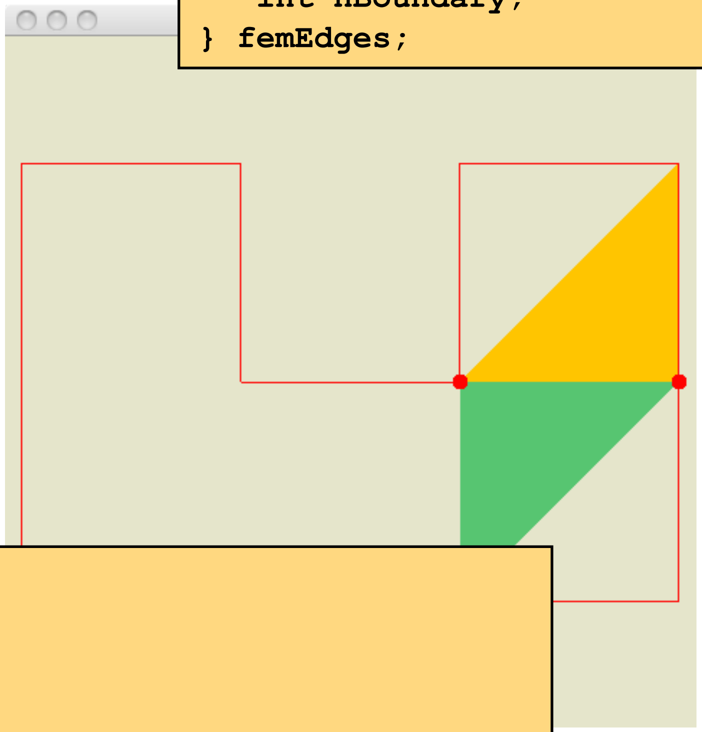



```
void femEdgesFree(femEdges *theEdges)
{
    free(theEdges->edges);
    free(theEdges);
}
```

Accéder aux données de la structure dont on a l'adresse !

```
typedef struct {
    int elem[2];
    int node[2];
} femEdge;
```

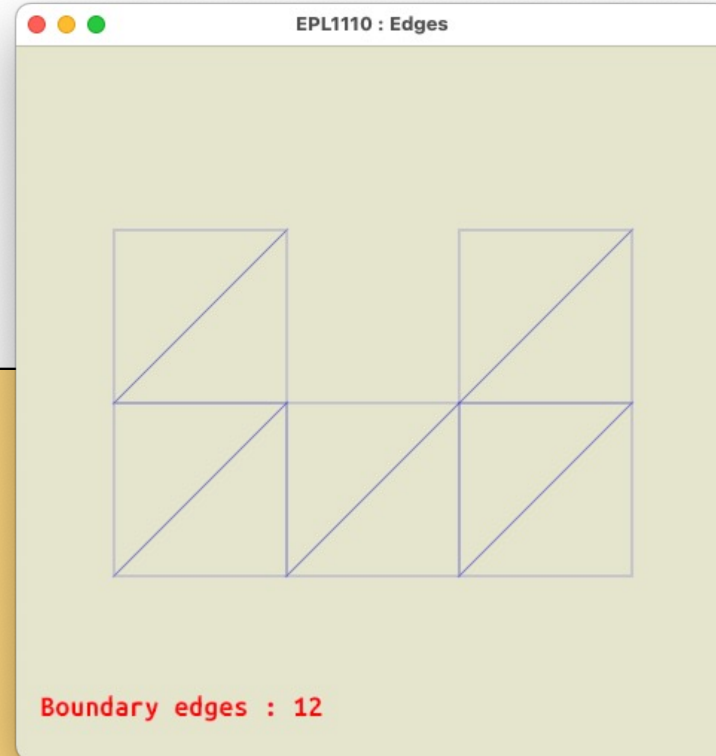
```
typedef struct {
    femMesh *mesh;
    femEdge *edges;
    int nEdge;
    int nBoundary;
} femEdges;
```



```
void femEdgesPrint(femEdges *theEdges)
{
    int i;
    for (i = 0; i < theEdges->nEdge; ++i) {
        printf("%6d : %4d %4d : %4d %4d \n",i,
               theEdges->edges[i].node[0],theEdges->edges[i].node[1],
               theEdges->edges[i].elem[0],theEdges->edges[i].elem[1]); }
}
```

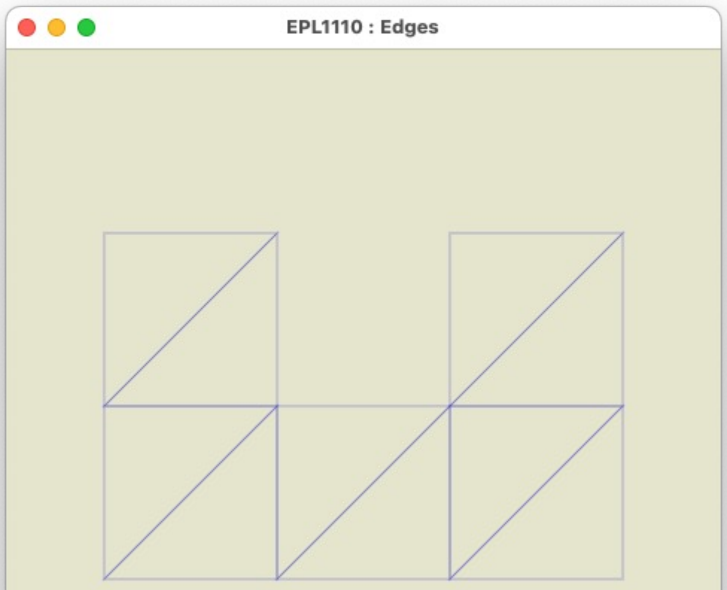
Et vraiment concrètement ?

```
Number of nodes 12
      0 :  0.0000000e+00  2.0000000e+00
      1 :  1.0000000e+00  2.0000000e+00
      2 :  0.0000000e+00  1.0000000e+00
      3 :  1.0000000e+00  1.0000000e+00
      4 :  0.0000000e+00  0.0000000e+00
      5 :  1.0000000e+00  0.0000000e+00
      6 :  2.0000000e+00  1.0000000e+00
      7 :  2.0000000e+00  0.0000000e+00
      8 :  3.0000000e+00  0.0000000e+00
      9 :  3.0000000e+00  1.0000000e+00
     10 :  2.0000000e+00  2.0000000e+00
     11 :  3.0000000e+00  2.0000000e+00
Number of triangles 10
      0 :        0      2      1
      1 :        2      3      1
      2 :        4      3      2
      3 :        5      7      6
      4 :        7      9      6
      5 :        7      8      9
      6 :        6     11     10
      7 :        9     11      6
      8 :        4      5      3
      9 :        5      6      3
```



Collationner tous les segments

10 éléments
30 segments

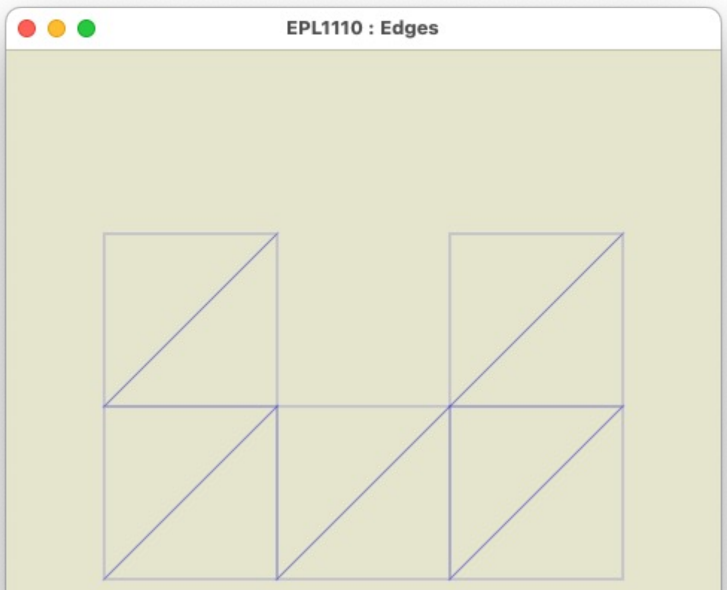


Les segments internes apparaissent deux fois !
Par contre, les segments frontières sont uniques

0	:	0	2	:	0	-1
1	:	2	1	:	0	-1
2	:	1	0	:	0	-1
3	:	2	3	:	1	-1
4	:	3	1	:	1	-1
5	:	1	2	:	1	-1
6	:	4	3	:	2	-1
7	:	3	2	:	2	-1
8	:	2	4	:	2	-1
9	:	5	7	:	3	-1
10	:	7	6	:	3	-1
11	:	6	5	:	3	-1
12	:	7	9	:	4	-1
13	:	9	6	:	4	-1
14	:	6	7	:	4	-1
15	:	7	8	:	5	-1
16	:	8	9	:	5	-1
17	:	9	7	:	5	-1
18	:	6	11	:	6	-1
19	:	11	10	:	6	-1
20	:	10	6	:	6	-1
21	:	9	11	:	7	-1
22	:	11	6	:	7	-1
23	:	6	9	:	7	-1
24	:	4	5	:	8	-1
25	:	5	3	:	8	-1
26	:	3	4	:	8	-1
27	:	5	6	:	9	-1
28	:	6	3	:	9	-1
29	:	3	5	:	9	-1

Trier les segments

10 éléments
30 segments

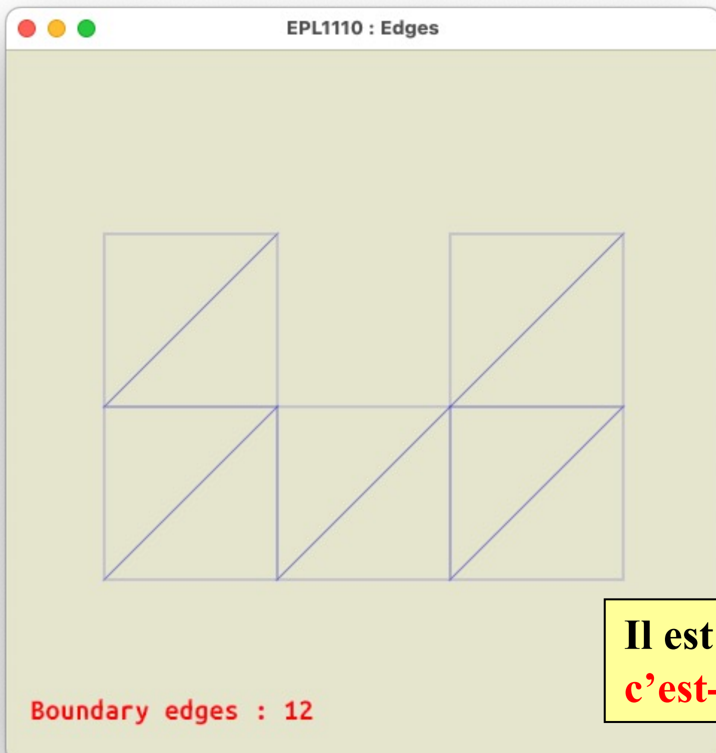


0	:	11	10	:	6	-1
1	:	9	11	:	7	-1
2	:	8	9	:	5	-1
3	:	7	9	:	4	-1
4	:	9	7	:	5	-1
5	:	7	8	:	5	-1
6	:	6	11	:	6	-1
7	:	11	6	:	7	-1
8	:	10	6	:	6	-1
9	:	9	6	:	4	-1
10	:	6	9	:	7	-1
11	:	6	7	:	4	-1
12	:	7	6	:	3	-1
13	:	5	7	:	3	-1
14	:	6	5	:	3	-1
15	:	5	6	:	9	-1
16	:	4	5	:	8	-1
17	:	6	3	:	9	-1
18	:	3	5	:	9	~~-1~~ 8
~~19~~	~~:~~	~~5~~	~~3~~	~~:~~	~~8~~	~~-1~~
20	:	3	4	:	8	-1
21	:	4	3	:	2	-1
22	:	2	4	:	2	-1
23	:	3	2	:	2	-1
24	:	2	3	:	1	-1
25	:	3	1	:	1	-1
26	:	2	1	:	0	-1
27	:	1	2	:	1	-1
28	:	0	2	:	0	-1
29	:	1	0	:	0	-1

On effectue un tri afin d'accoupler les doublons dans la liste des segments...

Supprimer les doublons

9 segments internes
12 segments frontières



0	:	11	10	:	6	-1
1	:	9	11	:	7	-1
2	:	8	9	:	5	-1
3	:	7	9	:	4	5
4	:	7	8	:	5	-1
5	:	6	11	:	6	7
6	:	10	6	:	6	-1
7	:	9	6	:	4	7
8	:	6	7	:	4	3
9	:	5	7	:	3	-1
10	:	6	5	:	3	9
11	:	4	5	:	8	-1
12	:	6	3	:	9	-1
13	:	3	5	:	9	8
14	:	3	4	:	8	2
15	:	2	4	:	2	-1
16	:	3	2	:	2	1
17	:	3	1	:	1	-1
18	:	2	1	:	0	1
19	:	0	2	:	0	-1
20	:	1	0	:	0	-1

2e ELEMENT

1e ELEM

Il est possible d'effectuer cette opération en place,
c'est-à-dire en travaillant dans le même tableau !

```
qsort(edges,n,sizeof(femEdge),edgeCompare);
```

0	:	11	6	:	7	-1
1	:	11	10	:	6	-1
2	:	10	6	:	6	-1
3	:	9	7	:	5	-1
4	:	9	6	:	4	-1
5	:	9	11	:	7	-1
6	:	8	9	:	5	-1
7	:	7	6	:	3	-1
8	:	7	8	:	5	-1
9	:	7	9	:	4	-1
10	:	6	5	:	3	-1
11	:	6	3	:	9	-1
12	:	6				
13	:	6				
14	:	6				
15	:	5				
16	:	5				
17	:	5				
18	:	4				
19	:	4				
20	:	3	5	:	9	-1
21	:	3	1	:	1	
22	:	3	2	:	2	
23	:	3	4	:	8	
24	:	2	3	:	1	
25	:	2	1	:	0	
26	:	2	4	:	2	
27	:	1	2	:	1	
28	:	1	0	:	0	
29	:	0	2	:	0	-1

Trier en C :-)

```
int edgeCompare(const void* e0, const void *e1)
{
   int diagnostic = ((femEdge*) e0)->node[0] - ((femEdge*) e1)->node[0];
   if (diagnostic < 0)   return 1;
   if (diagnostic > 0)   return -1;
                         return 0;
}
```

Le tri implémenté est un algorithme très efficace !
Pour pouvoir accèder aux données de la structure, il faut un cast
Attention : C permet de caster n'importe quoi en n'importe quoi…

Be careful !

Mais, c'est pas tout à fait le bon tri à faire finalement !

Et détecter les segments frontières !

0	:	11	10	:	6	-1
1	:	9	11	:	7	-1
2	:	8	9	:	5	-1
3	:	7	9	:	4	5
4	:	7	8	:	5	-1
5	:	6	11	:	6	7
6	:	10	6	:	6	-1
7	:	9	6	:	4	7
8	:	6	7	:	4	3
9	:	5	7	:	3	-1
10	:	6	5	:	3	9
11	:	4	5	:	8	-1
12	:	6	3	:	9	-1
13	:	3	5	:	9	8
14	:	3	4	:	8	2
15	:	2	4	:	2	-1
16	:	3	2	:	2	1
17	:	3	1	:	1	-1
18	:	2	1	:	0	1
19	:	0	2	:	0	-1
20	:	1	0	:	0	-1