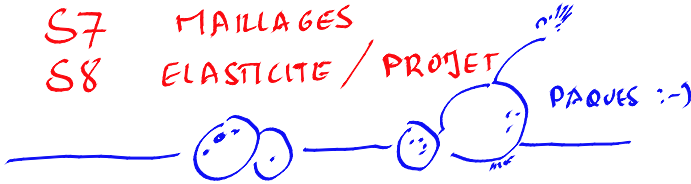


Planning des activités

S7 MAILLAGES

S8 ELASTICITE / PROJET

PAQUES :-)



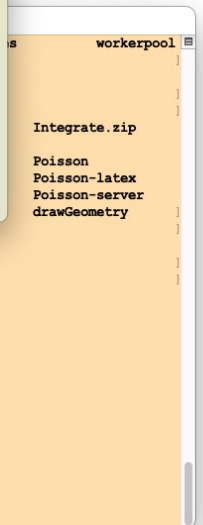
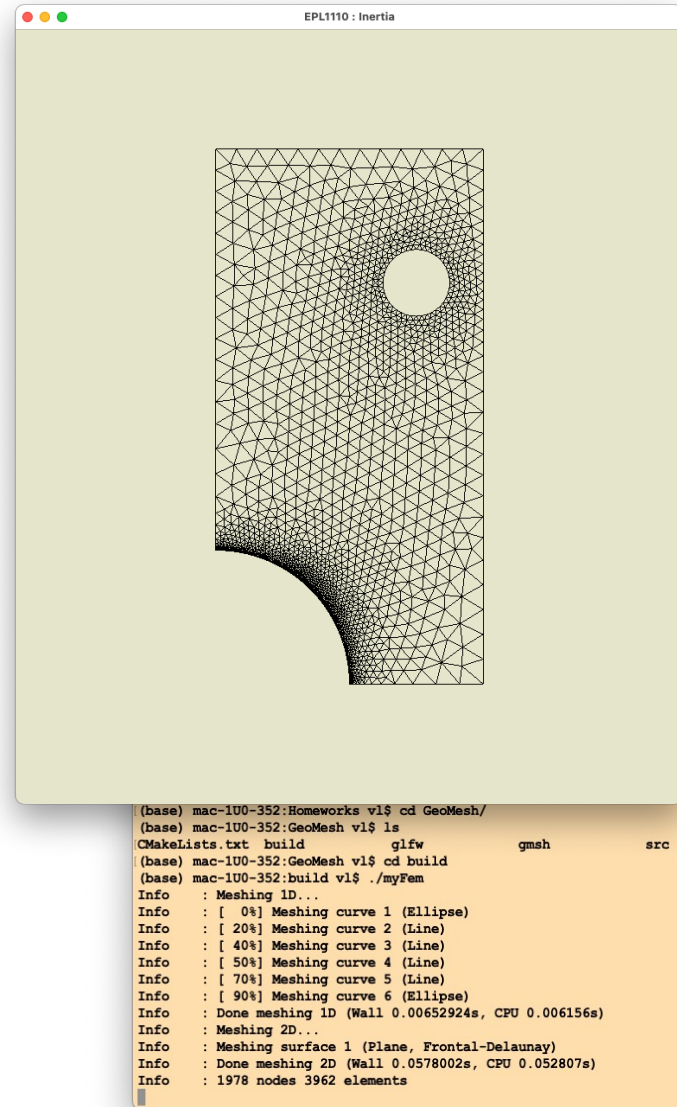
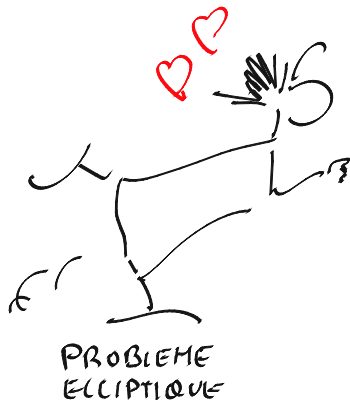
S9 INTERROGATION 21/4

S10 ELASTICITE

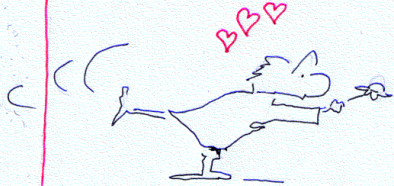
S11

S12 → REMISE PROJET 12/5

S13 → INTERVIEW ORALE 15-16-17/5



PROBLÈME
ELLIPTIQUE



ELEMENTS
FINIS *



* USUAL FEM "
CLASSICAL
GALERKIN
FORMULATION

Un peu de mathématiques
pour les éléments finis

Typical Elliptic Boundary Value Problem

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{\langle (\nabla \hat{u}) \cdot (a \nabla u) \rangle}_{a(\hat{u}, u)} = \underbrace{\langle \hat{u} f \rangle + \ll \hat{u} g \gg_N}_{b(\hat{u})}, \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}},$$

Exemple de la conduction thermique

Equation elliptique

Il faut imposer une condition sur l'ensemble de la frontière !

Il faut au moins un point avec une condition essentielle !

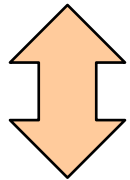
*Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet*



*Conditions naturelles
Conditions de Neumann*

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\hat{u}, u) = b(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}},$$



Trouver $u \in \mathcal{U}$ tel que

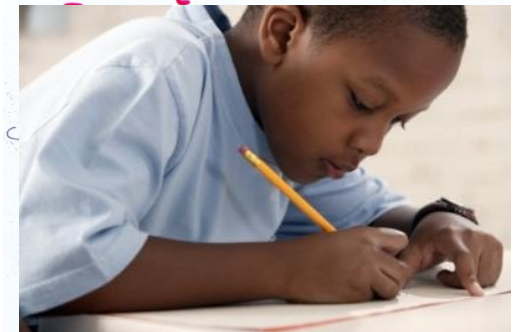
$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\frac{1}{2} a(v, v) - b(v)}_{J(v)},$$

Abstract generic elliptic problem

Il est aussi temps de commencer à se poser quelques questions sur la définition de l'espace fonctionnel...

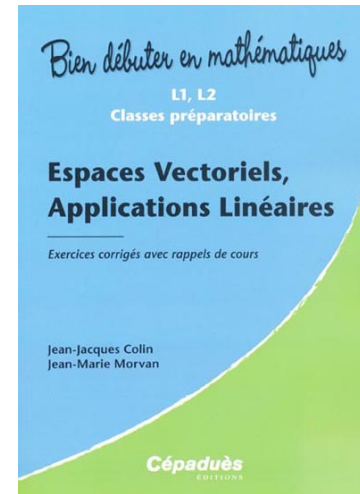
a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive
 b est une forme linéaire et continue

Ces hypothèses sont satisfaites pour un problème faible d'une équation elliptique...



C'est quoi une forme linéaire ?

Supposons tout d'abord que U est un espace vectoriel...



b est une forme linéaire si

$$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}$$

a est une forme bilinéaire si

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$$

C'est quoi une forme continue ?

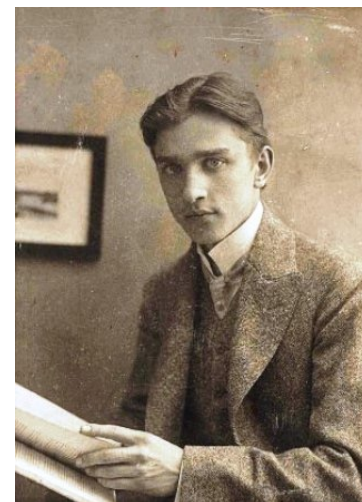
b est une forme continue si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |b(u)| \leq c \|u\| \\ \forall u \in \mathcal{U}$$

a est une forme continue si

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \\ \forall u, v \in \mathcal{U}$$

Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



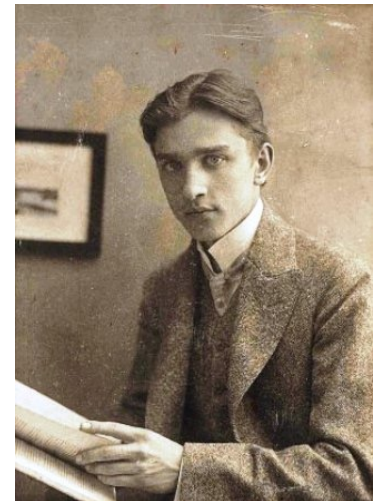
Donnons une norme à notre espace vectoriel \mathcal{U} ...
Supposons en outre qu'il soit complet¹
Il devient un joli espace de Banach

¹Un espace \mathcal{U} est complet pour une norme $\| \cdot \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\| \cdot \|$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \dots\}$ est une suite telle que $\forall \varepsilon \exists n \|u_i - u_j\| < \varepsilon, i, j > n$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ converge vers u si $\|u - u_i\| \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

C'est quoi une forme coercive ?

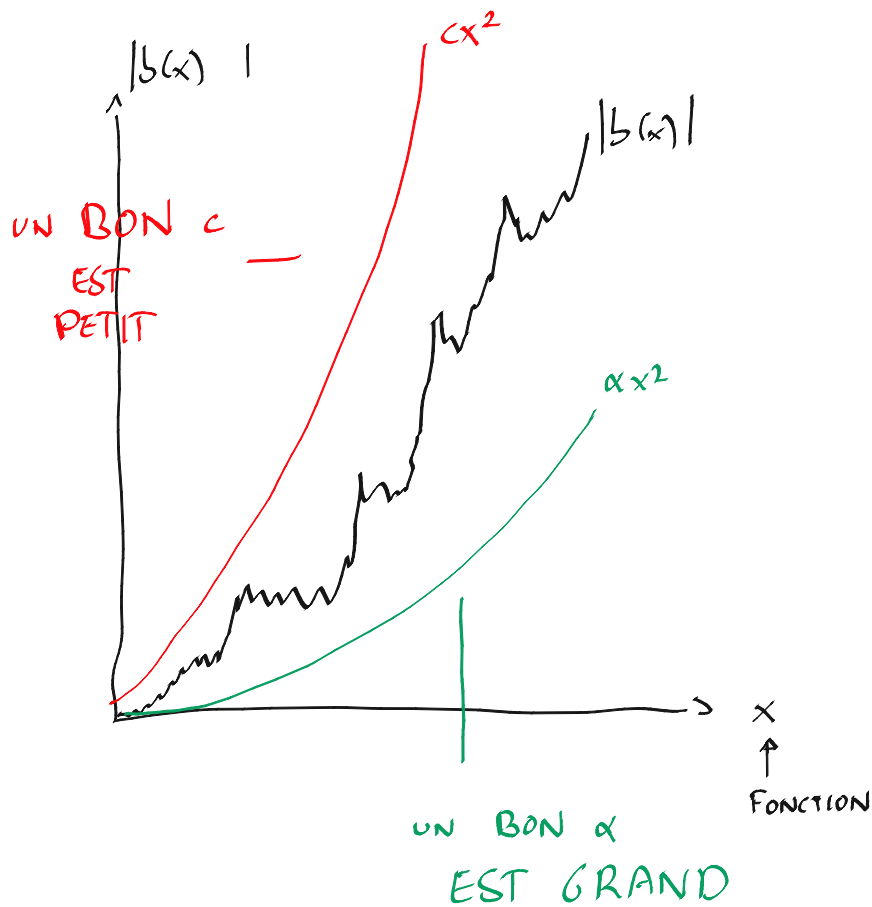
a est une forme coercive ou \mathcal{U} -elliptique si $\exists \alpha > 0$ tel que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$
 $\forall u \in \mathcal{U}$

Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



Donnons une norme à notre espace vectoriel U ...
Supposons en outre qu'il soit complet¹
Il devient un joli espace de Banach

¹Un espace \mathcal{U} est complet pour une norme $\| \cdot \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\| \cdot \|$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \dots\}$ est une suite telle que $\forall \varepsilon \exists n \forall i, j > n \|u_i - u_j\| < \varepsilon$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ converge vers u si $\|u - u_i\| \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...



Continu
coercif
mais
concrètement ?

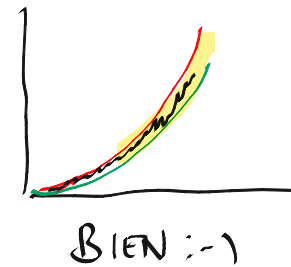
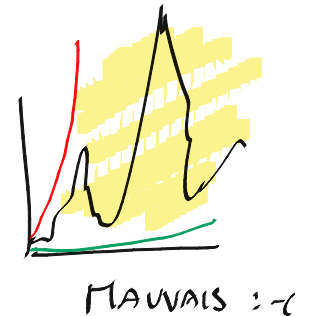
$$b(x) \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

CONTINUITÉ

$$\exists c > 0 \quad |b(x)| < cx^2$$

COERCIVITE

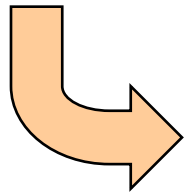
$$\exists \alpha > 0 \quad \alpha x^2 \leq |b(x)|$$



C'est quoi une forme continue et coercive ?

a est une forme définie positive
ou est un produit scalaire pour \mathcal{U} si

$$\begin{aligned} & a \text{ symétrique,} \\ & a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \neq 0 \in \mathcal{U} \\ & a(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$



$$\langle u, v \rangle_* = a(u, v);$$

**Donnons un produit scalaire à notre espace vectoriel U ...
Supposons en outre qu'il soit complet¹
Il devient un joli espace de Hilbert**

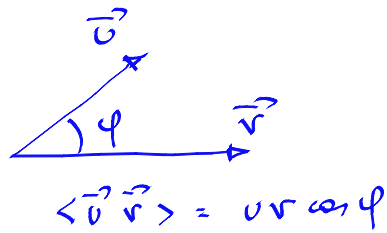
C'est un produit scalaire !

David Hilbert
Germany 1862–1943



Inégalité de Cauchy

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$



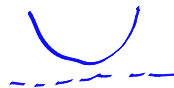
$$0 \leq \langle (u + \lambda v), (u + \lambda v) \rangle$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $u, v \in U$

$$\leq \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

POLYNOME
OU 2^e DEGRÉ

$$c + 2\lambda b + a\lambda^2$$



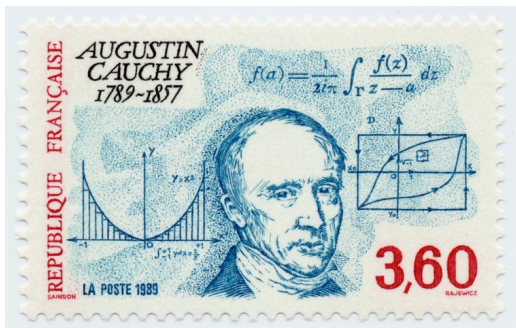
$$b^2 - ac < 0$$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2}$$



Inégalité de Cauchy

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$



$0 \leq \langle \underbrace{u + \lambda v}_{\in U}, \underbrace{u + \lambda v}_{\in R} \rangle$
 $\leq \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle$

SECOND ORDER POLYNOMIAL $c + 2b\lambda + \lambda^2 a$
 POSITIVE FOR ALL λ \cup $b^2 - ac < 0$

$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$
 $\langle u, v \rangle \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$
 $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$

□

Théorème de Lax-Milgram :-)

Si \mathcal{U} est un espace d'Hilbert
 a est une forme bilinéaire continue et coercive
 b est une forme linéaire continue,

alors, le problème abstrait

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\hat{u}, u) = b(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},$$

a une solution unique
 qui dépend continûment du terme source b ($\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$).

NORME DE LA FONCTIONNELLE b

α COERCIVITE :-)

NORME SOLUTION

où la norme d'une forme b est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

Notre problème est bien posé !

La solution existe, est unique et dépend gentiment des données...

Peter Lax
 Budapest 1926



Arthur Milgram
 Philadelphia 1912 – 1962

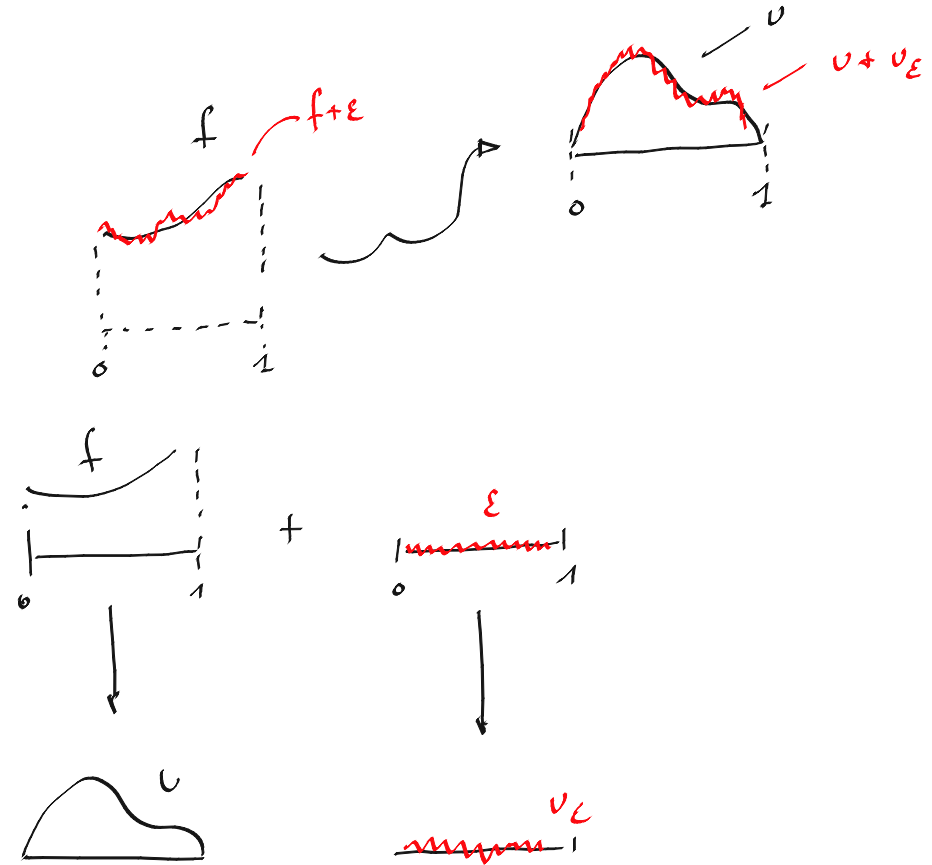


$$k \frac{dv}{dx^2} = f$$

$$\|v\| < \frac{1}{\alpha} \|b\|$$

CONSTANTE DE COERCIVITE

$$\|b\| \triangleq \sup_{v \in U} \frac{|b(v)|}{\|v\|}$$



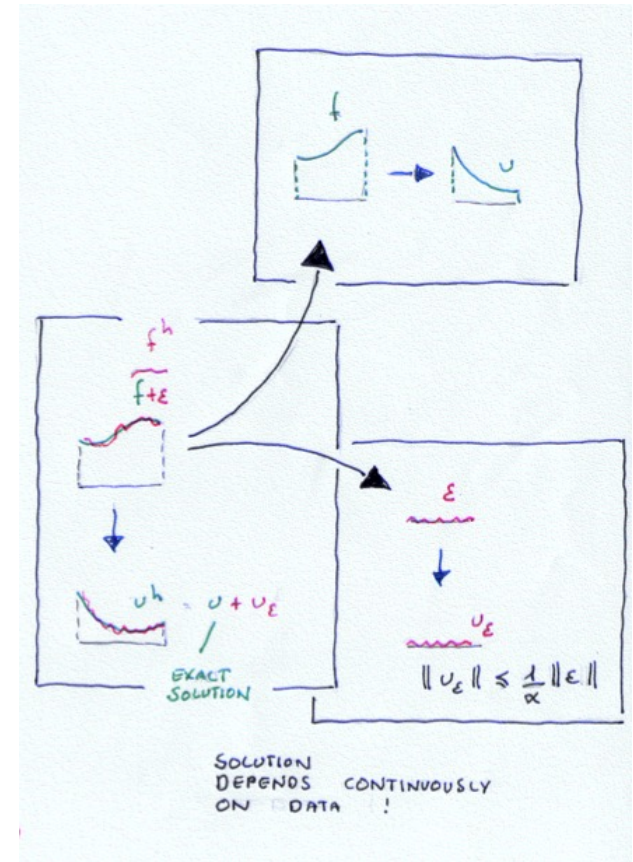
Qui dépend
continûment du
terme source...

Ce théorème implique la stabilité
des problèmes
elliptiques...

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$$



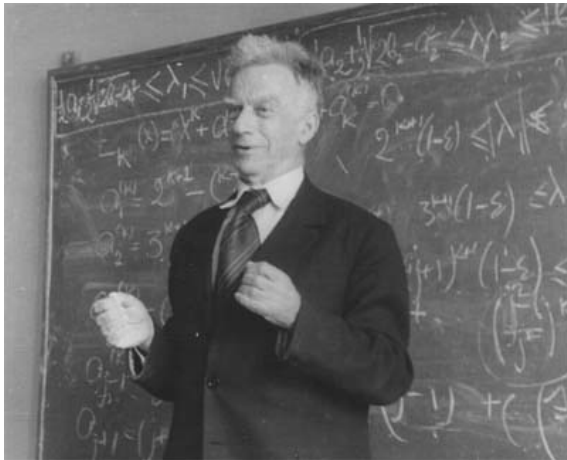
Constante de coercivité
Plus la constante est grande,
plus c'est stable !



...et ça c'est vachement utile !

Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev
Saint-Petersburg 1908 - 1989



$$L_2(\Omega) = H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H_2 \subset H_1 \subset H_0$$

Définissons formellement $U \dots$

Définissons des normes et des produits scalaires !

**Les dérivées sont comprises au sens des distributions
afin de rendre les espaces complets !**

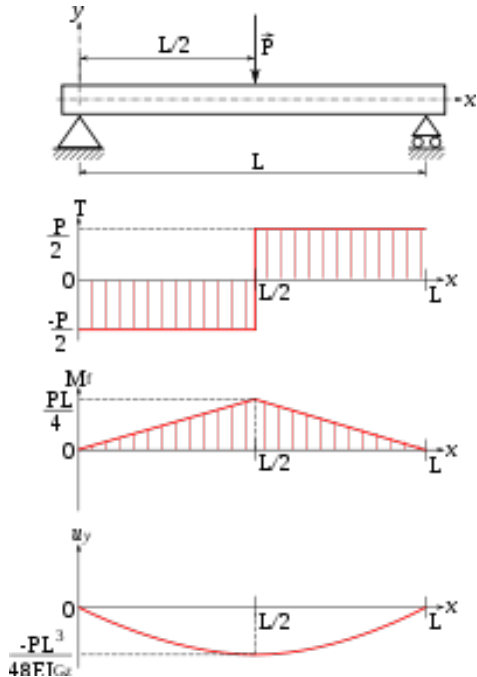
Ce sont les espaces de Sobolev !

$$\langle uv \rangle_0 = \int_{\Omega} uv dx$$

$$\langle uv \rangle_1 = \int_{\Omega} uv + u'v' dx$$

$$\langle uv \rangle_2 = \int_{\Omega} uv + u'v' + v''v'' dx$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$



Characterizing the smoothness of a function

$$H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

$$x^{-1/4} \in L_2(]0, 1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \left[2 x^{1/2} \right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \left[\ln(x) \right]_0^1 = \infty$$

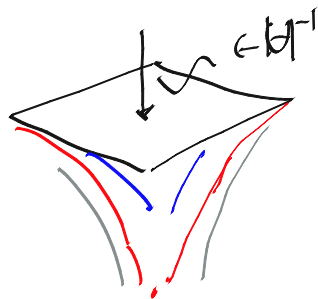
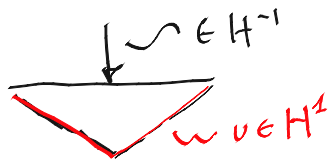
$$x^{-1/2} \notin L_2(]0, 1[)$$

Ce n'est pas
toujours
évident ...

Théorèmes d'immersion de Sobolev
Est-ce que c'est continu, ces brots ?

Si $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $2k > n$, $n=2$
 $2 \neq 2$ PAS VRAI } CONTINU
 alors $H^k(\Omega) \subset \{w \in C^0(\bar{\Omega}) \mid \exists c |w(x)| < c, \forall x \in \Omega\}$
 PAS D'OFFICE

Si $\Omega \subset \mathcal{R}$,
 alors $H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \in C^k(\bar{\Omega}) \mid \exists c |w(x)| < c, \forall x \in \Omega\}$



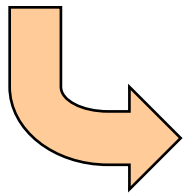
Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !

Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l'infini sous la force !

Et finalement, $a(u,v)$ est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v,v) - b(v) \right)}_{J(v)},$$

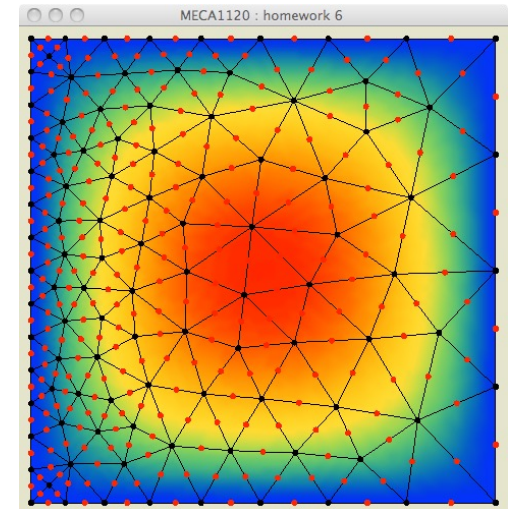


Pour le cas de la conduction stationnaire

$$\mathcal{U} = \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$a(u,v) = \langle \nabla u \cdot k \nabla v \rangle$$

$$b(u) = \langle fu \rangle$$



Continu

$$a(u, v) = \int_0^1 k u' v' dx$$

INEGALITE
DE CAUCHY

$$|a(u, v)| = k \langle u', v' \rangle \leq k \|u'\|_0 \|v'\|_0 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

$$v(x) - v(0) = \int_0^x v'(t) dt$$

$$(v(x))^2 \leq \int_0^x dt \int_0^x (v')^2 dt \leq \|v'\|_0^2$$

$$\|v'\|_0^2 + \|v\|_0^2 \leq C_1 \|v'\|_0^2 + \|v'\|_0^2 \leq (C_1 + 1) \|v'\|_0^2$$

$$C_2 \|v\|_1^2 \leq |a(v, v)|$$

□

$$\langle v', 1 \rangle_{0, x \in \Gamma} = \int_0^x dx$$

Coercif

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{dv}{dx}(t) dt$$

↓ Par l'inégalité de Cauchy $\langle v, x, 1 \rangle \leq \|v, x\| \|1\|$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}$$

↓ En intégrant sur Ω

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2$$

↓

$$kC_2 \underbrace{\left(\|v\|_0^2 + \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2\right)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}_{a(v, v)}$$

C'est coercif !

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0$$

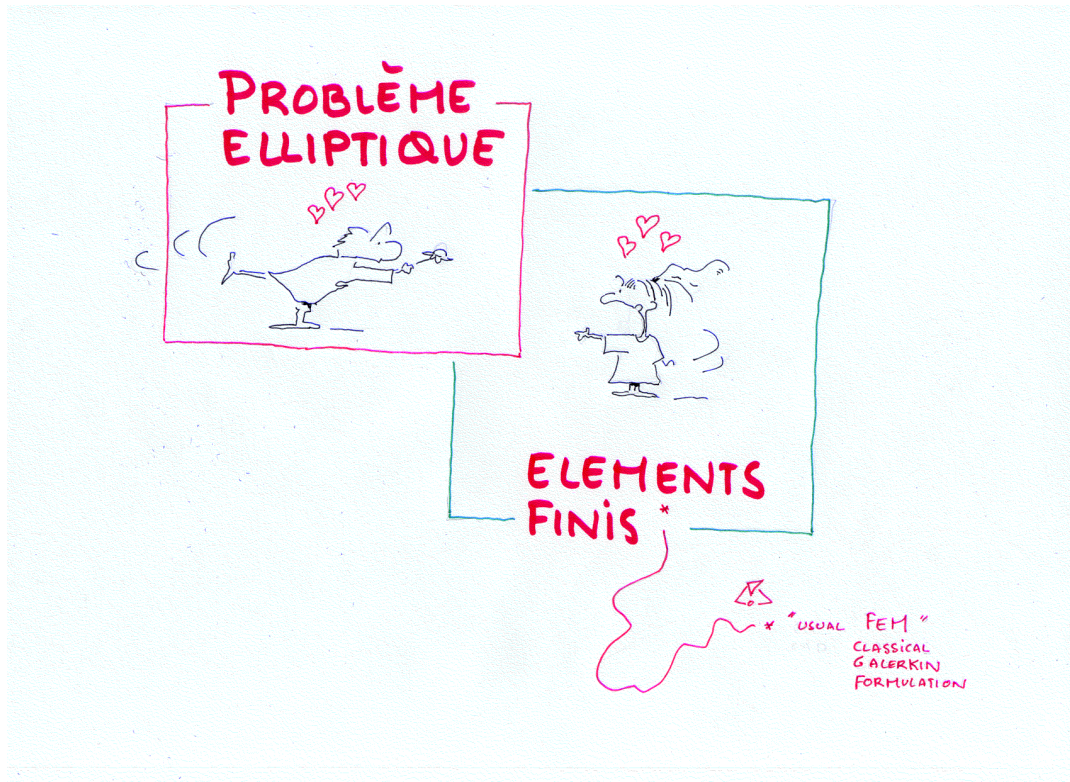
↓

$$\leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

C'est continu !

Exemple de la conduction thermique

**Pour avoir un problème bien posé,
il faut au moins un point avec une condition essentielle !**



Galerkin, c'était donc optimal pour des équations elliptiques

$$r^h = \nabla \cdot (a \nabla u^h) + f.$$

La technique de Galerkin
consiste à annuler en moyenne
le produit du résidu
avec les fonctions de forme

Et cette manière de procéder minimise
l'erreur dans la norme L2 : c'est une
formulation optimale en ce sens !



Galerkin 1871-1945

Les éléments finis
sont une méthode
de résidus pondérés

$$\langle \tau_i r^h \rangle = 0,$$

↓

$$\langle \tau_i (\nabla \cdot (a \nabla u^h)) \rangle + \langle \tau_i f \rangle = 0,$$

↓

$$\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla u^h) \rangle = \langle \tau_i f \rangle,$$

↓

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla \tau_j) \rangle}_{A_{ij}} U_j = \underbrace{\langle \tau_i f \rangle}_{B_i}$$

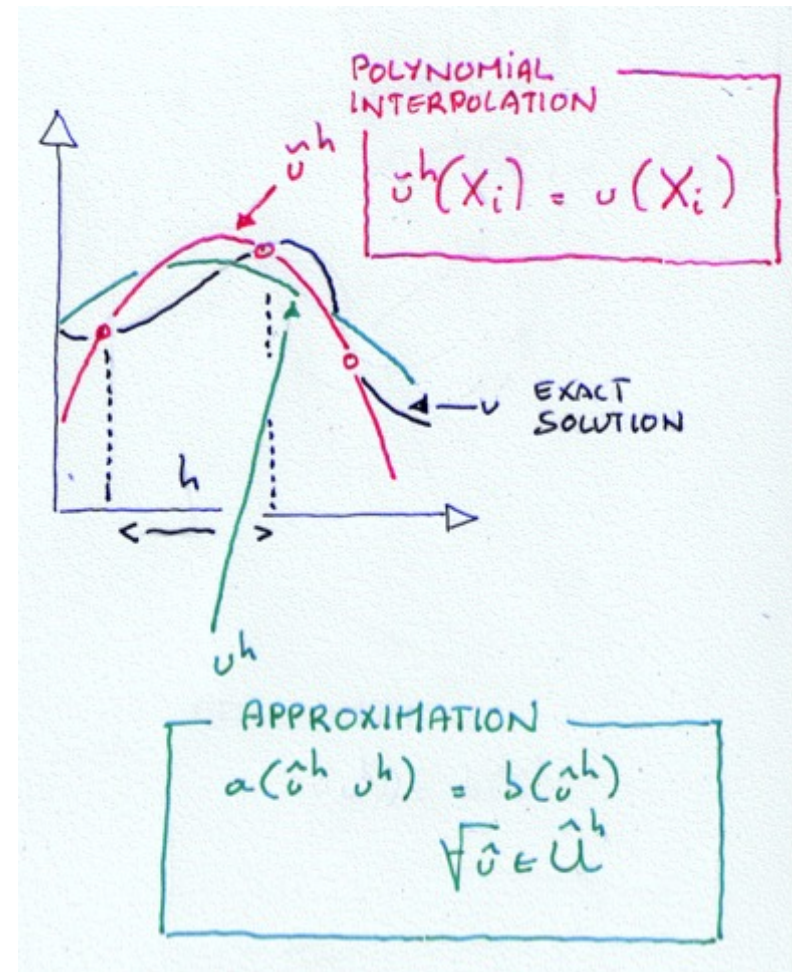
Estimation a priori de l'erreur

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,$$

Lemme de
Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure
approximation énergétique

Lemme de Cea

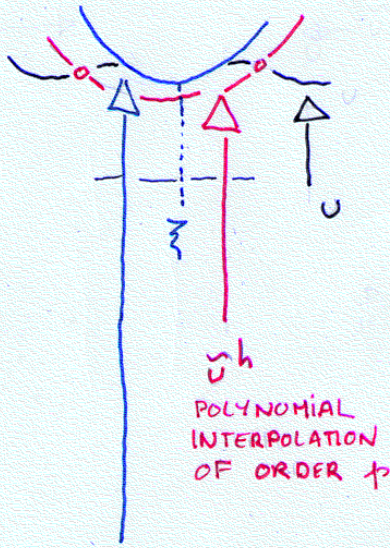


BRAMBLE - HILBERT LEMMA

$$\frac{d^i}{d\xi^i} (v - \tilde{v}^h) = \frac{d^i v}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \frac{d^i u^t}{d\xi^i} - \frac{d^i \tilde{v}^h}{d\xi^i}$$

POLYNOME DE TAYLOR

$$= \frac{d^i v}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \sum_{j=0}^p u^t(\mathbb{I}_j) \frac{d^j \phi_j}{d\xi^j}$$



POLYNOMIAL INTERPOLATION OF ORDER p

TAYLOR DEVELOPMENT OF ORDER p AROUND ξ

$$\left| \frac{d^i}{d\xi^i} \right| \leq \left| \frac{d^i v}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} \right| + \sum_{j=0}^p |u^t(\mathbb{I}_j) - v(\mathbb{I}_j)| \left| \frac{d^j \phi_j}{d\xi^j} \right|$$

$$\leq C \max \left| \frac{d^{p+1} v}{d\xi^{p+1}} \right| \leq C \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|$$

$$\|e_\xi\|_m^2 = \sum_{e=1}^n \sum_{i=0}^m \int_{\Omega_e} \left(\frac{de^i}{dx^i} \right)^2 dx$$

$$= \left(\frac{h}{2} \right)^{1-2i} \int_{-1}^1 \left(\frac{de^i}{d\xi^i} \right)^2 d\xi$$

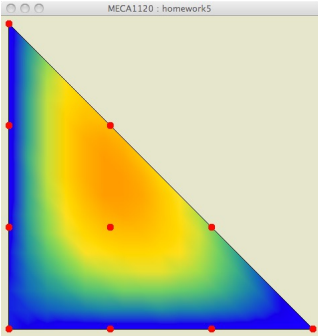
$$\leq C^2 \int_{-1}^1 \max \left| \frac{d^{p+1}u}{d\xi^{p+1}} \right|^2 d\xi$$

$$\leq C^2 \left(\frac{2}{h} \right)^{1-2(p+1)} \int_{\Omega_e} \max \left| \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} \right|^2 dx$$

$$\leq C \|u\|_{p+1}^2$$

$$\leq C^2 \sum_{l=0}^m \left(\frac{h}{2} \right)^{2(p+1-l)} \|u\|_{p+1}^2$$

Erreur de l'interpolation



$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

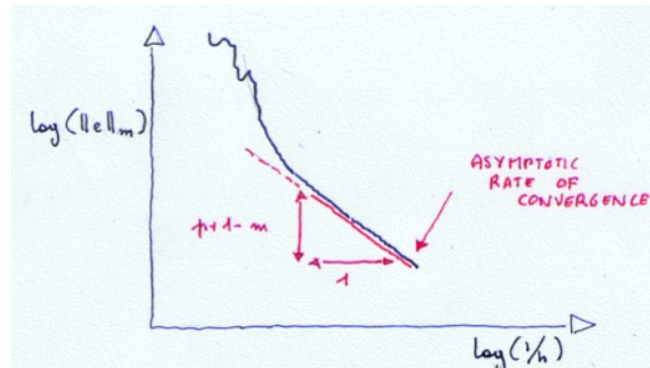
Lemme de Bramble Hilbert

Concrètement...

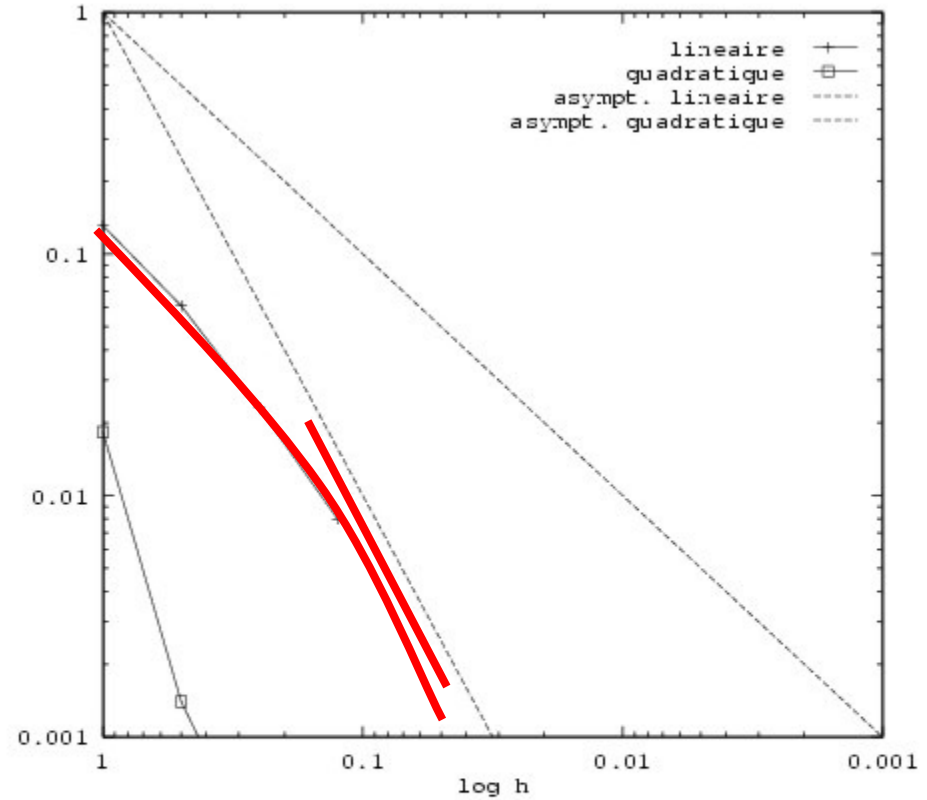
$$\|\tilde{e}\|_0 \leq C_0 h^2 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_1 \leq C_1 h^1 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_* \leq C_1 h^1 \|u\|_2.$$

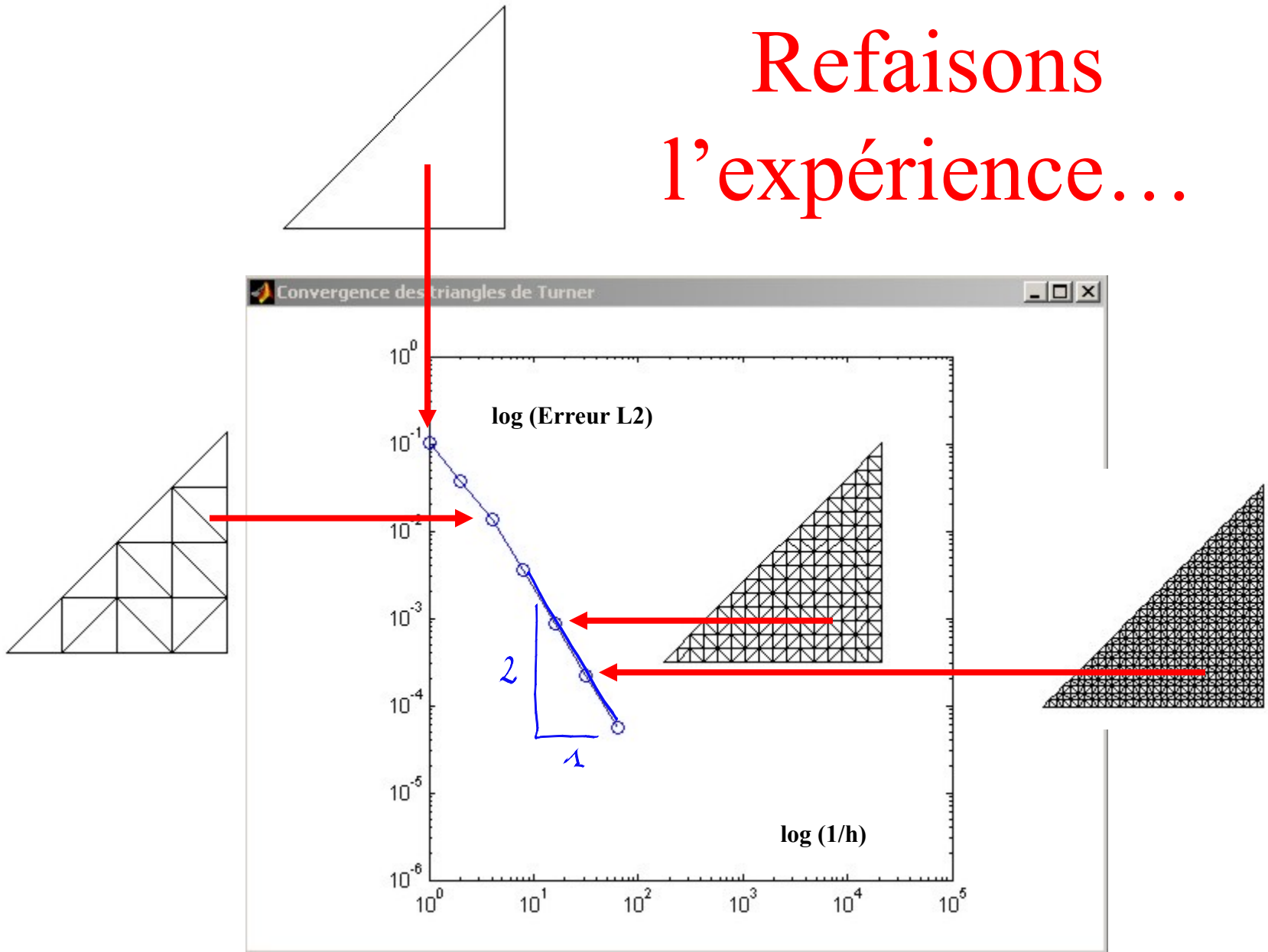


Eléments		Triangles linéaires			Triangles quadratiques		
N_1	h	N	$u^h(0)$	$e(0)$	N	$u^h(0)$	$e(0)$
1	1	3	-0.3333	13.1 %	6	-0.3000	1.83 %
4	1/2	6	-0.3125	6.1 %	15	-0.2950	0.14 %
16	1/4	15	-0.3013	2.3 %	45	-0.2947	0.03 %
64	1/8	45	-0.2969	0.8 %			



Et expérimentalement...

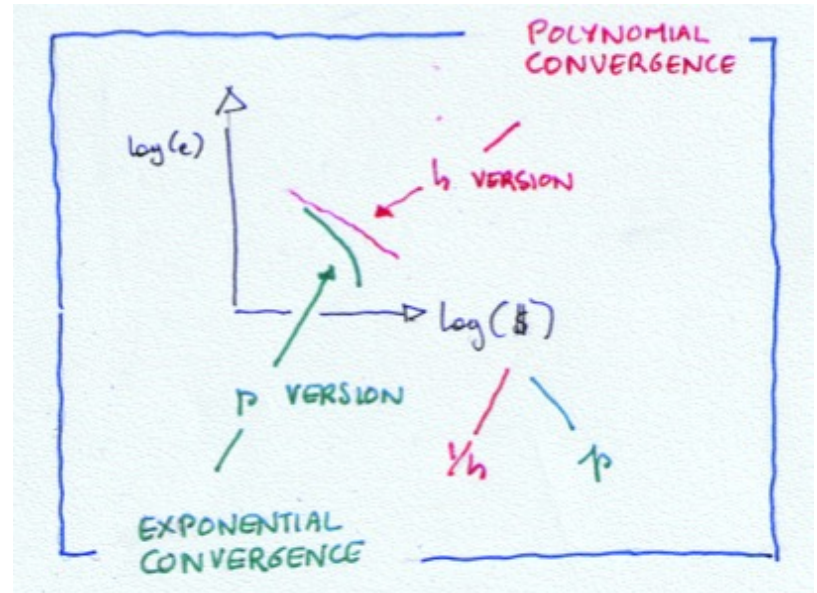
Refaisons l'expérience...



La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d'ordre élevé !

$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

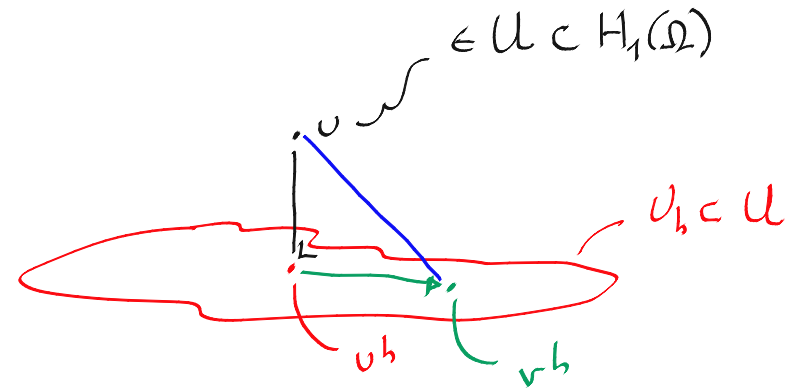


**Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !
Sinon pas de super convergence...**

Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-(-

Les éléments finis
c'est une projection
orthogonale !

$$\begin{aligned} a(u, \hat{v}) &= b(\hat{v}) & \forall \hat{v} \in \hat{U} \\ a(u, \hat{v}^h) &= b(\hat{v}^h) & \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h \subset \hat{U} \\ a(u^h, \hat{v}^h) &= b(\hat{v}^h) & \forall \hat{v}^h \end{aligned}$$



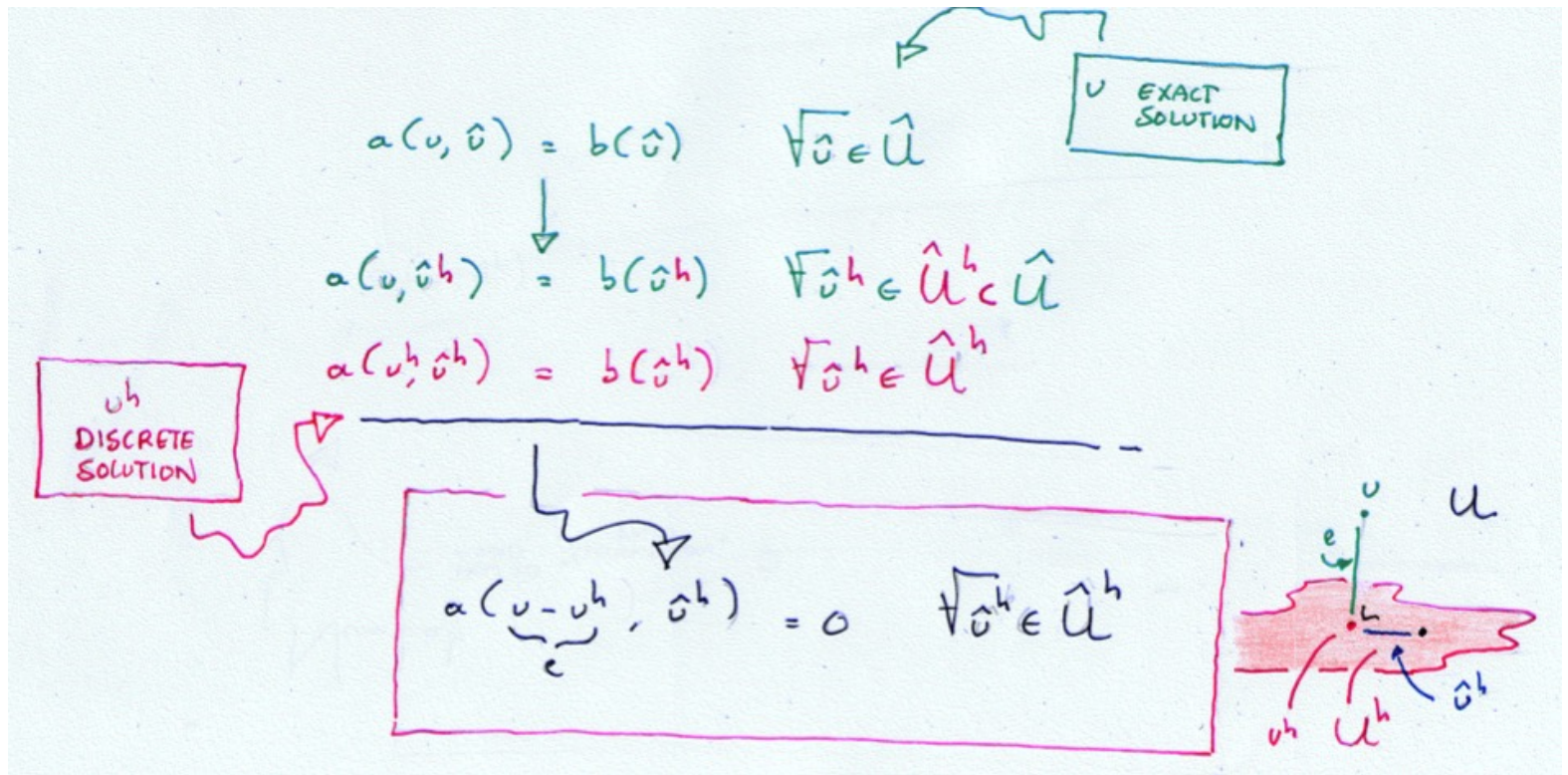
$$a(\underbrace{u - u_h}_{e^h}, \hat{v}^h) = 0$$

$$\langle e^h, u_h \rangle_*$$

PRODUIT
SCALAIRE
ENERGETIQUE

$$\begin{aligned} a(u - v^h, u - v^h) &= a(u - u_h + u_h - v^h, \dots) \\ &= a(e^h, e^h) + \underbrace{a(u_h - v^h, u_h - v^h)}_{\geq 0} + \underbrace{2a(e^h, u_h - v^h)}_{=0} \end{aligned}$$

$\in \hat{U}^h$

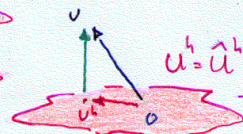
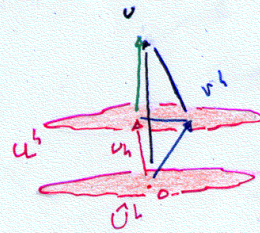


Les éléments finis :
c'est une projection orthogonale !

$$\begin{aligned}
 a(u-r^h, u-r^h) &= a(\underbrace{u-u^h}_e + u^h - r^h, \underbrace{u-u^h}_e + u^h - r^h) \\
 &= a(e, e) + a(u^h - r^h, u^h - r^h) + 2a(e, u^h - r^h) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

BEST ENERGY APPROXIMATION THEOREM

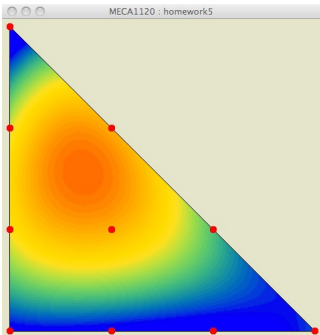
$$\|u - r^h\|_x \geq \|e\|_x \quad \forall r^h \in U^h$$



$$\begin{aligned}
 \|u - r^h\|_x^2 &= \|e\|_x^2 + \|u^h - r^h\|_x^2 \\
 \|u\|_x^2 &= \|e\|_x^2 + \|u^h\|_x^2 \quad \text{if } \hat{u}^h = u^h
 \end{aligned}$$

C'est la meilleure approximation !

Oui, mais c'est une norme bizarre, non ?



Et finalement...

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|e\|_x^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\tilde{e}\|_x^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$

car $a(u,v)$ EST COERCIF

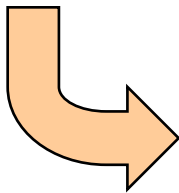
THEOREME DE LA MEILLEURE APPROXIMATION

car $a(u,v)$ EST CONTINU

LEMME DE BRAMBLE HILBERT

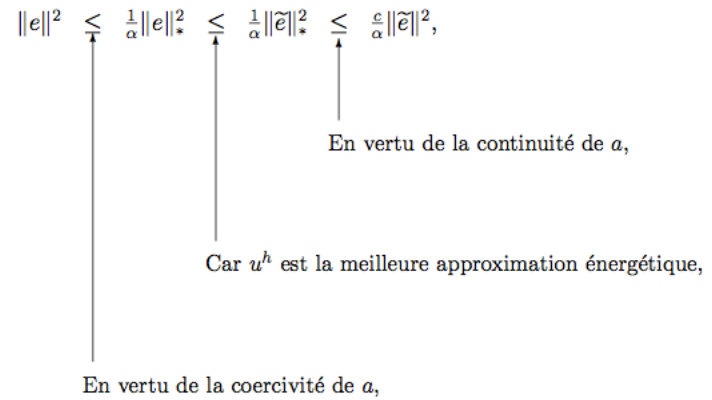
Lemme de Cea

$$\|e\|^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|^2$$

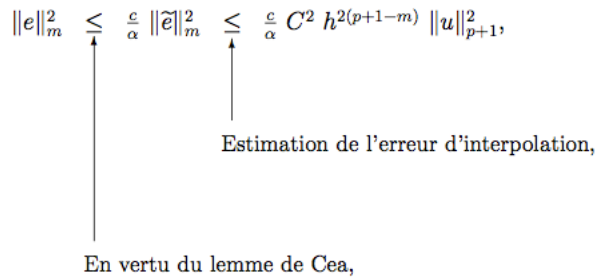


Estimation de l'erreur

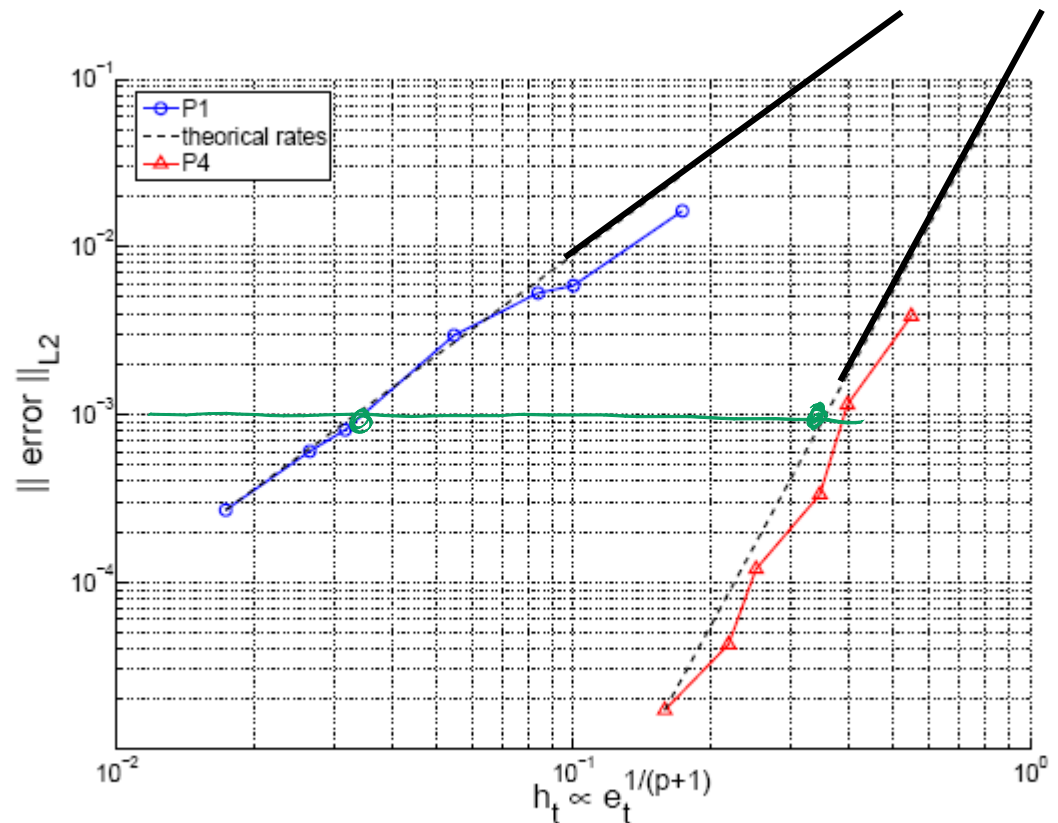
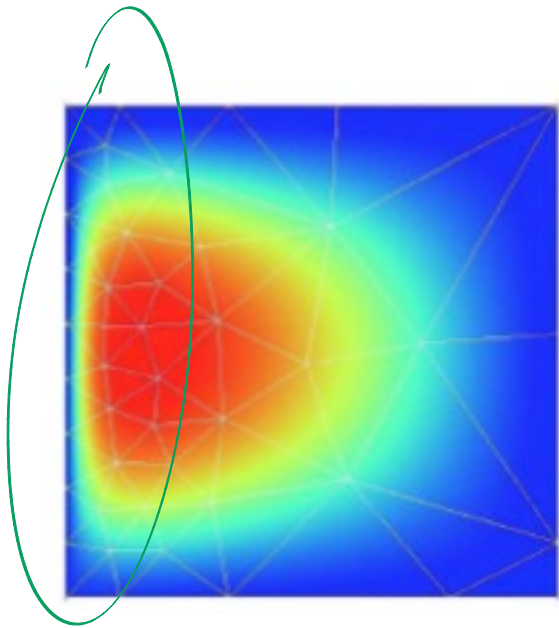
$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$



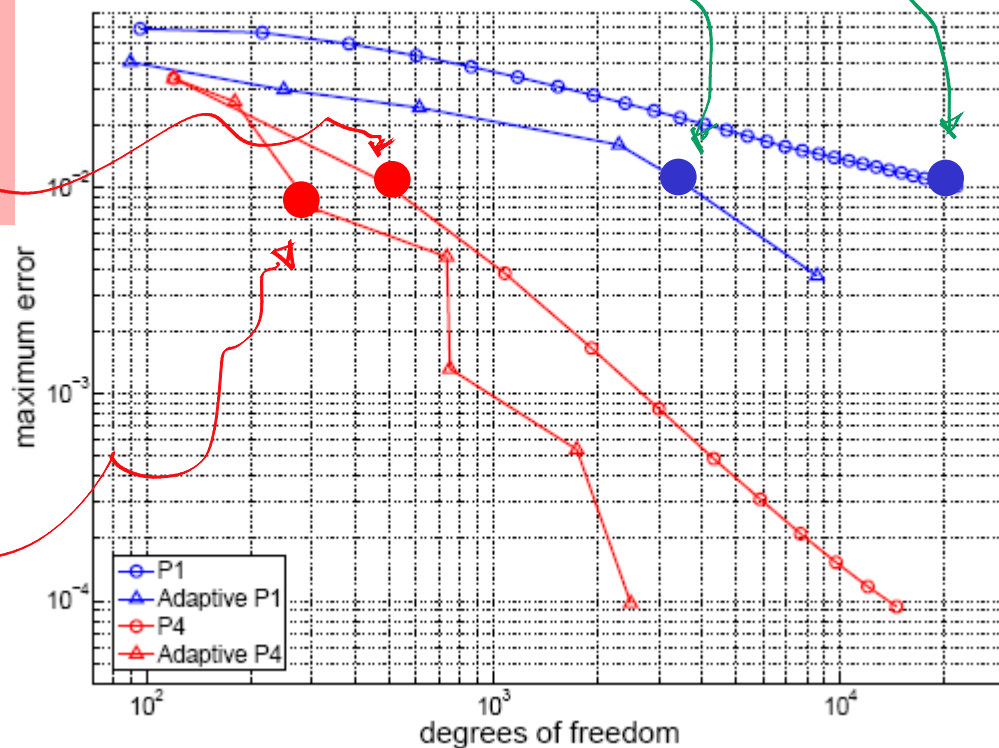
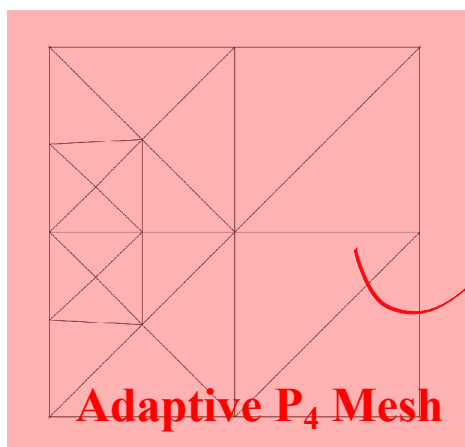
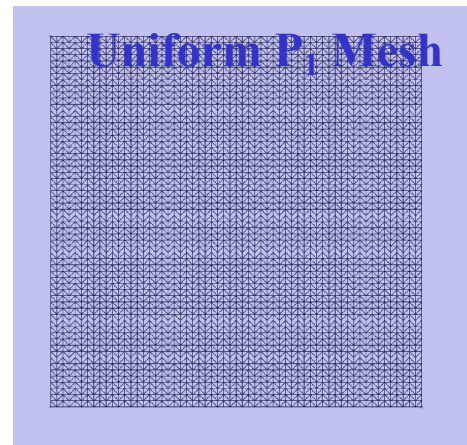
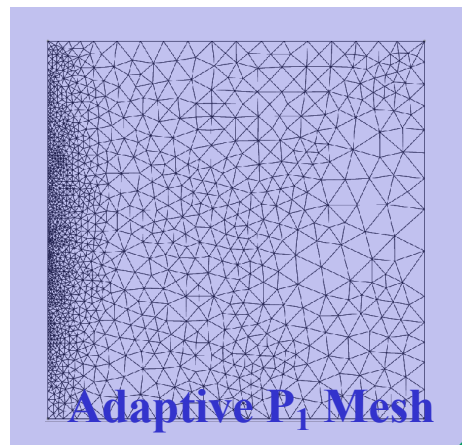
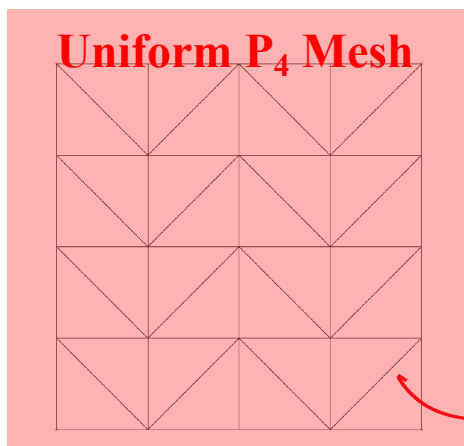
Non, c'est aussi vrai dans toutes les normes de Sobolev !

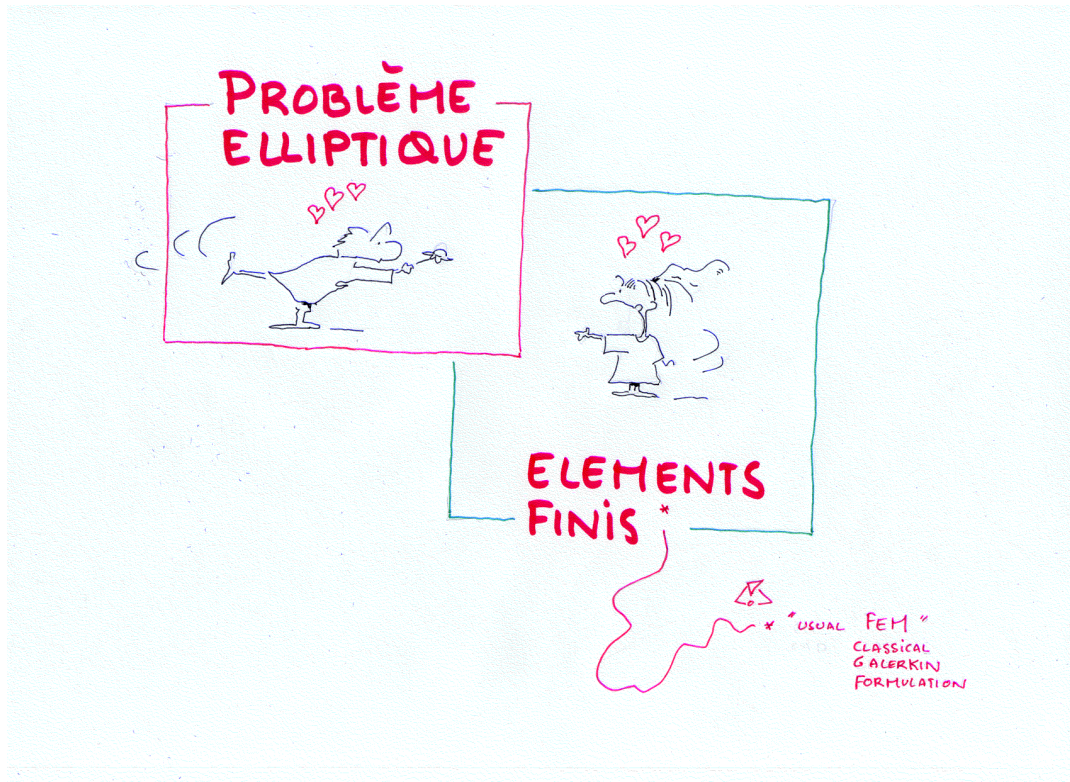


Theoretical rates of convergence are obtained for the analytical Stommel problem



How does it converge ?





Galerkin, c'est donc optimal pour des équations elliptiques