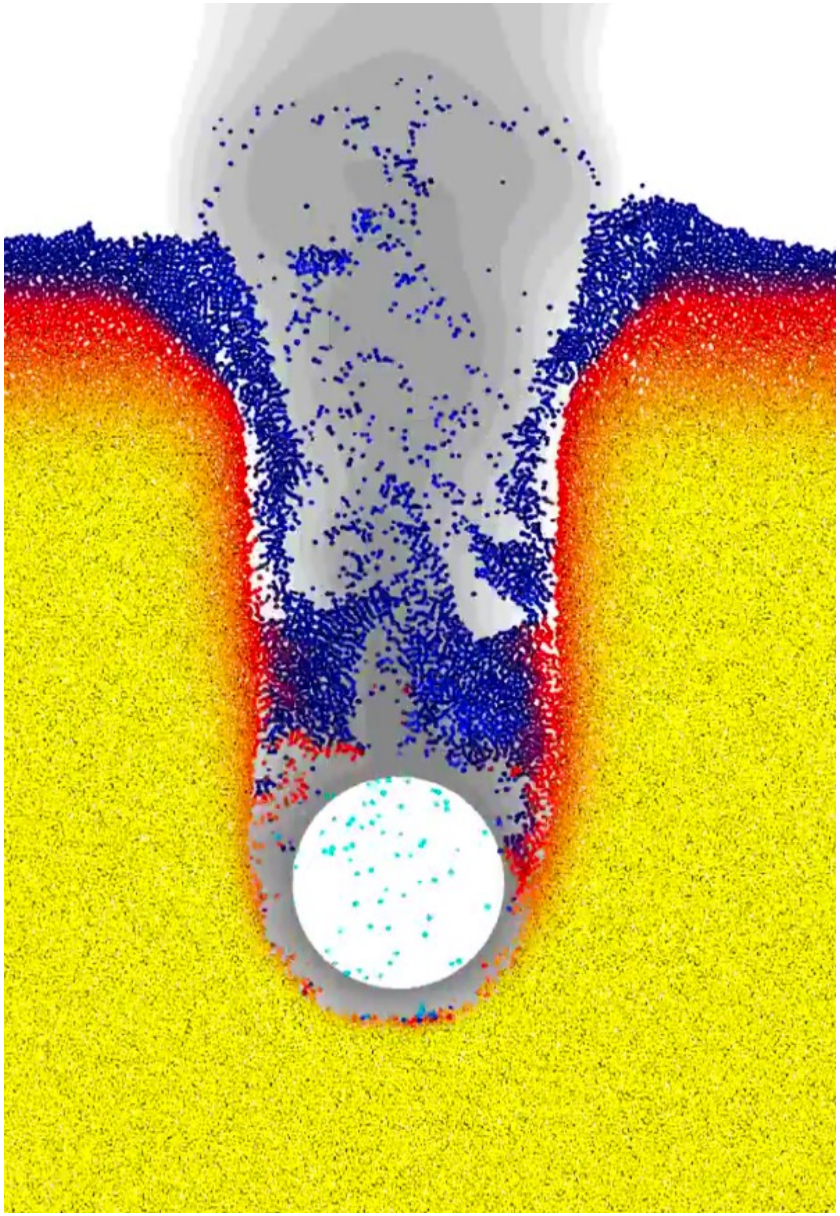
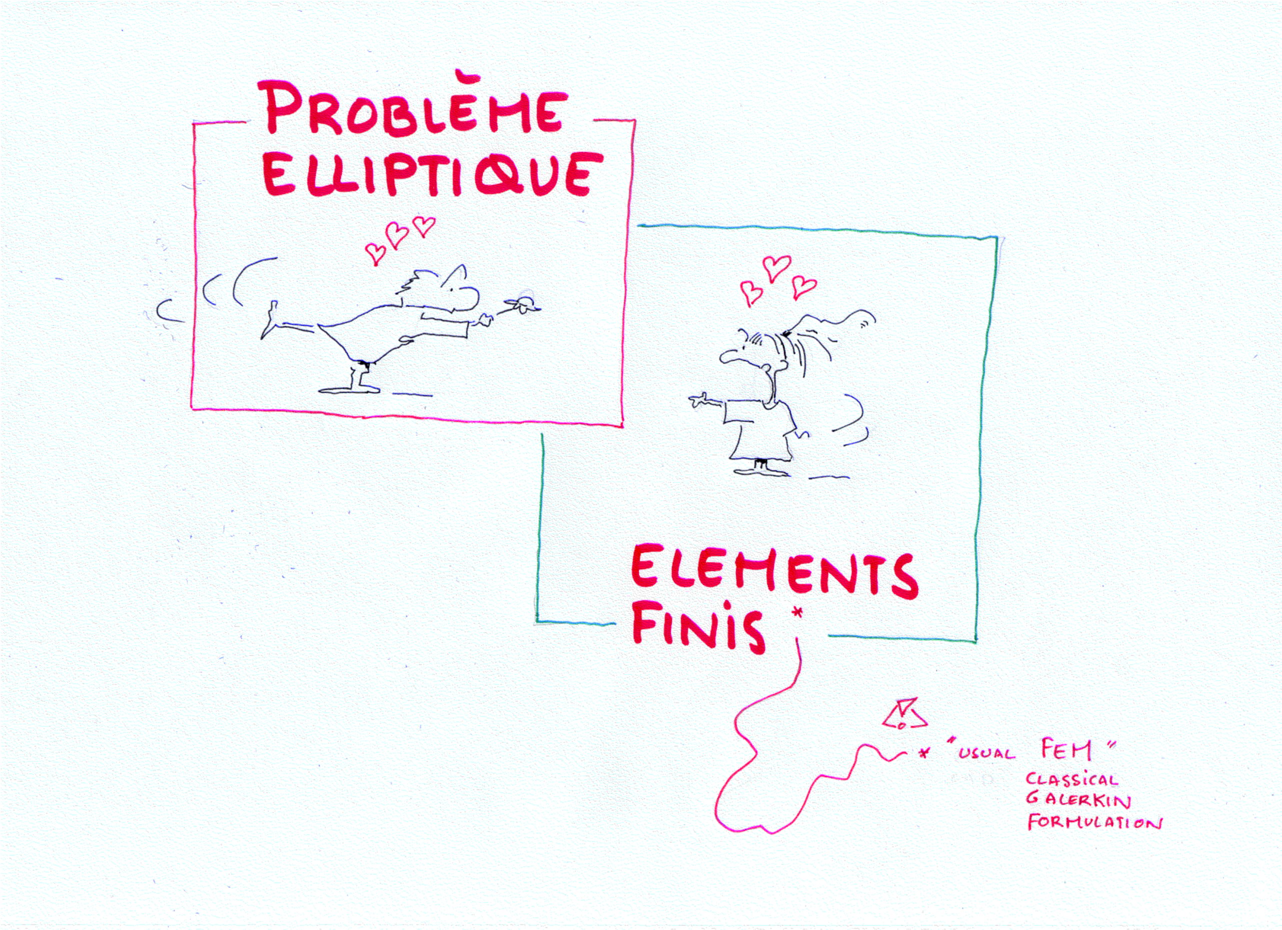
Décret Paysage : les adaptations PS-Ecolo définitivement validées en plénière avec le soutien du PTB

La révision du décret Paysage sur la « finançabilité » des étudiants du supérieur portée par le PS et Ecolo a finalement été votée vers 6h30 ce vendredi matin.

Mais cela ne change rien !
Si vous ratez le projet, c'est quand-même final !
Plus de 16 credits de bac non validés, on n'anticipe toujours pas le master !
Foire SICI des masters, ce lundi 29 avril !

Une goutte d’eau
qui chute sur
du sable chaud





Un peu de mathématiques pour les éléments finis

Théorème de Lax-Milgram :-)

$? \, u \in \mathcal{U}$

$a(u, \hat{u}) = b(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$

CONTINU COERCIF

CONTINU

Si	$\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert a est une forme bilinéaire continue et coercive b est une forme linéaire continue,	
alors,	le problème abstrait	Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que $a(\widehat{u}, u) \quad = \quad b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},$
	a une solution unique qui dépend continûment du terme source b ($\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$).	

où la norme d'une forme b est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

Notre problème est bien posé !

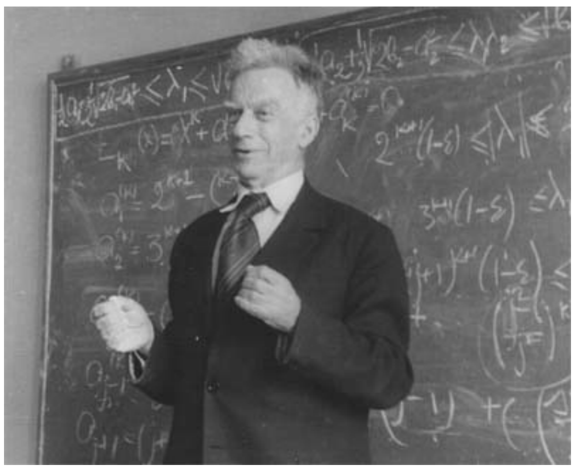
La solution existe, est unique et dépend gentiment des données…

Arthur Milgram
Philadelphia 1912 – 1962

Peter Lax
Budapest 1926

Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev
Saint-Petersburg 1908 - 1989



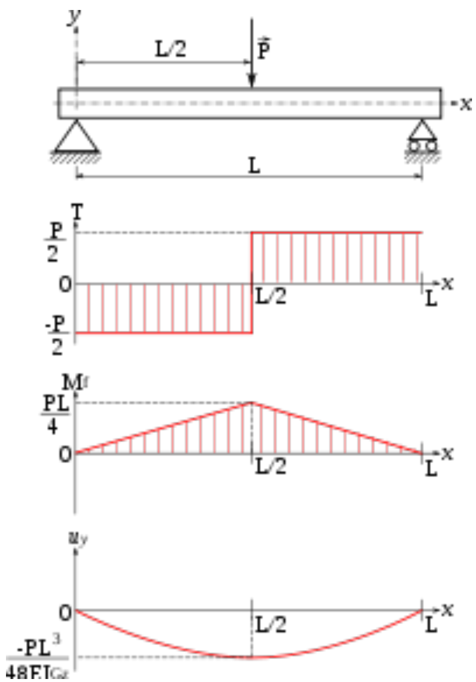
$$
\begin{aligned}
L_2(\Omega) = H^0(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \ dx < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \ dx < \infty \right\} \\
H^2(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \ dx < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

Définissons formellement U …
Définissons des normes et des produits scalaires !
Les dérivées sont comprises au sens des distributions afin de rendre les espaces complets !
Ce sont les espaces de Sobolev !

$$
\begin{aligned}
< uv >_0 &= \int_\Omega uv \ dx \\
< uv >_1 &= \int_\Omega uv + u'v' \ dx \\
< uv >_2 &= \int_\Omega uv + u'v' + v''v'' \ dx
\end{aligned}
$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^{m}(\Omega)$$

Characterizing the smoothness of a function



$$H^0(\Omega) \quad = \quad \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \text{tels que} \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) \quad = \quad \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \text{tels que} \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) \quad = \quad \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \text{tels que} \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}$$

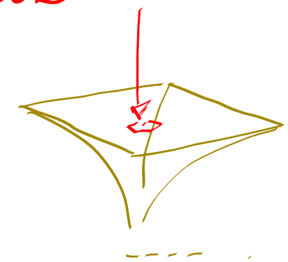
$$x^{-1/4} \in L_2(]0,1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\, dx = \left[2\, x^{1/2}\right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1}\, dx = \left[\ln(x)\right]_0^1 = \infty$$

$$x^{-1/2} \notin L_2(]0,1[)$$

Ce n'est pas toujours évident ...



Théorèmes d'immersion de Sobolev
Est-ce que c'est continus, ces brols ?

Si $\quad \Omega \subset \mathcal{R}^n,$
$\quad\quad 2k > n,$ $\quad n = 2$
$\quad k = 1$

alors $\quad H^k(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^0(\overline{\Omega})$
$\quad\quad\quad \exists\, c \;\; |w(x)| < c, \;\; \forall x \in \Omega\}$

$a(u,v) = \int_\Omega T\, u'\, v'\, dx$

$H^1(]0,1[) \subset C^0(]0,1[)$

Si $\quad \Omega \subset \mathcal{R},$

alors $\quad H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^k(\overline{\Omega}),$
$\quad\quad\quad \exists\, c \;\; |w(x)| < c, \;\; \forall x \in \Omega\}$

Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !
Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l'infini sous la force !

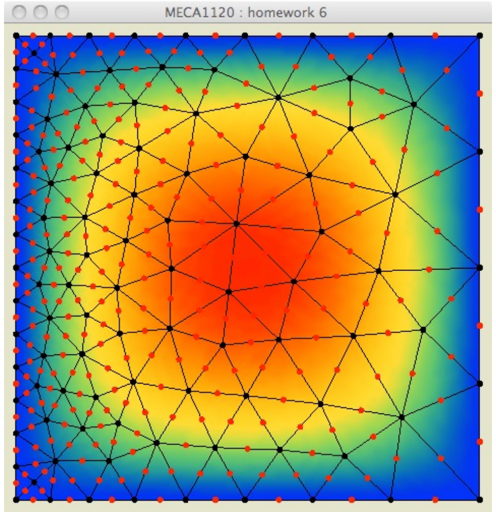
Et finalement, a(u,v) est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},$$

Pour le cas de la conduction stationnaire

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
a(u,v) &= < \boldsymbol{\nabla} u \cdot k \boldsymbol{\nabla} v > \\
b(u) &= < f u >
\end{aligned}$$



$$a(u,v) = \int_\Omega k\, u' v'\, dx \qquad U \subset H^1(\Omega) \qquad \Omega =]a,b[$$

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega u^2 + (u')^2\, dx$$

CONTINUITÉ

CAUCHY
$|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$

$$|a(u,v)| = k\, |\langle u' v' \rangle_0| \leqslant k\, \|u'\|_0 \underbrace{\|v'\|_0}_{\leqslant \|v\|_1}$$

$$\leqslant k\, \|u\|_1 \|v\|_1$$

COERCIF

$$u(x) - \underbrace{u(0)}_{=0\ :-)} = \underbrace{\int_0^x u'(t)\, dt}_{\langle u' \rangle_{x,0}}$$

$\langle v', 1 \rangle \leqslant \|v'\| \|1\|$

$$(u(x))^2 \leqslant \underbrace{\int_0^x dt}_{C} \ \underbrace{\int_0^x (u')^2\, dt}_{\leqslant \|u'\|_0^2}$$

EN INTEGRANT !

$$\|u\|_0^2 \leqslant C_1 \|u'\|_0^2$$

$$C_2 (\|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2) \leqslant k\, \|u'\|_0^2$$

Et finalement, a(u,v) est-il continu et coercif pour l'équation de Poisson…

$$\underbrace{v(x) - v(0)}_{=0} \quad = \quad \int_0^x \frac{dv}{dx}(t)dt$$

$$\Big\downarrow \quad \text{Par l'inégalité de Cauchy} < v_{,x}, 1 > \leq \|v_{,x}\| \ \|1\|$$

$$(v(x))^2 \quad \leq \quad \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \|\frac{dv}{dx}\|_0^2}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{En intégrant sur } \Omega$$

$$\|v\|_0^2 \quad \leq \quad C_1 \|\frac{dv}{dx}\|_0^2$$

$$\Big\downarrow$$

$$\underbrace{kC_2 \left(\|v\|_0^2 + \|\frac{dv}{dx}\|_0^2 \right)}_{\|v\|_1^2} \quad \leq \quad \underbrace{k \ \|\frac{dv}{dx}\|_0^2}_{a(v,v)}$$

C'est coercif !

$$|a(u,v)| \quad \leq \quad \|\boldsymbol{\nabla} u\|_0 \ \|\boldsymbol{\nabla} v\|_0$$

$$\Big\downarrow$$

$$\leq \quad \|u\|_1 \ \|v\|_1$$

C'est continu !

Exemple de la conduction thermique

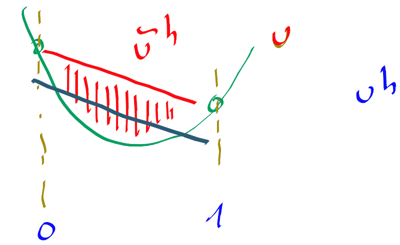
Pour avoir un problème bien posé,
il faut au moins un point avec une condition essentielle !

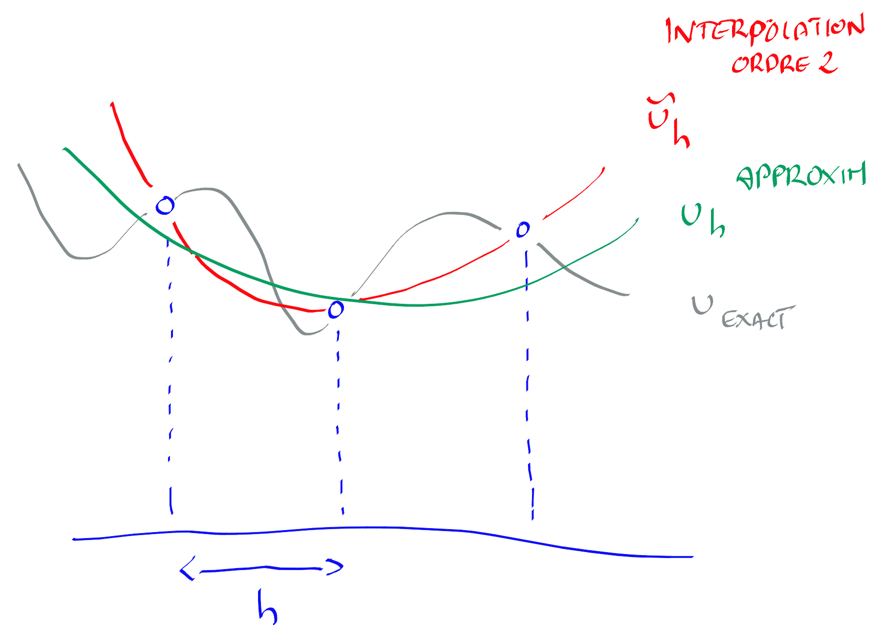
Estimation a priori de l'erreur

$$\boxed{\|e\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\, C^2\, h^{2(p+1-m)}\, \|u\|_{p+1}^2,}$$

$$\int_0^1 (u-u^h)^2$$

MINIMISER



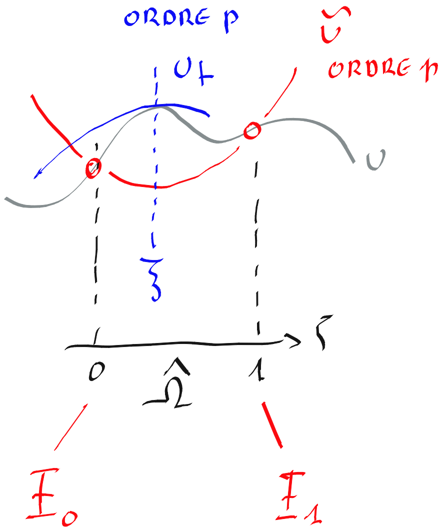


Lemme de Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

Erreur de l'interpolation
Lemme de Bramble-Hilbert



$$\frac{d^i}{d\xi^i}(\underbrace{u-\tilde u^h}_{\tilde e}) = \frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \underbrace{\frac{d^i u^t}{d\xi^i}}_{=\sum_{j=0}^{p} u^t(\Xi_j)\frac{d^i\phi_j}{d\xi^i}} - \sum_{j=0}^{p} u(\Xi_j)\frac{d^i\phi_j}{d\xi^i}$$

CAR $\tilde u^t = u^t$

$$\left|\frac{d^i \tilde e}{d\xi^i}\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i}\right|}_{\leqslant C \max \left|\frac{d u^{p+1}}{d\xi^{p+1}}\right|} + \sum_{j=0}^{p} \underbrace{\left|u^t(\Xi_j) - u(\Xi_j)\right|}_{\leqslant C\ldots} \underbrace{\left|\frac{d^i\phi_j}{d\xi^i}\right|}_{\leqslant C}$$

$$\leqslant C \max \left|\frac{d u^{p+1}}{d\xi^{p+1}}\right|$$

Lemme de Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

Et on calcule finalement
notre norme de Sobolev

$$\|\tilde{e}\|_m^2 = \sum_{e=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} \int_{\Omega_e} \left(\frac{d^i \tilde{e}}{dx^i}\right)^2 dx$$

$$= \left(\frac{h}{2}\right)^{1-2i} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^i \tilde{e}}{d\xi^i}\right)^2 d\xi$$

$$\leq C^2 \int_{-1}^{1} \max \left|\frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}}\right|^2 d\xi$$

$$\left(\frac{2}{h}\right)^{1-2(p+1)} \int_{\Omega_e} \max \left|\frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}}\right|^2$$

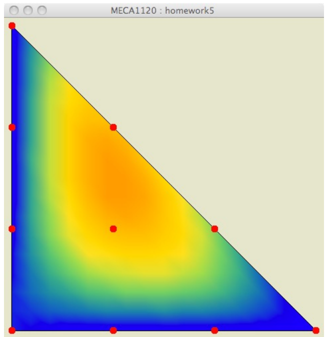
$$\leq C^2 \sum_{i=0}^{m} h^{2(p+1-i)} \|u\|_{p+1}^2$$

$$\boxed{\|\tilde{e}\|_m \leq C\, h^{p+1-m} \|u\|_{p+1}}$$

Lemme de Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea



Erreur de l'interpolation

$$\|\tilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

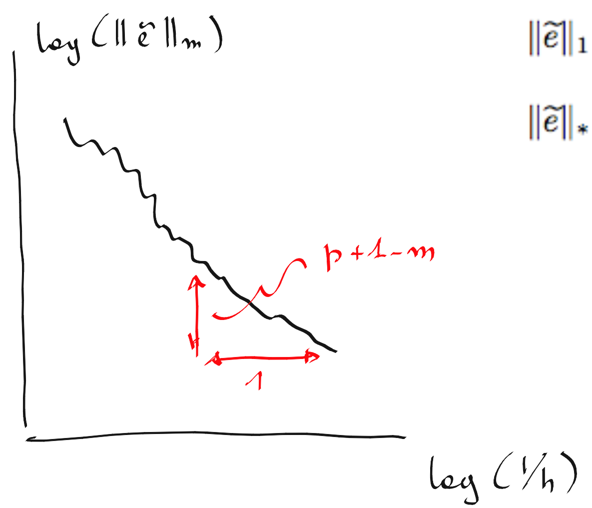
Lemme de Bramble Hilbert

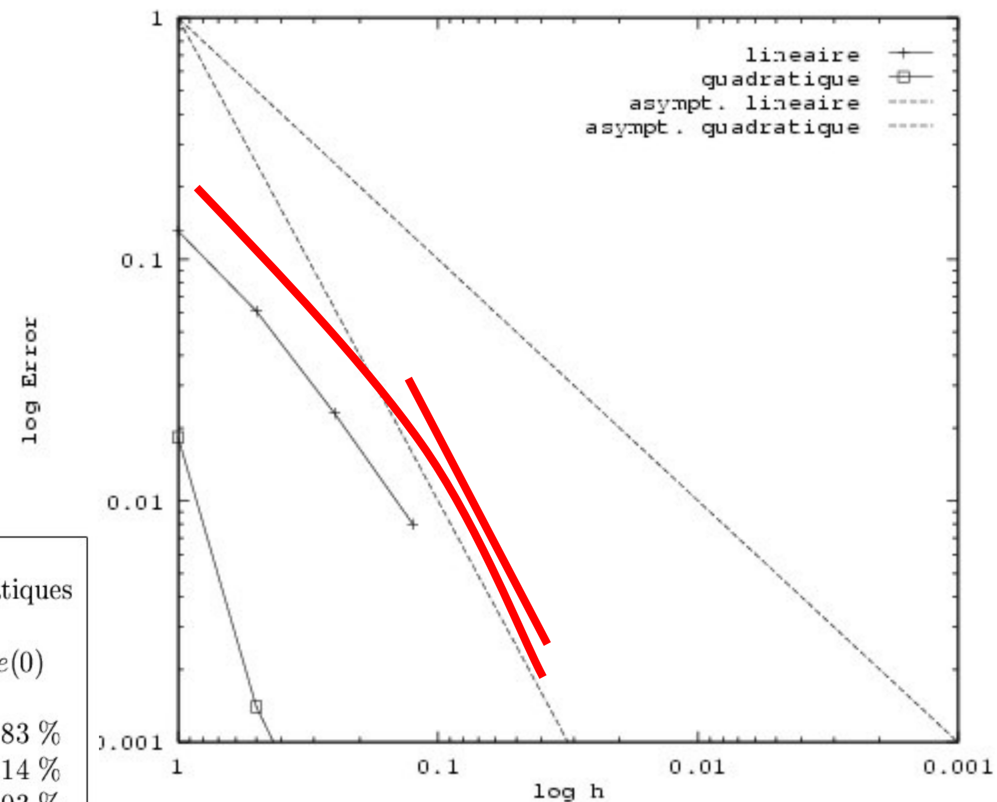
Concrètement…

$$\|\tilde{e}\|_0 \leq C_0\, h^2\, \|u\|_2$$

$$\|\tilde{e}\|_1 \leq C_1\, h^1\, \|u\|_2$$

$$\|\tilde{e}\|_* \leq C_1\, h^1\, \|u\|_2$$

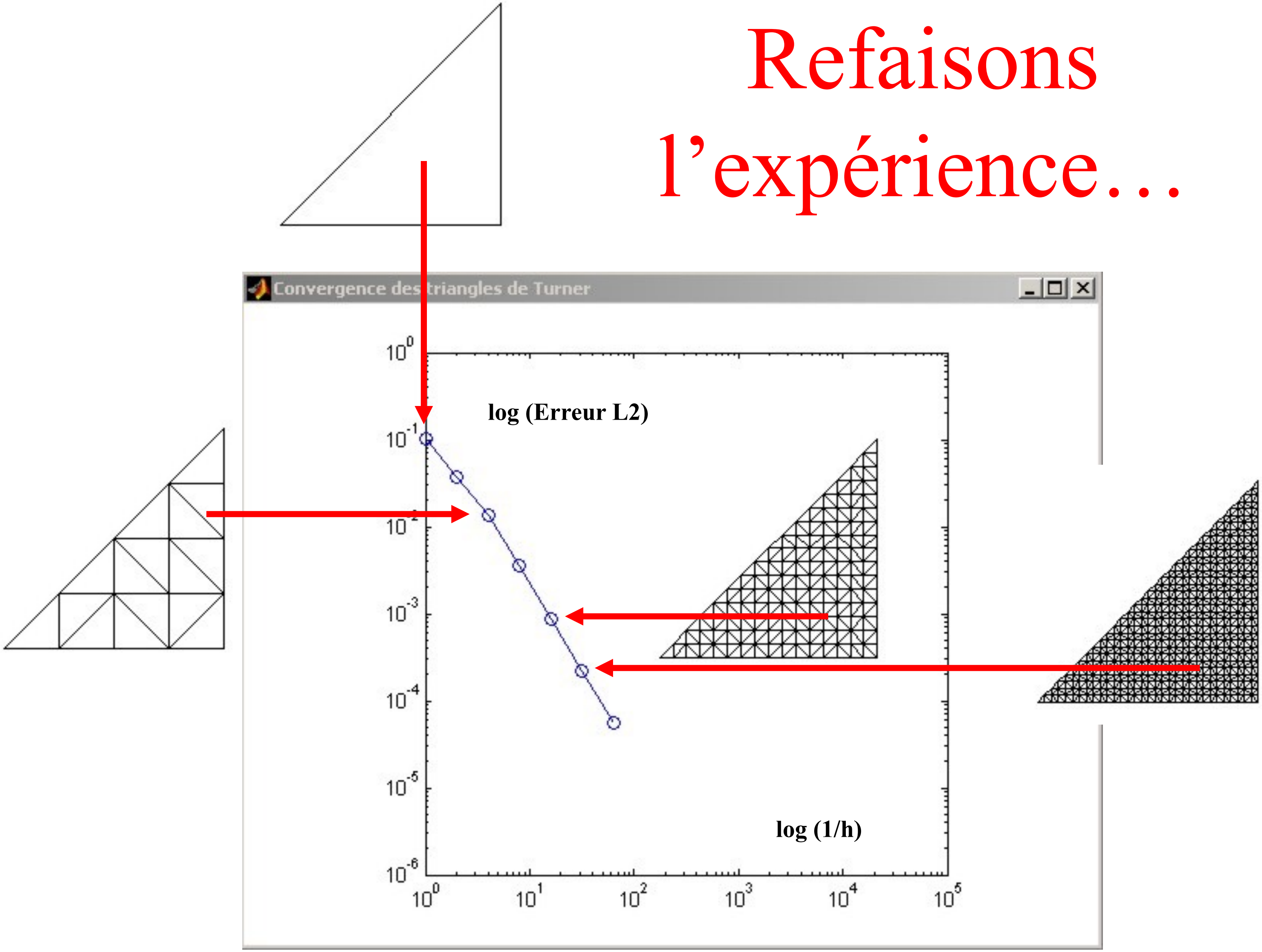




Eléments		Triangles linéaires			Triangles quadratiques		
N_1	h	N	$u^h(0)$	$e(0)$	N	$u^h(0)$	$e(0)$
1	1	3	-0.3333	13.1 %	6	-0.3000	1.83 %
4	1/2	6	-0.3125	6.1 %	15	-0.2950	0.14 %
16	1/4	15	-0.3013	2.3 %	45	-0.2947	0.03 %
64	1/8	45	-0.2969	0.8 %			

Et expérimentalement…

Refaisons l’expérience…



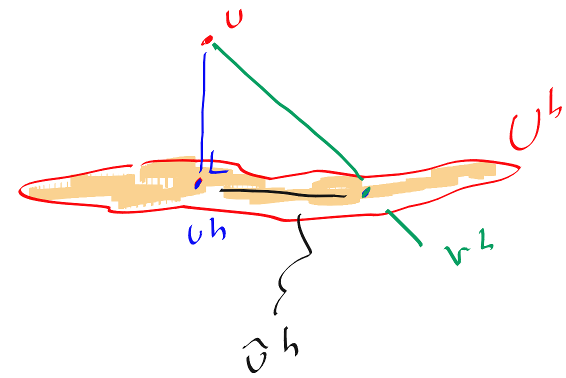
La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d'ordre élevé !

$$\|\widetilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !
Sinon pas de super convergence…
Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-(

L’erreur énergétique des éléments finis est minimale !



$$a(u, \hat{v}) = b(\hat{v}) \qquad \forall \hat{v} \in \hat{\mathcal{U}}$$

$$a(u, \hat{v}^h) = b(\hat{v}^h) \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h \subset \hat{\mathcal{U}}$$

$$a(u^h, \hat{v}^h) = b(\hat{v}^h) \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h$$

$$a(\underbrace{u - u^h}_{e}, \hat{v}^h) = 0 \qquad \forall \hat{v}^h \in \hat{\mathcal{U}}^h$$

Lemme de Bramble-Hilbert

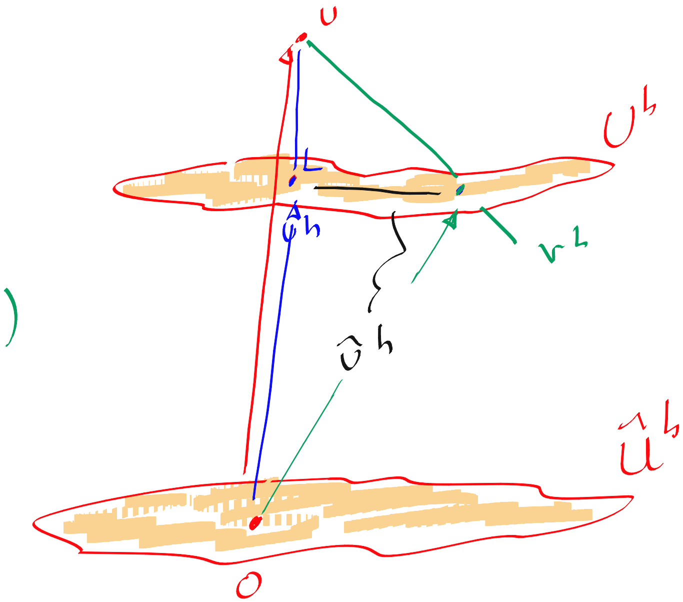
Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

$$a(u - v^h, u - v^h) =$$

$$a(\underbrace{u - u^h}_{e} + u^h - v^h, \; \dots)$$

$$a(e, e) + \underbrace{a(\underbrace{u^h - v^h}_{\hat{v}^h}, u^h - v^h)}_{\geq 0} + \underbrace{2\,a(e, \overbrace{u^h - v^h}^{\hat{v}^h})}_{= 0}$$



$$\boxed{\| u - v^h \|_* \geq \| e \|_*}$$

$$\| u - v^h \|_*^2 = \| e \|_*^2 + \| u^h - v^h \|_*^2$$

Si $U = \hat{U}$ $\qquad \| u \|_*^2 = \| e \|_*^2 + \| u^h \|_*^2$

Les éléments finis,
c’est une projection orthogonale !