Le projet !

Soumission finale du projet :-)

Suite au décret Glatigny.... Comme promis lors du banquet MECA-ELME, il sera possible de sou
21 avril 18h00 : votre assistant vous enverra un accusé de réception lundi matin et en cas de non-
n'y aura pas de seconde chance en août !

Le script de validation des vos fichiers zip de votre soumission est en cours de finalisation par Mig

Voici les toutes dernières consignes pour soumettre le projet :-) Vous devez envoyer par email à vo
format suivant (c'est légèrement différent de ce qui est dans l'énoncé au passage)

```
group001-vlegat-jfremacle.zip
└── Project
    ├── CMakeLists.txt
    └── src
        ├── fem.c
        ├── fem.h
        ├── homework.c
        ├── main.c
        └── ...

group001-vlegat-jfremacle-rapport.zip
├── Project
│   ├── CMakeLists.txt
│   └── src
│       ├── fem.c
│       ├── fem.h
│       ├── homework.c
│       ├── main.c
│       └── ...
├── ProjectPostProcessor
│   ├── Ce dont vous avez besoin pour afficher les resulatts
│   ├── PAS DE BUILD OU GMSH
│   └── plot.py
├── ProjectPreProcessor
│   ├── Ce dont vous avez besoin pour créer le mesh et problem
│   └── PAS DE BUILD OU GMSH
└── Rapport
    ├── group001-vlegat-jfremacle.pdf
    └── src
        ├── Figures
        └── rapport.tex
```

Nous allons vous fournir un petit script python permettant de vérifier la conformité de votre soumission avant de l'envoyer à votre assistant (attention : toute soumission non-conforme envoyée entrainera des malus devant votre note finale). Il faut donc bien veiller à tester votre soumission et éviter d'y inclure des fichiers inutilement gros et lourds.... Cela doit rester un petit fichier de petite taille : si vous avez des animations ou autre, une solution simple est de fournir un lien vers un stockage sur sharepoint ou onedrive.

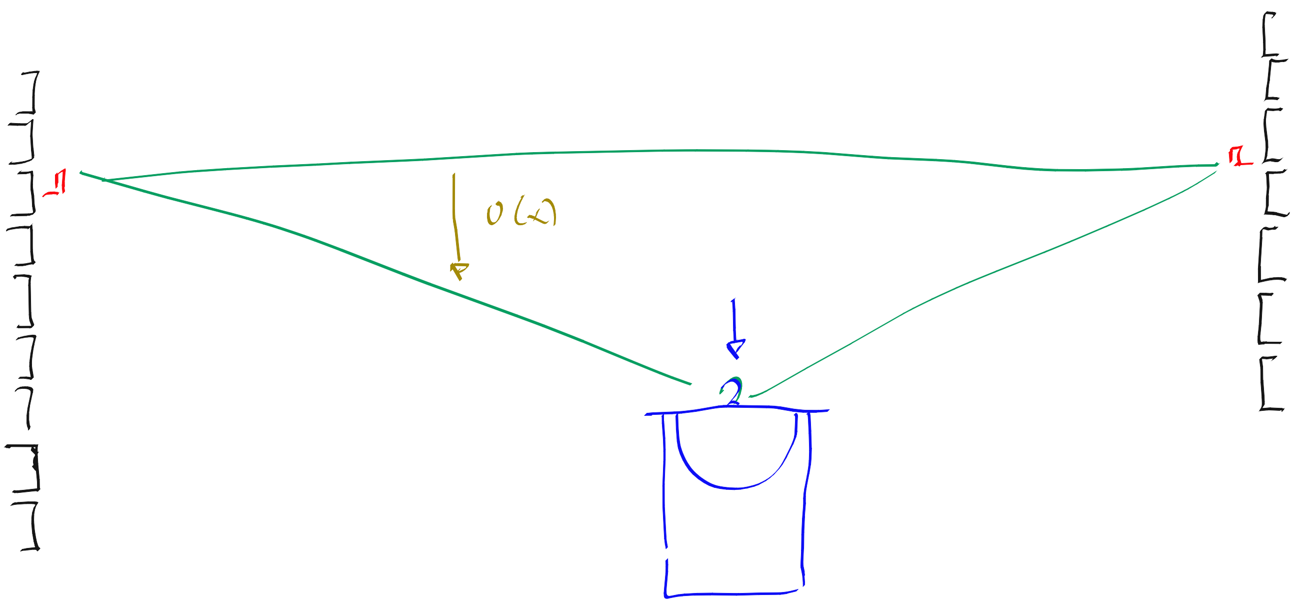
Bon courage à tous,

Vincent
(2024-04-19 10:10:38)

Décret Paysage : après le chaos

Comment installer une corde à linge ?

$$T \frac{d^2 v}{dx^2} + f = 0$$



Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Effectuons un tout petit exemple :-)

Problème de la corde à linge tendue !

Formulation forte

Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega,\\
u(0) &= 0,\\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Plus exigeant !
Espace des solutions plus petit !
On perd des solutions réellement utiles !

Plus laxiste !!
Espace des solutions plus grand !
Les solutions en sus sont utiles !

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

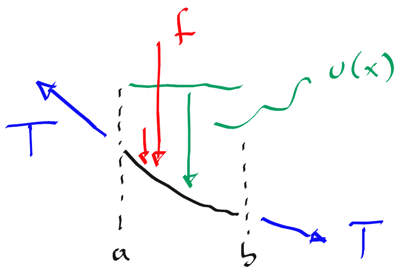
$$
\underbrace{< \frac{d\widehat{u}}{dx}\frac{du}{dx} >}_{a(\widehat{u},u)} \quad = \quad \underbrace{< \widehat{u} f >}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},
$$

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$
J(u) \quad = \quad min_{v\, \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},
$$

Formulation faible

La vraie physique :
c'est la formulation faible !



FORMULATION FORTE

$$\boxed{f + T u'' = 0}$$

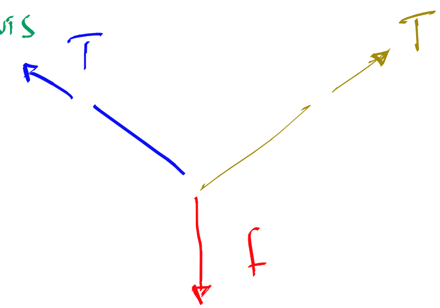
FORTE
FAIBLE

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{T\frac{du}{dx}\Big|_a - T\frac{du}{dx}\Big|_b}_{-T\left[\frac{du}{dx}\right]_a^b}}$$

$\frac{du}{dx}$ EST DERIVABLE

$$\int_a^b f(x) + T\frac{du}{dx}\,dx = 0 \qquad \forall a,b$$

PETITS DEPLACEMENTS



La vraie physique :
c'est minimiser l'énergie !

$$J(v) = \underbrace{T(\ell - L)}_{\text{TRAVAIL OU A L'ALLONGEMENT DE LA CORDE}} - \underbrace{\int_0^L f\,v\,dx}_{\text{TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES}}$$

$$\ell = \int_0^L d\ell = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^L \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}_{\text{PETITS DEPLACEMENTS}}\,dx$$

$$\simeq \int_0^L 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

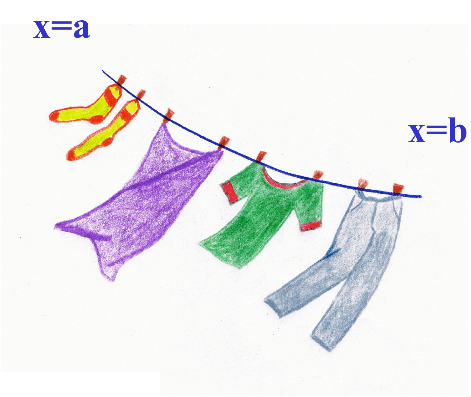
$$\boxed{J(v) = \int_0^L \frac{1}{2} T \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - f u \; dx}$$

$$\delta J = 0$$

$$\int_0^L T \frac{du}{dx}\frac{d\hat{u}}{dx} + f\hat{u} = 0$$

$$\forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$$

La vraie formulation physique…
C'est une formulation intégrale !



$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$\int_a^b f \, dx = T\frac{du}{dx}(a) - T\frac{du}{dx}(b) \qquad \forall a, b$$

$$\int_a^b f \, dx = -T \left[\frac{du}{dx}\right]_a^b \qquad \forall a, b$$

Si la fonction $\frac{du}{dx}$ est continue !

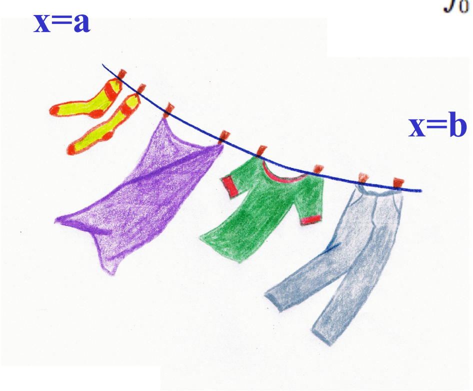
$$\int_a^b f + T\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx = 0 \qquad \forall a, b$$

$$f + T\,\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

Equilibre vertical des forces

La vraie formulation physique…
C'est minimiser l'énergie !

$$l \;=\; \int_0^L dl \;=\; \int_0^L \sqrt{dx^2 + du^2} \;=\; \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}\, dx \;\approx\; \int_0^L \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) dx$$



$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

Tension constante dans la corde
Petits déplacements

$$J(u) = T(l - L) - \int_0^L f\ u\ dx$$

$$\Downarrow$$

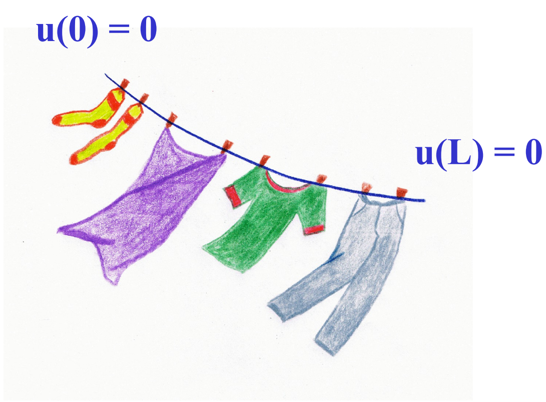
$$J(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f\ u\ dx$$

Minimisation de l'énergie
On minimise le travail des forces !

Ecrire une formulation discrète !
Eléments finis 1D

$$u \simeq u^h = \underbrace{\sum U_i \tau_i}_{\in \mathcal{U}^h} \qquad \underbrace{\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}}_{\text{ceci est très important}}$$

CECI
EST TRES
IMPORTANT



Problème discret

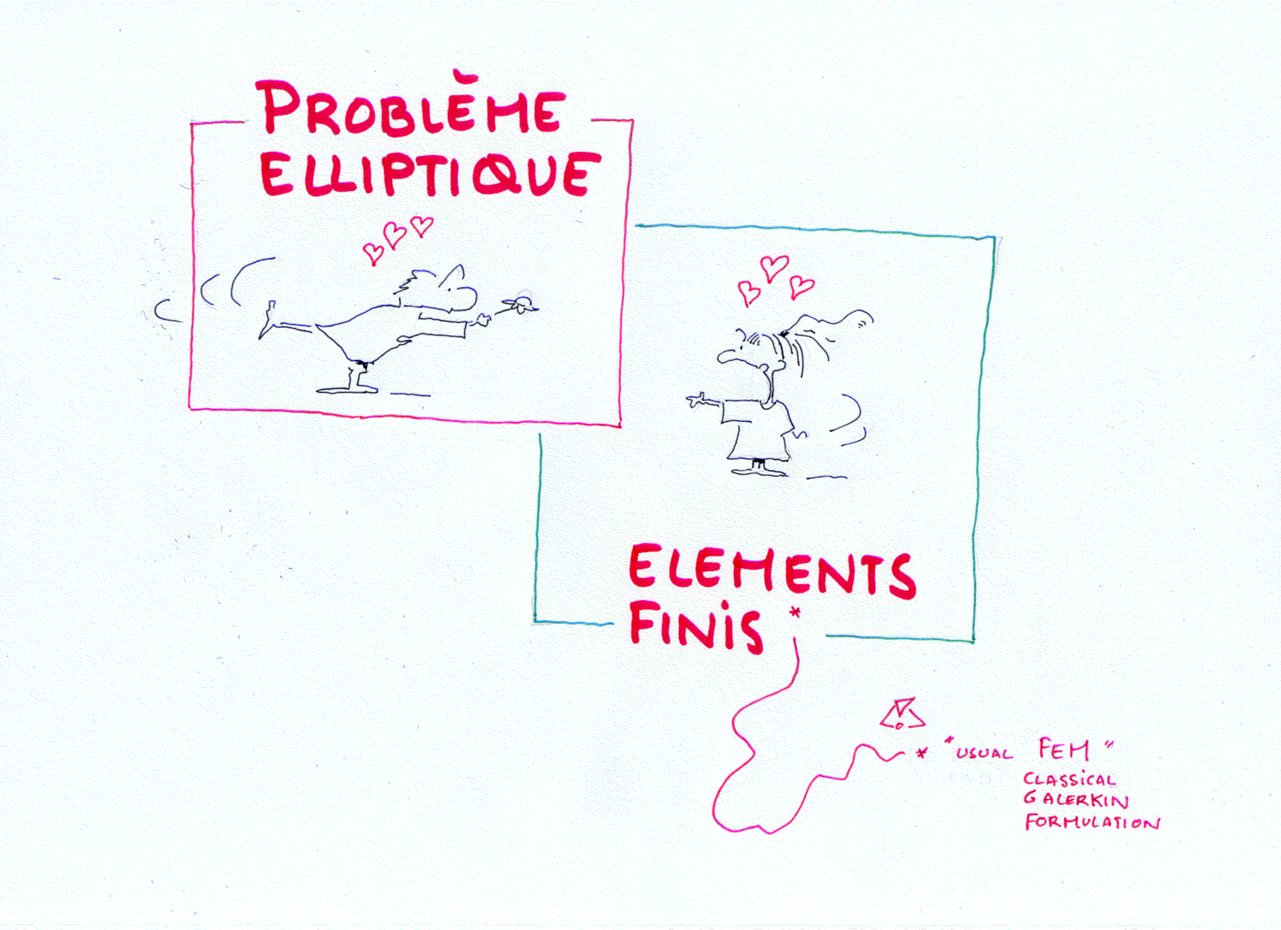
$$\sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_j = B_i, \qquad i = 2, N-1.$$

$$U_1 = 0,$$
$$U_N = 0,$$

N-2 équations pour les valeurs intérieures
Deux conditions aux limites

$$A_{ij} = \int_\Omega \frac{d\tau_i}{dx}(x) \, \frac{d\tau_j}{dx}(x) \, dx,$$

$$B_i = \int_\Omega f(x)\tau_i(x) \, dx,$$



Un peu de mathématiques pour les éléments finis

Typical Elliptic Boundary Value Problem

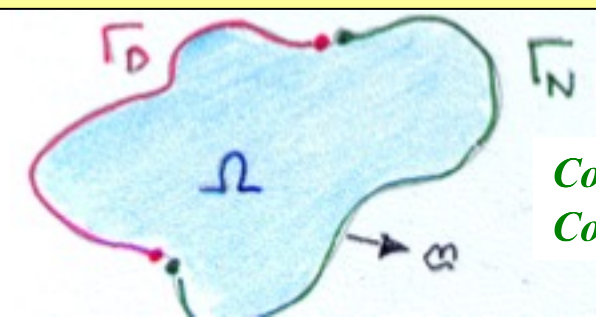
Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{< (\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}) \cdot (a\boldsymbol{\nabla}u) >}_{a(\widehat{u},u)} \quad = \quad \underbrace{< \widehat{u}f > + \ll \widehat{u}g \gg_N,}_{b(\widehat{u})} \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

Exemple de la conduction thermique

Equation elliptique
Il faut imposer une condition sur l'ensemble de la frontière !
Il faut au moins un point avec une condition essentielle !

Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet



Conditions naturelles
Conditions de Neumann

$v = \alpha w + \beta r$

$b(v) = \alpha\, b(w) + \beta\, b(r)$

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\widehat{u}, u) \quad = \quad b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

Abstract generic elliptic problem

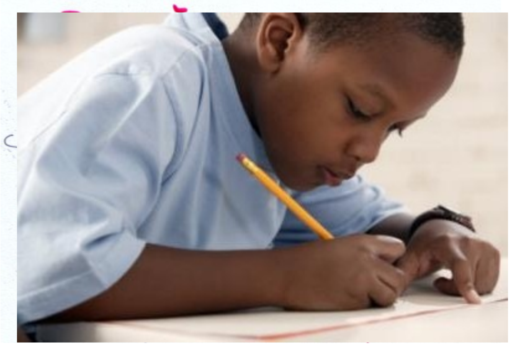
Trouver $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) \quad = \quad \min_{v \,\in \mathcal{U}} \quad \underbrace{\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)}_{J(v)},$$

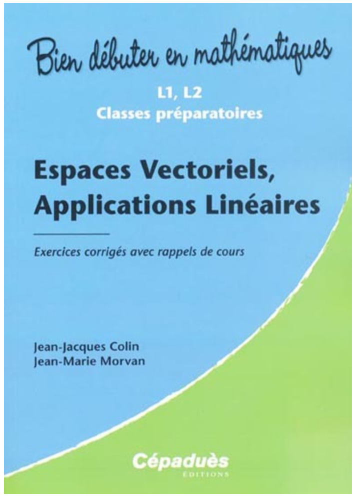
Il est aussi temps de commencer
à se poser quelques questions
sur la définition de l'espace fonctionnel…

a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive
b est une forme linéaire et continue

Ces hypothèses sont satisfaites
pour un problème faible d'une équation elliptique…



C’est quoi une forme linéaire ?



Supposons tout d’abord que U est un espace vectoriel…

b est une forme linéaire si

$$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}$$

---

a est une forme bilinéaire si

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$
$$a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$$

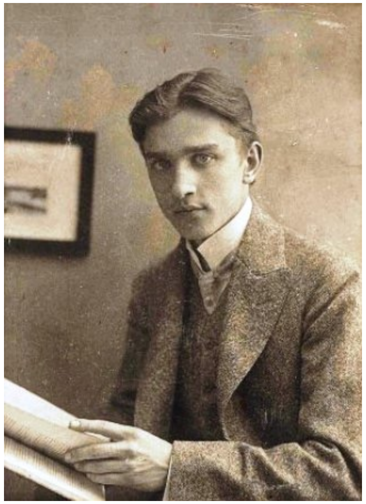
C'est quoi une forme continue ?

b est une forme continue si $\exists\, c > 0$ tel que $|b(u)| \leq c\, \|u\|$ $\forall u \in \mathcal{U}$

---

a est une forme continue si $\exists\, c > 0$ tel que $|a(u,v)| \leq c\, \|u\|\, \|v\|$ $\forall u, v \in \mathcal{U}$

Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



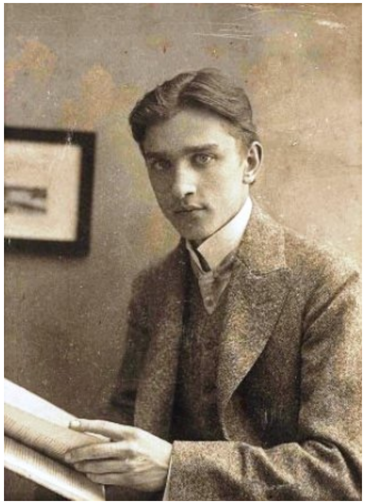
Donnons une norme à notre espace vectoriel *U* …
Supposons en outre qu'il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Banach

[1] Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\|\ \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\|\ \|$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \ldots\}$ est une suite telle que $\forall\, \varepsilon\ \exists\, n\ \|u_i - u_j\| < \varepsilon, \quad i, j > n$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$ converge vers u si $\|u - u_i\| \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

C’est quoi une forme coercive ?

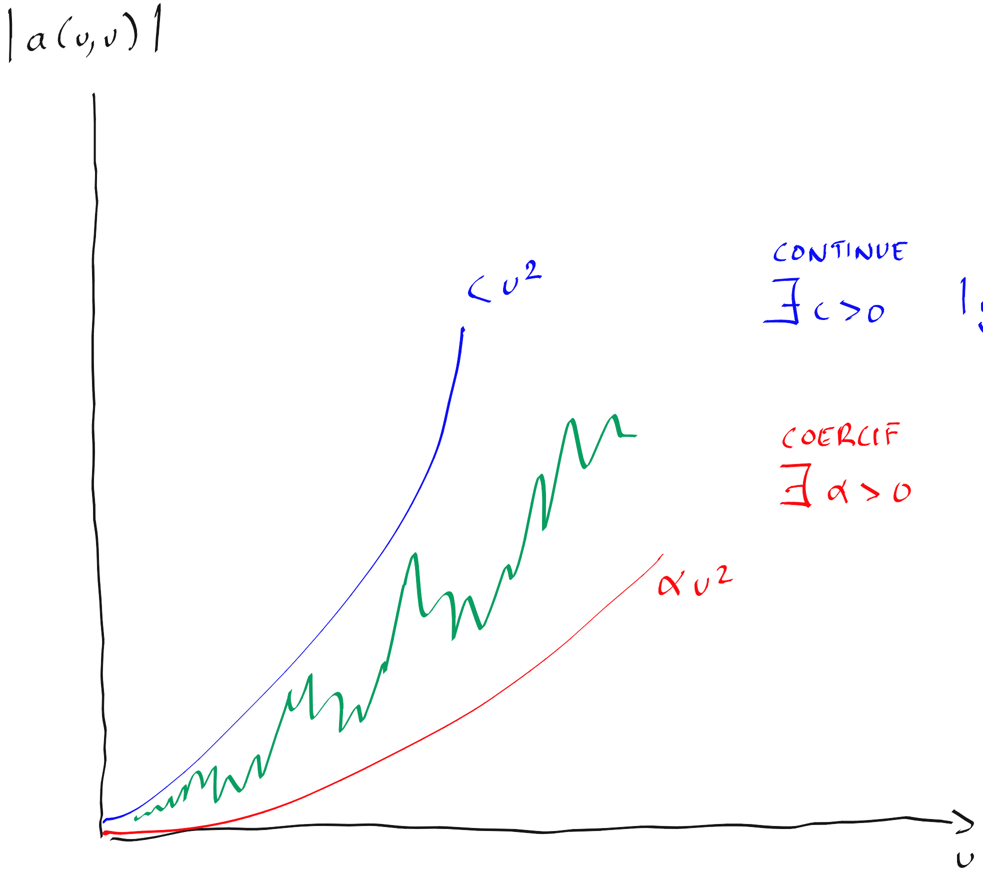
a est une forme coercive ou $\mathcal{U}$-elliptique si $\exists\ \alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\ \|u\|^2$
$\forall u \in \mathcal{U}$

Stephan Banach
Cracovie 1892 – 1945



Donnons une norme à notre espace vectoriel *U* …
Supposons en outre qu’il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Banach

[1] Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\|\ \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\|\ \|$ converge. Oui, mais c’est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \ldots\}$ est une suite telle que $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n\ \|u_i - u_j\| < \varepsilon,\ \ i,j > n$. Oui, mais c’est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$ converge vers u si $\|u - u_i\| \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Noter que si le concept d’espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l’oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d’Hilbert, comme un espace vectoriel muni d’un produit scalaire. Mais, évidemment c’est moins joli d’un point de vue intellectuel...



$a(u,v)$

CONTINUE

$\exists\, c>0 \quad \underbrace{|a(u,v)|}_{a(v,v)} \leqslant c \underbrace{\|u\|\|v\|}_{\|v\|^2}$

COERCIF

$\exists\, \alpha>0 \quad \alpha \|v\|^2 < |a(v,v)|$

Et pratiquement,
c'est quoi continu et coercif ?

C'est quoi une forme continue et coercive ?

a est une forme définie positive
ou est un produit scalaire pour $\mathcal{U}$ si

a symétrique,
$a(u,u) \geq 0 \qquad \forall u \neq 0 \in \mathcal{U}$
$a(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$

$$< u, v >_* \;=\; a(u,v);$$

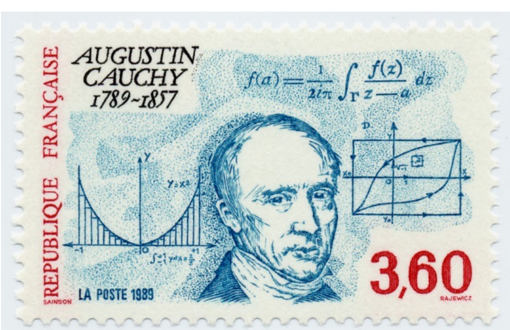
Donnons un produit scalaire à notre espace vectoriel U …
Supposons en outre qu'il soit complet[1]
Il devient un joli espace de Hilbert

C'est un produit scalaire !

David Hilbert
Germany 1862 –1943

Inégalité de Cauchy

$$|< u, v >| \leq \|u\| \, \|v\|$$



$$0 \le \langle \overbrace{u+\lambda v}^{\in \mathcal{U}} , u + \overset{\in \mathbb{R}}{\lambda} v \rangle$$

$$\le \underbrace{\langle u\ u \rangle + 2\lambda \langle u\ v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle}$$

SECOND ORDER POLYNOMIAL $c + 2b\lambda + \lambda^2 a$

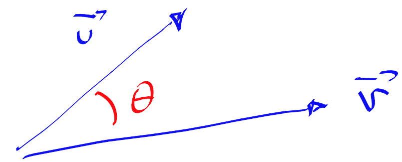
POSITIVE FOR ALL λ $\quad b^2 - ac < 0$

$$\langle u, v \rangle^2 \le \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\boxed{\langle u, v \rangle \le \underbrace{\sqrt{\langle u, u \rangle}}_{\|u\|} \ \underbrace{\sqrt{\langle v, v \rangle}}_{\|v\|}}$$

$\square$

Inégalité de Cauchy



$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = uv\cos\theta$$

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|}$$

$\in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle u + \lambda v, \underbrace{u + \lambda v}_{\in\, \mathcal{U}} \rangle$$

$$\leq \underbrace{\langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle}$$

POLYNOME DU SECOND DEGRE

$$c + 2b\lambda + a\lambda^2$$

POUR TOUT λ $\quad b^2 - ac < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ \\ |\langle u, v \rangle| \leq \underbrace{\sqrt{\langle u, u \rangle}}_{\|u\|} \underbrace{\sqrt{\langle v, v \rangle}}_{\|v\|} \end{array}}$$

$\square$

Théorème de Lax-Milgram :-)

Si	$\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert a est une forme bilinéaire continue et coercive b est une forme linéaire continue,	
alors,	le problème abstrait	Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que $a(\widehat{u}, u) \quad = \quad b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},$
	a une solution unique qui dépend continûment du terme source b ($\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$).	

où la norme d'une forme b est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

Notre problème est bien posé !

La solution existe, est unique et dépend gentiment des données…

Arthur Milgram
Philadelphia 1912 – 1962

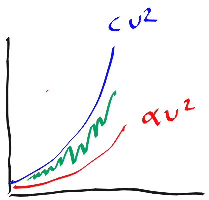
Peter Lax
Budapest 1926

Ce théorème implique la stabilité des problèmes elliptiques…

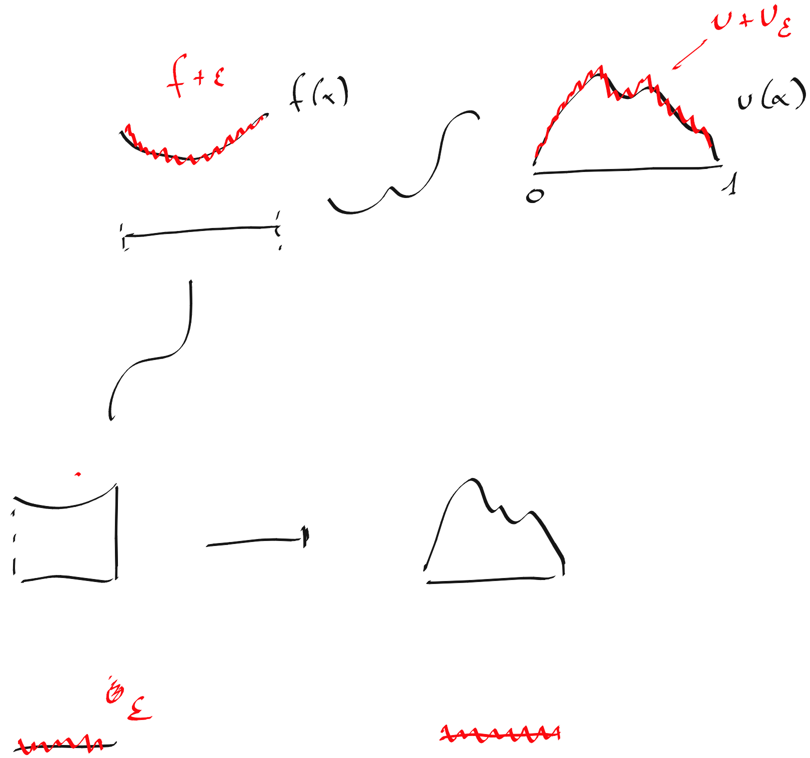
$$\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0$$

$$\|u\| < \frac{1}{\alpha}\|b\|_*$$

CONSTANTE DE COERCIVIE



$$\|b\|_* \triangleq \sup_{v \in U} \frac{|b(v)|}{\|v\|}$$

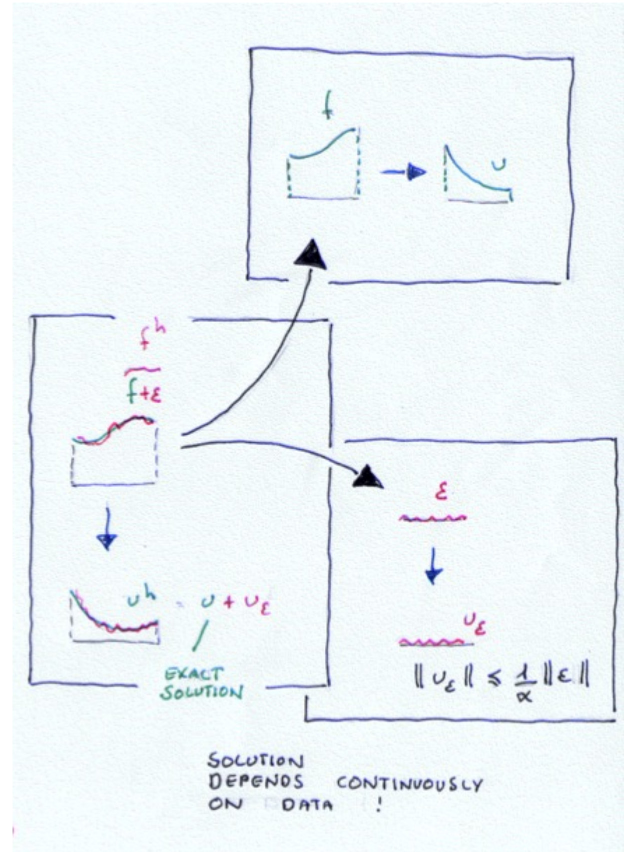


$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\varepsilon\|$$

Ce théorème implique la stabilité des problèmes elliptiques…

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$$

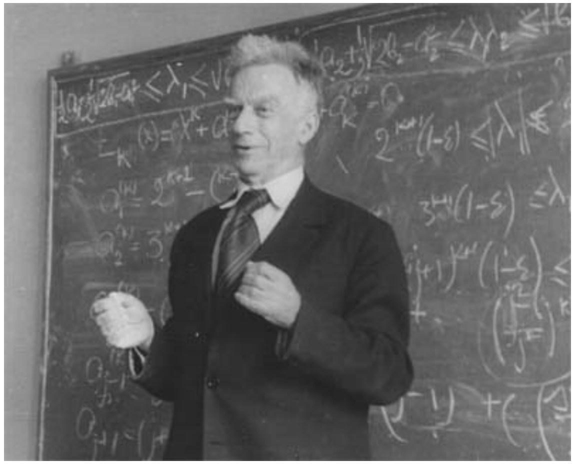
Constante de coercivité
Plus la constante est grande,
plus c'est stable !



…et ça c'est vachement utile !

Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev
Saint-Petersburg 1908 - 1989



$$
\begin{aligned}
L_2(\Omega) = H^0(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^2(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

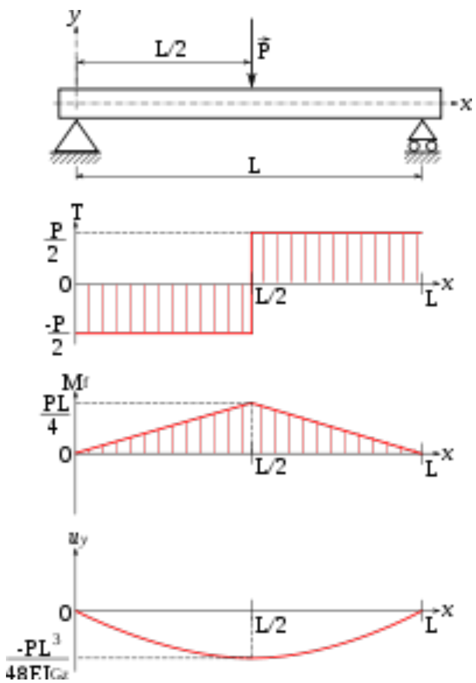
$H_2 \subset H_1 \subset H_0$

Définissons formellement U …
Définissons des normes et des produits scalaires !
Les dérivées sont comprises au sens des distributions afin de rendre les espaces complets !
Ce sont les espaces de Sobolev !

$$
\begin{aligned}
< uv >_0 &= \int_\Omega uv \, dx \\
< uv >_1 &= \int_\Omega uv + u'v' \, dx \\
< uv >_2 &= \int_\Omega uv + u'v' + v''v'' \, dx
\end{aligned}
$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$

Characterizing the smoothness of a function



$$H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}$$