Faire un Dirichlet N en gardant une matrice symétrique

Miguel De Le Court

Prenons la matrice A de base, et focalisons nous sur un noeud i donné. On peut écrire la matrice A comme suit:

$$A = \begin{bmatrix} & \boxed{c_x} & \boxed{c_y} & \\ \boxed{l_x} & a_{xx} & a_{xy} & \boxed{l_x} \\ \boxed{l_y} & a_{yx} & a_{yy} & \boxed{l_y} \\ & \boxed{c_x} & \boxed{c_y} & \end{bmatrix}$$

Pour appliquer du Dirichlet N/T, on va transformer le degré de liberté i en ses composantes normales et tangentes au lieu de x et y. Cela revient à multiplier les deux lignes colonnes par une petite matrice de rotation. Appliquons cette transformation à la sous-matrice de A correspondant à i:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne donc

$$A'_i = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & t_x \\ n_y & t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{nt} \\ a_{tn} & a_{tt} \end{bmatrix}$$

Qui est une expression moche à calculer mais ce n'est pas grave, parce qu'on va garder qu'une des 4 valeurs. On obtient donc

$$A' = \begin{bmatrix} & \boxed{c_n} & \boxed{c_t} & \\ \boxed{l_n} & a_{nn} & a_{nt} & \boxed{l_n} \\ \boxed{l_t} & a_{tn} & a_{tt} & \boxed{l_t} \\ & \boxed{c_n} & \boxed{c_t} & \end{bmatrix}$$

Supposont qu'on soit en Dirichlet N, donc on veut fixer la composante normale. On va donc venir mettre des 0 partout à la ligne et colonne correspondant à la composante normale, sauf sur la diagonale. On obtient donc

$$A'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{tt} \end{bmatrix}$$

Avec a_{tt} qu'on calcule et qui vaut

$$a_{tt} = t_x(t_x a_{xx} + t_y a_{yx}) + t_y(t_x a_{xy} + t_y a_{yy})$$

Ce qui donne comme matrice globale

$$A' = \begin{bmatrix} & \boxed{0} & \boxed{c_t} & \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{l_t} & 0 & a_{tt} & \boxed{l_t} \\ & \boxed{0} & \boxed{c_t} & \end{bmatrix}$$

Maintenant ça c'est cool, mais on voudrait bien avoir tous nos degrés de liberté en x et y. On va donc revenir à la matrice de base A en appliquant la transformation inverse.

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} n_x & t_x \\ n_y & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x^2 + t_x^2 a_{tt} & n_x n_y + t_x t_y a_{tt} \\ n_x n_y + t_x t_y a_{tt} & n_y^2 + t_y^2 a_{tt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{bmatrix} + a_{tt} \begin{bmatrix} t_x^2 & t_x t_y \\ t_x t_y & t_y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'_{xx} & a'_{xy} \\ a'_{yx} & a'_{yy} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice globale A devient donc

$$A = \begin{bmatrix} & \boxed{c'_x} & \boxed{c'_y} & \\ \boxed{l'_x} & a'_{xx} & a'_{xy} & \boxed{l'_x} \\ \boxed{l'_y} & a'_{yx} & a'_{yy} & \boxed{l'_y} \\ & \boxed{c'_x} & \boxed{c'_y} & \end{bmatrix}$$

Reste à appliquer ces transformation sur les l_x, l_y, c_x et c_y. Cela donne

$$\begin{aligned} l'_x &= n_x \cdot 0 + t_x \cdot l_t = t_x(t_x l_x + t_y l_y) \\ l'_y &= n_y \cdot 0 + t_y \cdot l_t = t_y(t_x l_x + t_y l_y) \\ c'_x &= n_x \cdot 0 + t_x \cdot c_t = t_x(t_x c_x + t_y c_y) \\ c'_y &= n_y \cdot 0 + t_y \cdot c_t = t_y(t_x c_x + t_y c_y) \end{aligned}$$