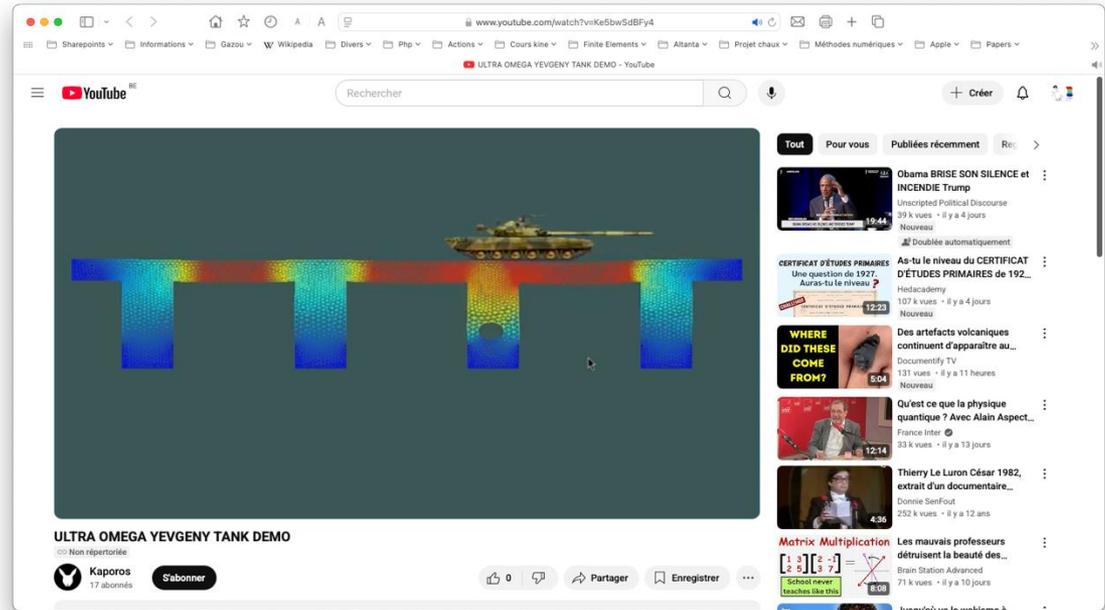


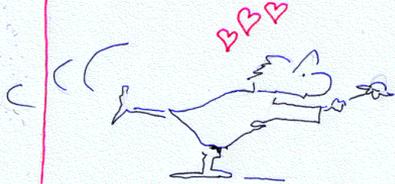
Figure 5: Premiers modes propres du cinquantenaire. Les amplitudes des déformations ont été normalisées et sont adimensionnelles.



<https://www.youtube.com/watch?v=Ke5bwSdBFy4>

Un petit feedback sur le projet !
 Quelques très bons projets !
 ...aussi des trucs moins biens !
 En bac3, vous ne savez toujours pas....

PROBLÈME
ELLIPTIQUE



ELEMENTS
FINIS *



* USUAL FEM "
CLASSICAL
GALERKIN
FORMULATION

Un peu de mathématiques
pour les éléments finis

Théorème de Lax-Milgram :-)

Si \mathcal{U} est un espace d'Hilbert
 a est une forme bilinéaire continue et coercive
 b est une forme linéaire continue,

alors, le problème abstrait

$$\text{Trouver } u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U} \text{ tel que}$$

$$a(\hat{u}, u) = b(\hat{u}), \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},$$

a une solution unique
 qui dépend continûment du terme source b ($\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$).

où la norme d'une forme b est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

Notre problème est bien posé !

**La solution existe, est unique
 et dépend gentiment des
 données...**

Arthur Milgram
 Philadelphia 1912 – 1962



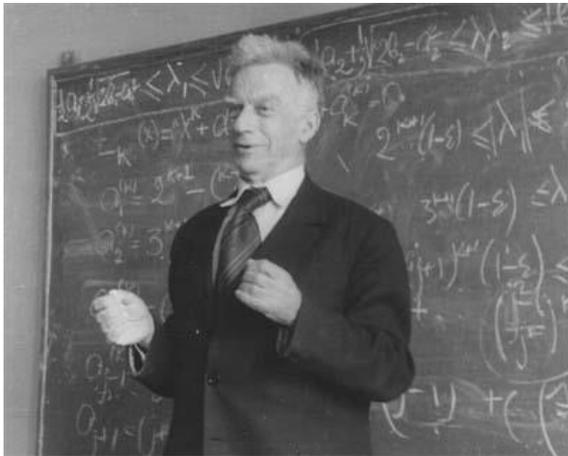
Peter Lax
 Budapest 1926

$[\hat{\circ}]$ $? v \in \mathcal{U}$
 $a(v, \hat{v}) = b(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{U}$
 COERCIF
 CONTINU
 BILINAIRE
 SYM
 CONTINU
 LINEAIRE

$[\hat{\circ}]$ A UNE
 SOLUTION
 UNIQUE
 QUI DEPEND
 CONTINUËMENT DE b

Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

Sergei Sobolev
Saint-Petersburg 1908 - 1989



$$L_2(\Omega) = H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

Définissons formellement $U \dots$

Définissons des normes et des produits scalaires !

**Les dérivées sont comprises au sens des distributions
afin de rendre les espaces complets !**

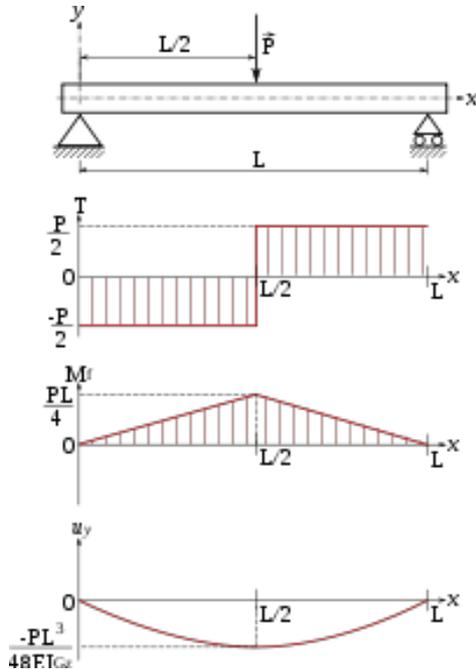
Ce sont les espaces de Sobolev !

$$\langle uv \rangle_0 = \int_{\Omega} uv dx$$

$$\langle uv \rangle_1 = \int_{\Omega} uv + u'v' dx$$

$$\langle uv \rangle_2 = \int_{\Omega} uv + u'v' + v''v'' dx$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$



Characterizing the smoothness of a function

$$H^0(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que } \int_{\Omega} (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 dx < \infty \right\}$$

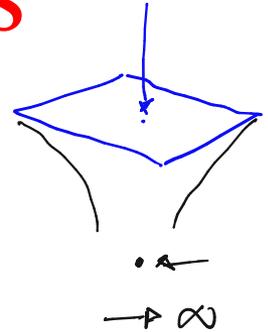
$$x^{-1/4} \in L_2(]0, 1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \left[2 x^{1/2} \right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \left[\ln(x) \right]_0^1 = \infty$$

$$x^{-1/2} \notin L_2(]0, 1[)$$

Ce n'est pas
toujours
évident ...



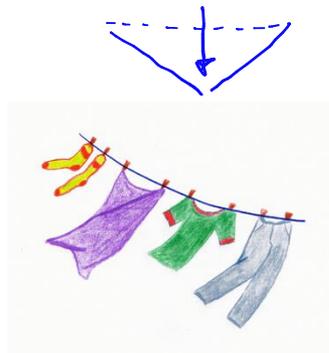
Théorèmes d'immersion de Sobolev
Est-ce que c'est continu, ces brols ?

Si $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $n=2$
 $2k > n$,
 $k=1$ /
 alors $H^k(\Omega) \subset \{w \mid w \in C^0(\bar{\Omega}), \exists c \mid w(x) \mid < c, \forall x \in \Omega\}$

Si $\Omega \subset \mathcal{R}$,
 alors $H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \mid w \in C^k(\bar{\Omega}), \exists c \mid w(x) \mid < c, \forall x \in \Omega\}$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$H^1(]0, 1[) \subset C^0(]0, 1[)$$



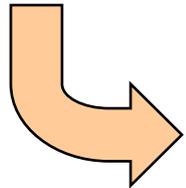
Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !

Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l'infini sous la force !

Et finalement, $a(u,v)$ est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} a(v,v) - b(v) \right)}_{J(v)},$$

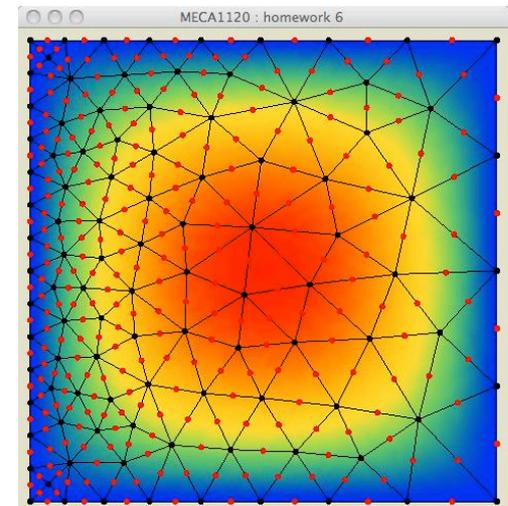


Pour le cas de la conduction stationnaire

$$\mathcal{U} = \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$a(u,v) = \langle \nabla u \cdot k \nabla v \rangle$$

$$b(u) = \langle fu \rangle$$



$$a(u, v) = \int_{\Omega} k u' v' dx$$

$$U \in H^1(\Omega) \quad \Omega =]a, b[$$

$$\|u\|_1^2 = \int_{\Omega} u^2 + (u')^2 dx$$

CONTINUITE

$$|a(u, v)| = k |\langle u', v' \rangle_0| \leq k \|u'\|_0 \|v'\|_0$$

$$\leq k \|u\|_1 \|v\|_1$$

$C = 1/k$

CAUCHY

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

COERCIF

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x v'(t) dt$$

$$v^2(x) \leq \int_0^x dt \int_0^x (v')^2 dt \leq \|v'\|_0^2$$

EN INTEGRANT

$$\langle v', 1 \rangle \leq \|v'\| \|1\|$$

$$\|v\|_0^2 \leq C_2 \|v'\|_0^2$$

$$C_3 (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2) \leq k \|v'\|_0^2$$

$\|v\|_1^2$



Et finalement, $a(u, v)$
est-il continu et coercif
pour l'équation de Poisson...

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{dv}{dx}(t) dt$$

↓ Par l'inégalité de Cauchy $\langle v_x, 1 \rangle \leq \|v_x\| \|1\|$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}$$

↓ En intégrant sur Ω

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2$$

↓

$$kC_2 \underbrace{\left(\|v\|_0^2 + \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2\right)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k \left\|\frac{dv}{dx}\right\|_0^2}_{a(v,v)}$$

C'est coercif !

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0$$

↓

$$\leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

C'est continu !

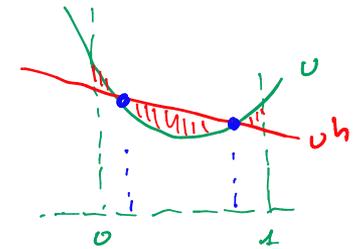
Exemple de la conduction thermique

**Pour avoir un problème bien posé,
il faut au moins un point avec une condition essentielle !**

Estimation a priori de l'erreur

$$\int_0^1 (v - v_h)^2$$

MINIMISER

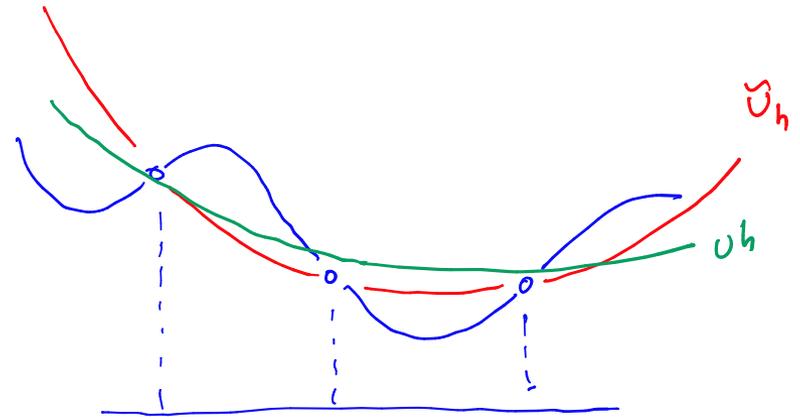


$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$

Lemme de
Bramble-Hilbert

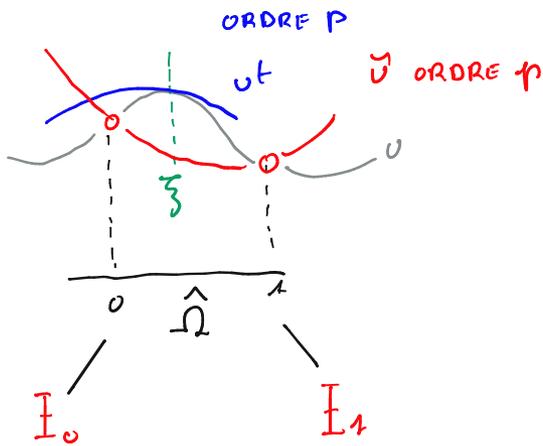
Théorème de la meilleure
approximation énergétique

Lemme de Cea



Erreur de l'interpolation

Lemme de Bramble-Hilbert



$$\frac{d^i}{d\xi^i} (u - u^t) = \frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} + \frac{d^i u^t}{d\xi^i} - \sum_{j=0}^p u(I_j) \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}$$

- car $u^t = u^t$

$$\sum_{j=0}^p u^t(I_j) \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i}$$

$$\left| \frac{d^i}{d\xi^i} e^t \right| \leq \left| \frac{d^i u}{d\xi^i} - \frac{d^i u^t}{d\xi^i} \right| + \sum_{j=0}^p \underbrace{|u^t(I_j) - u(I_j)|}_{\leq C \dots} \underbrace{\left| \frac{d^i \phi_j}{d\xi^i} \right|}_{\leq C}$$

$$\leq C \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|$$

$$\leq C \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|$$

Lemme de Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

Et on calcule finalement
notre norme de Sobolev

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{z}\|_m^2 &= \sum_{e=1}^m \sum_{l=0}^m \int_{\Omega_e} \left(\frac{d^l \tilde{e}}{dx^l} \right)^2 dx \\
 &\leq C^2 \sum_{l=0}^m h^{2(p+1-l)} \|u\|_{p+1}^2 \\
 &\quad \left(\frac{h}{2} \right)^{1-2l} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^l \tilde{e}}{d\xi^l} \right)^2 d\xi \leq C^2 \int_{-1}^1 \max \left| \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} \right|^2 d\xi \\
 &\quad \left(\frac{2}{h} \right)^{1-2(p+1)} \int_{\Omega_e} \max \left| \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} \right|^2 dx
 \end{aligned}$$

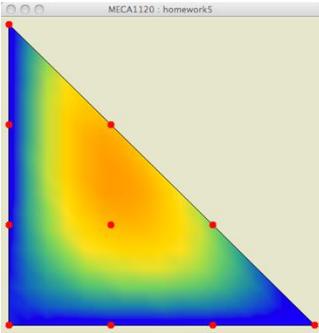
$$\|\tilde{z}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1}$$

Lemme de
Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure
approximation énergétique

Lemme de Cea

Erreur de l'interpolation



$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

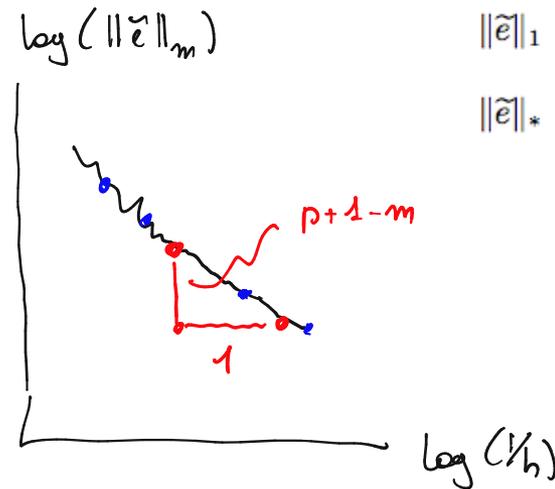
Lemme de Bramble Hilbert

Concrètement...

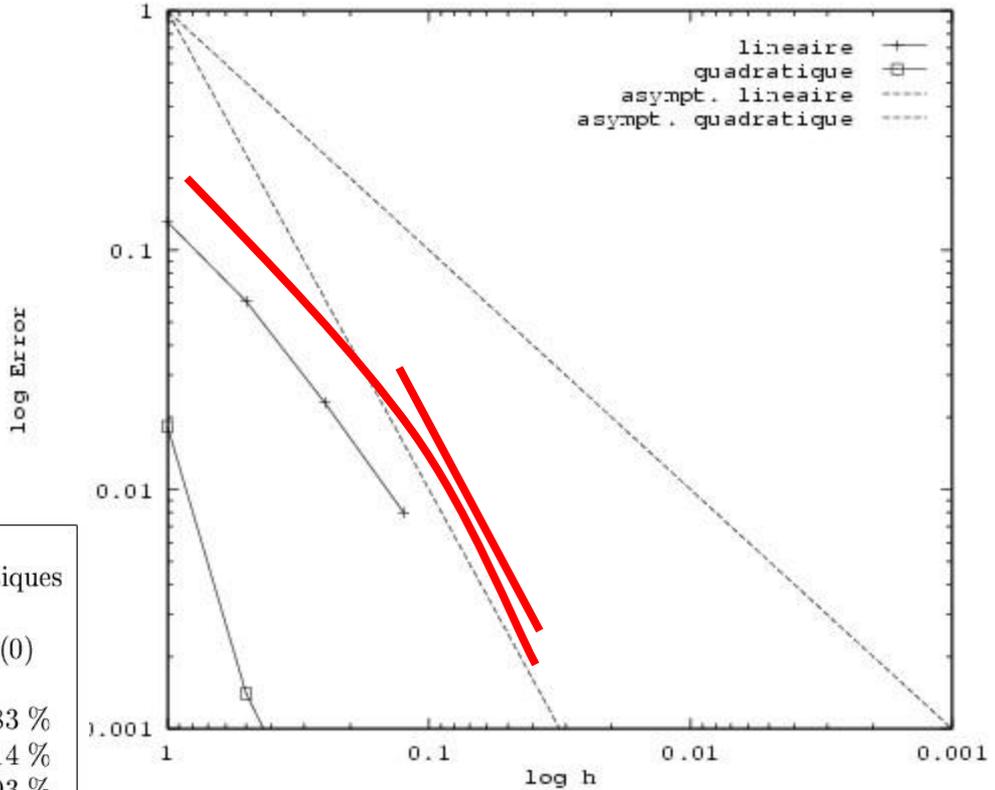
$$\|\tilde{e}\|_0 \leq C_0 h^2 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_1 \leq C_1 h^1 \|u\|_2,$$

$$\|\tilde{e}\|_* \leq C_1 h^1 \|u\|_2.$$

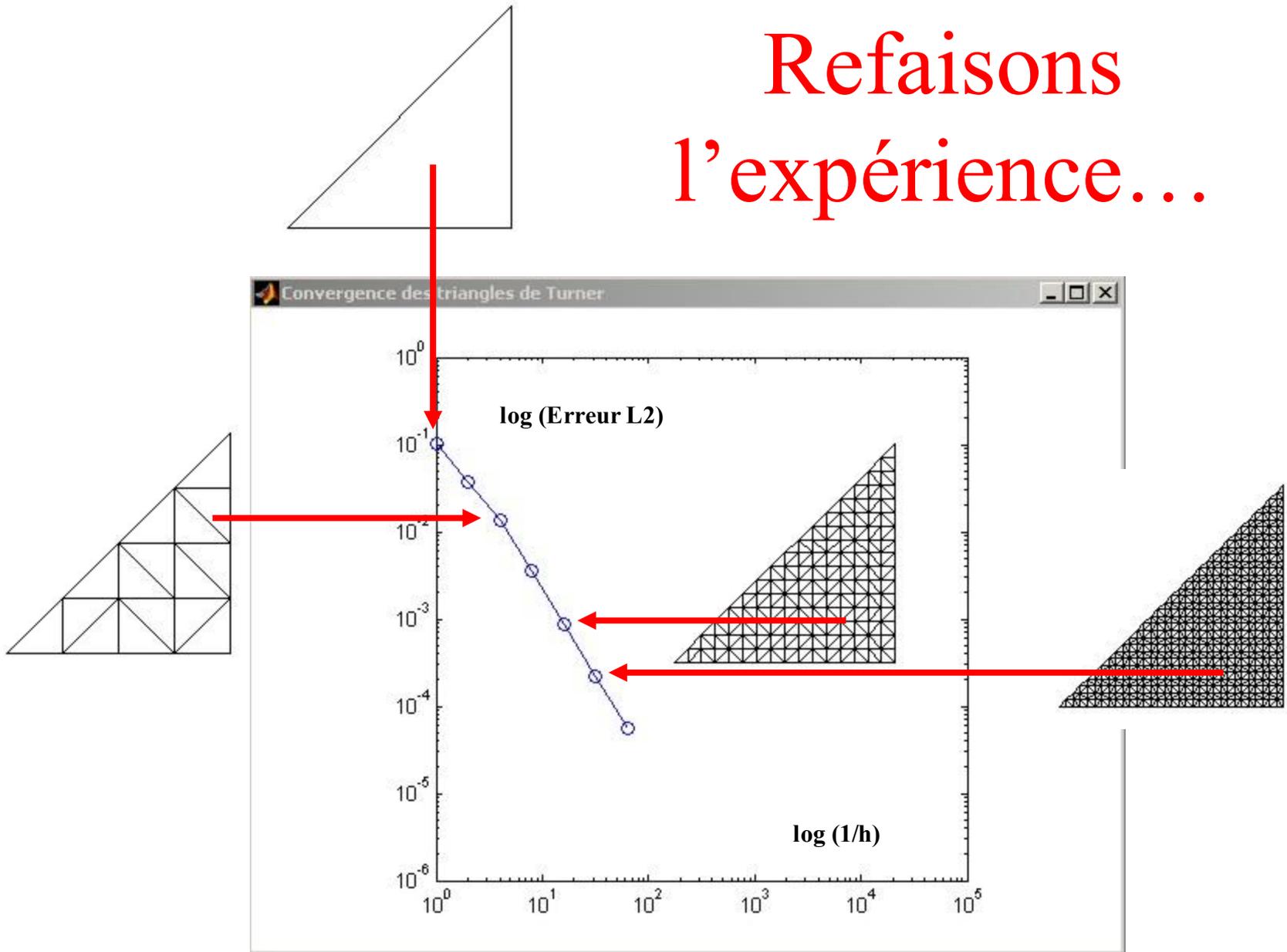


Eléments		Triangles linéaires			Triangles quadratiques		
N_1	h	N	$u^h(0)$	$e(0)$	N	$u^h(0)$	$e(0)$
1	1	3	-0.3333	13.1 %	6	-0.3000	1.83 %
4	1/2	6	-0.3125	6.1 %	15	-0.2950	0.14 %
16	1/4	15	-0.3013	2.3 %	45	-0.2947	0.03 %
64	1/8	45	-0.2969	0.8 %			



Et expérimentalement...

Refaisons l'expérience...



La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d'ordre élevé !

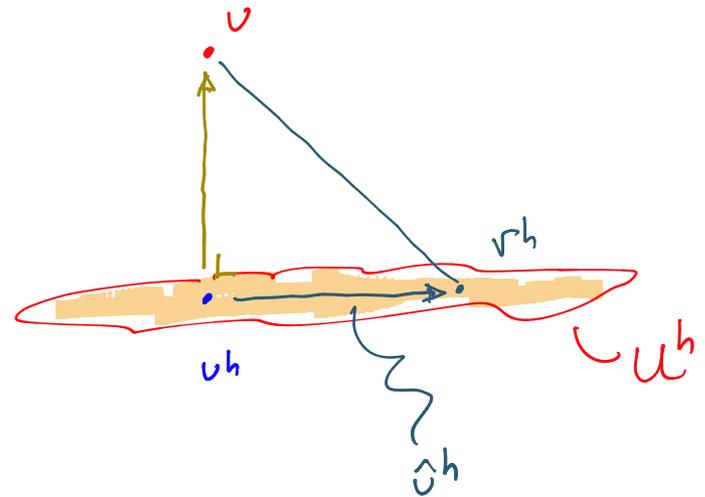
$$\|\tilde{e}\|_m \leq Ch^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque h tend vers 0.

**Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !
Sinon pas de super convergence...
Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-)**

$$\begin{aligned}
 a(v, \hat{v}) &= b(\hat{v}) & \forall \hat{v} \in \hat{U} \\
 a(v, \hat{v}^h) &= b(\hat{v}^h) & \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h \subset \hat{U} \\
 a(v^h, \hat{v}^h) &= b(\hat{v}^h) & \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h \subset \hat{U}
 \end{aligned}$$

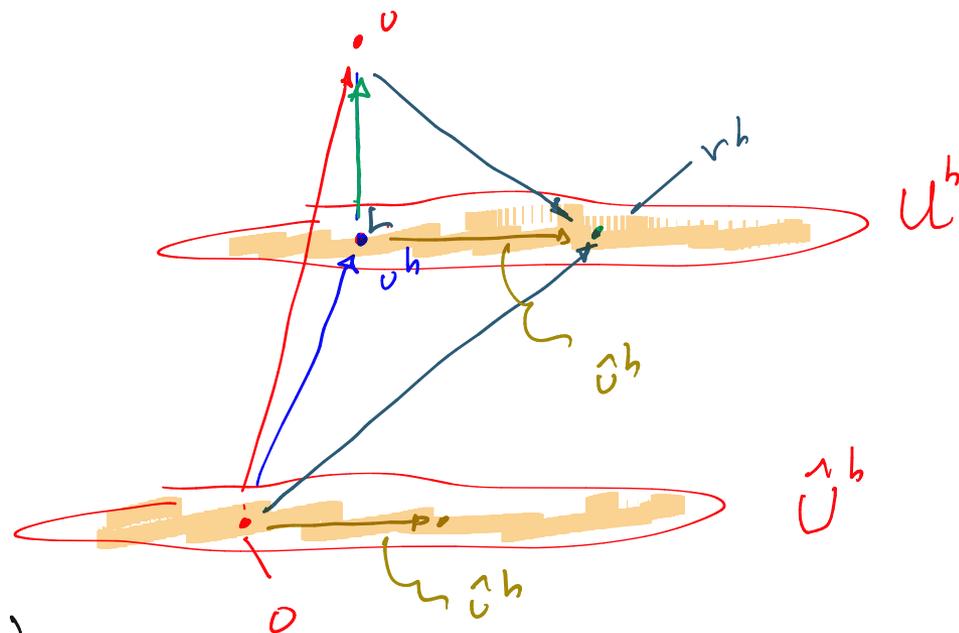
$$a(\underbrace{v - v^h}_e, \hat{v}^h) = 0 \quad \forall \hat{v}^h \in \hat{U}^h$$



Les éléments finis,
c'est une projection orthogonale !

L'erreur énergétique des éléments finis est minimale !

$$\begin{aligned}
 a(v - v^h, v - v^h) &= \\
 a(\underbrace{v - u^h}_e + u^h - v^h, \dots) &= \\
 a(e, e) + a(u^h - v^h, u^h - v^h) &= \\
 &\geq 0 \quad + 2a(e, v - u^h) = 0
 \end{aligned}$$



$$\|v - v^h\|_x^2 = \|e\|_x^2 + \|u^h - v^h\|_x^2$$

$$\|v - v^h\|_x \geq \|e\|_x$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } U = U^h \\
 \|v\|_x^2 = \|e\|_x^2 + \|u^h\|_x^2
 \end{aligned}$$

Lemme de Bramble-Hilbert

Théorème de la meilleure approximation énergétique

Lemme de Cea

Oui, mais c'est
une norme
bizarre, non ?

$$\|e\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|e\|_*^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\tilde{e}\|_*^2 \leq \frac{C}{\alpha} \|\tilde{e}\|^2$$

CAR
COERLIF

CAR
C'EST
LA MEILLEURE
APPROXIMATION
ENERGETIQUE

CAR
CONTINU

$$\leq C^2 h^{2(p+1-m)} \|\cdot\|_{p+1}^2$$

C'est le meilleure approximation
mais dans une norme bizarre !

C'est la meilleure
approximation !

Oui, mais c'est
une norme
bizarre, non ?

Erreur énergétique ?
Cela signifie quoi ?

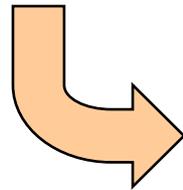
**Lemme de
Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure
approximation énergétique**

Lemme de Cea

Lemme de Cea

$$\|e\|^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|^2$$



Estimation de l'erreur

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2$$

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,$$

Estimation de l'erreur d'interpolation,

En vertu du lemme de Cea,

$$\|e\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|e\|_*^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\tilde{e}\|_*^2 \leq \frac{c}{\alpha} \|\tilde{e}\|^2,$$

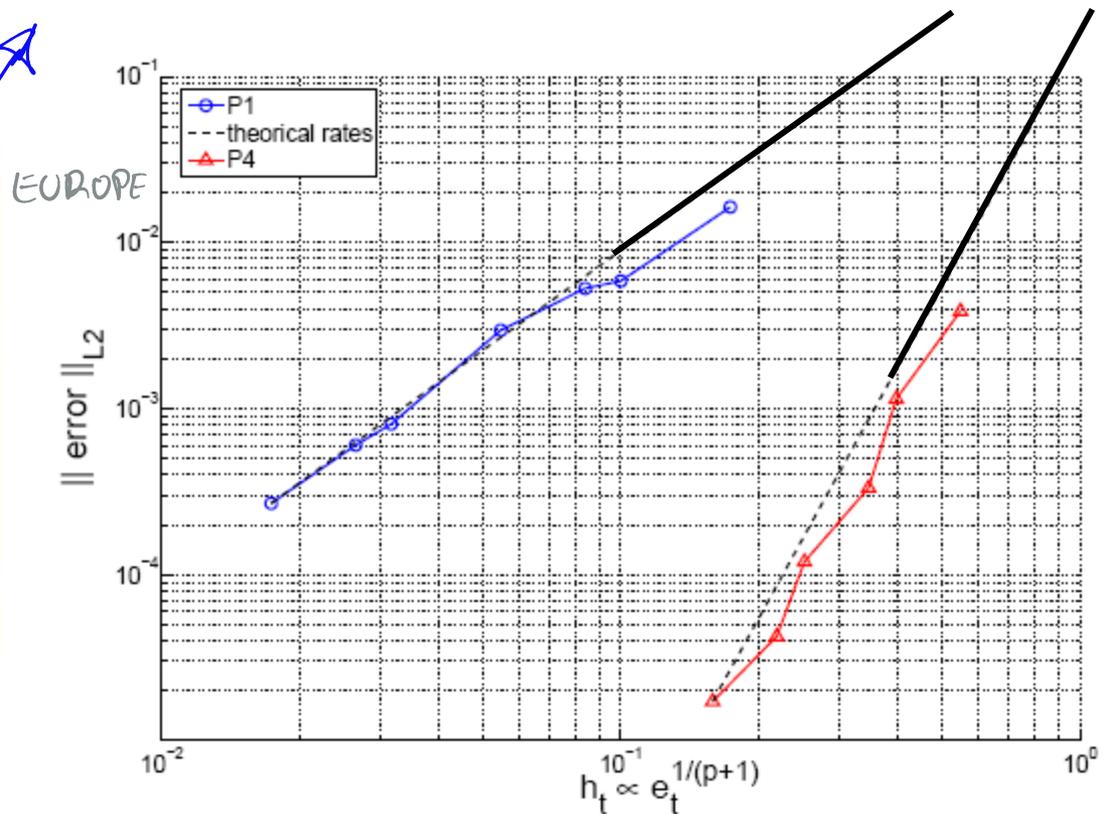
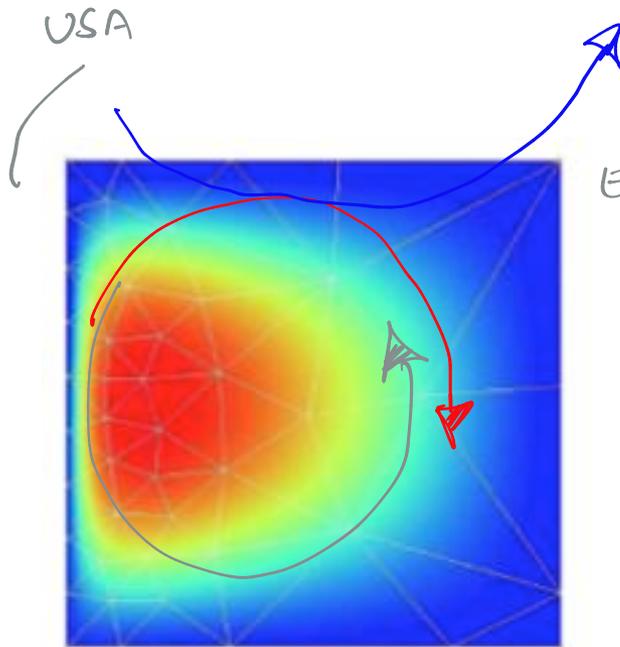
En vertu de la continuité de a ,

Car u^h est la meilleure approximation énergétique,

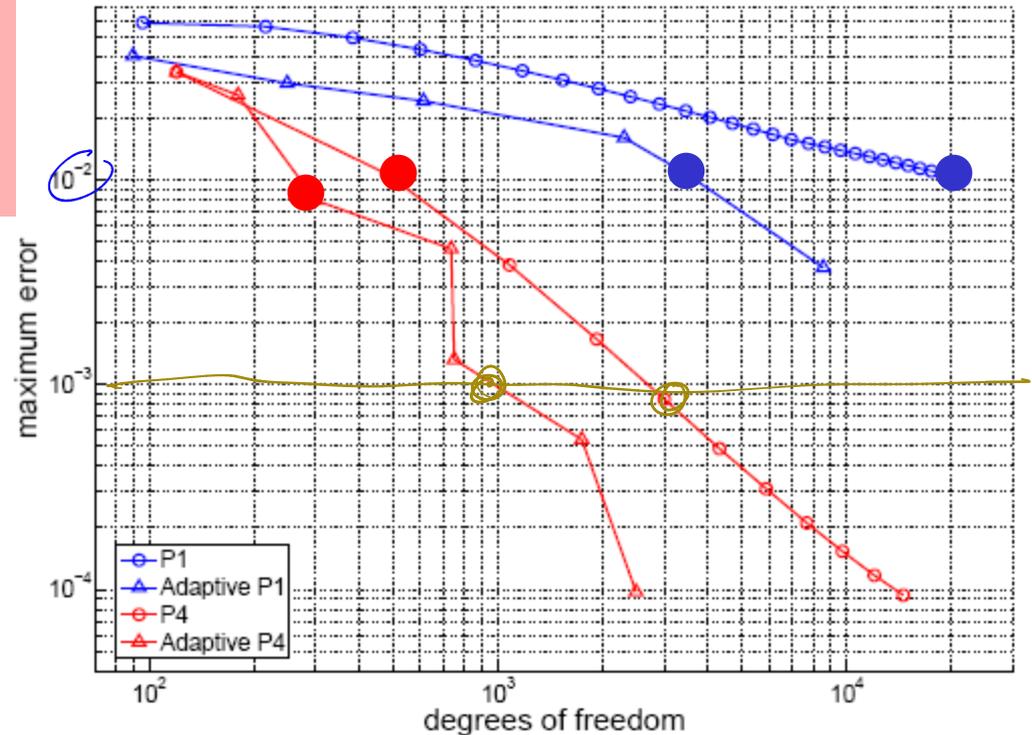
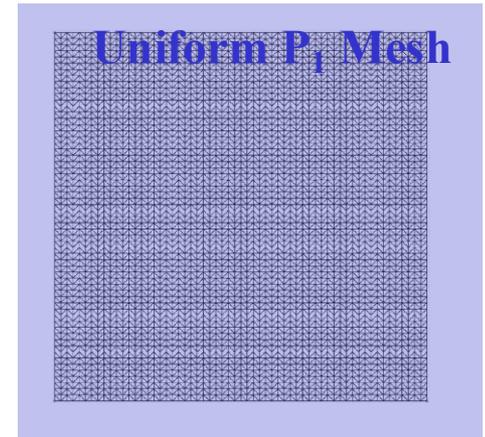
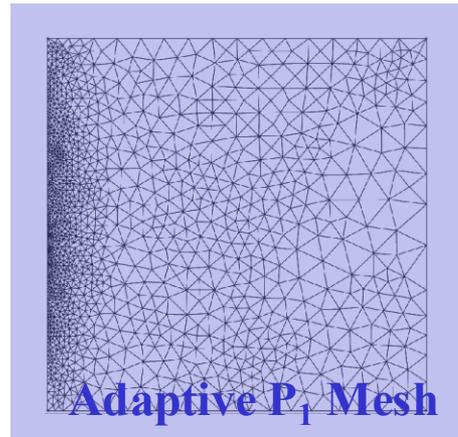
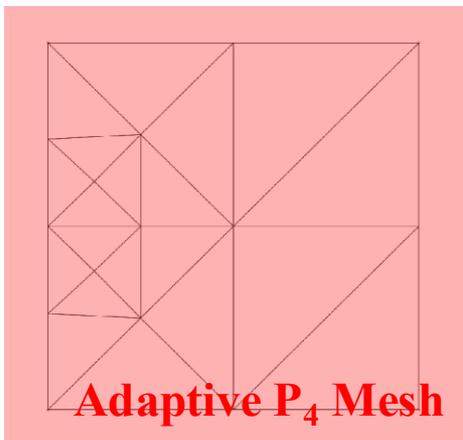
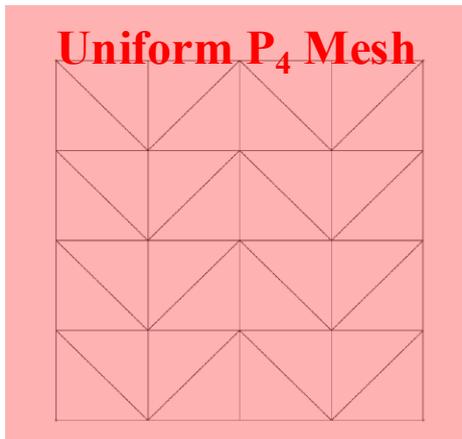
En vertu de la coercivité de a ,

Non, c'est aussi vrai dans toutes les normes de Sobolev !

Theoretical rates of convergence are obtained for the analytical Stommel problem



How does it converge ?



$$r^h = \nabla \cdot (a \nabla u^h) + f.$$

La technique de Galerkin
consiste à annuler en moyenne
le produit du résidu
avec les fonctions de forme

Et cette manière de procéder minimise
l'erreur dans la norme L2 : c'est une
formulation optimale en ce sens !



Galerkin 1871-1945

Les éléments finis
sont une méthode
de résidus pondérés

$$\langle \tau_i r^h \rangle = 0,$$

↓

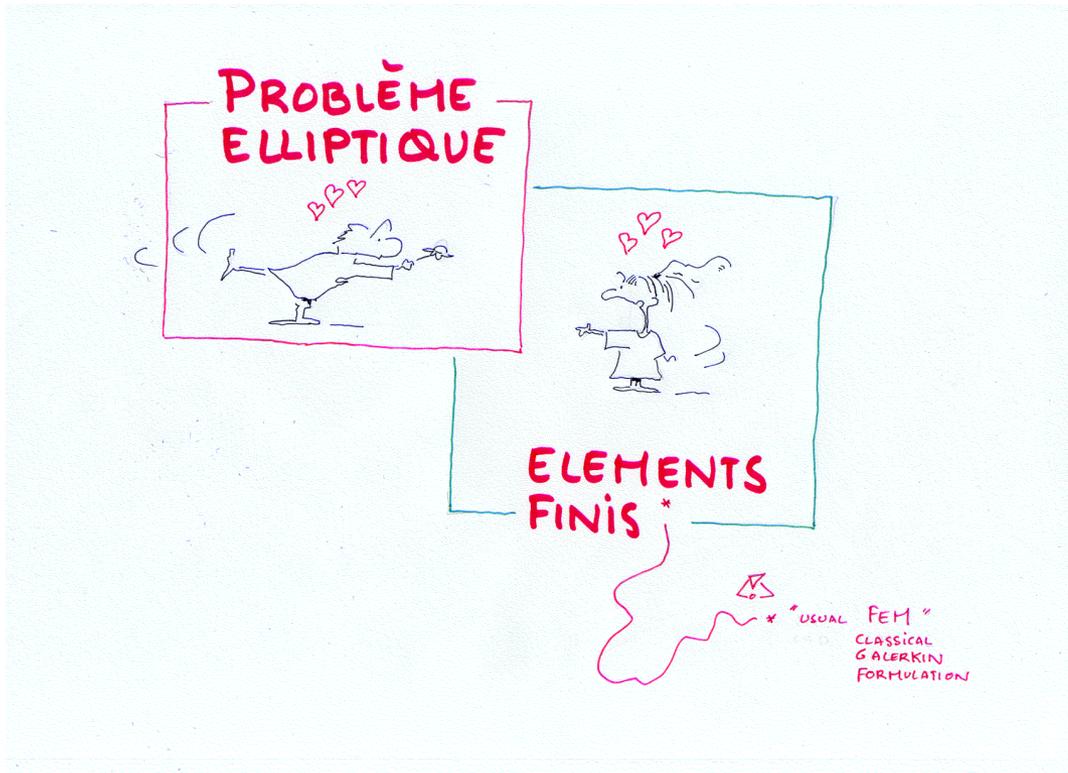
$$\langle \tau_i (\nabla \cdot (a \nabla u^h)) \rangle + \langle \tau_i f \rangle = 0,$$

↓

$$\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla u^h) \rangle = \langle \tau_i f \rangle,$$

↓

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\langle (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla \tau_j) \rangle}_{A_{ij}} U_j = \underbrace{\langle \tau_i f \rangle}_{B_i}$$



Galerkin, c'est donc optimal
pour des équations elliptiques