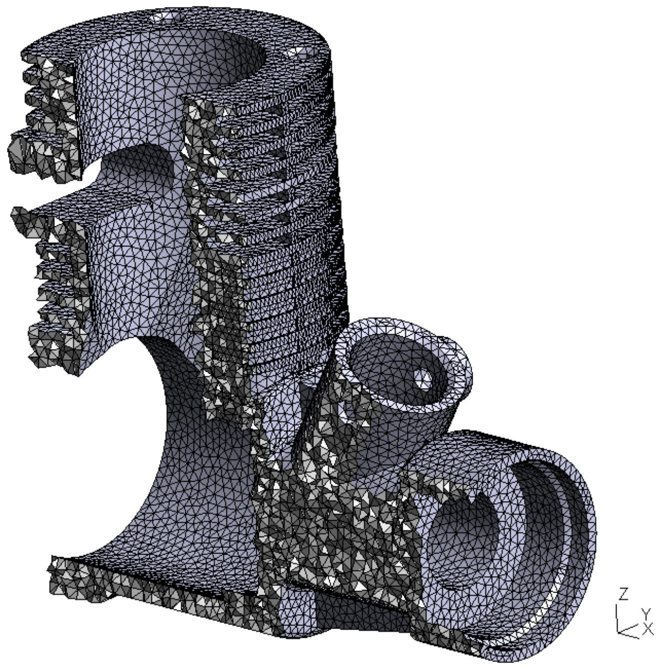
Définir localement une fonction sur un maillage



Fonctions de base spécifiées a priori

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} U_j \tau_j(\mathbf{x})$$

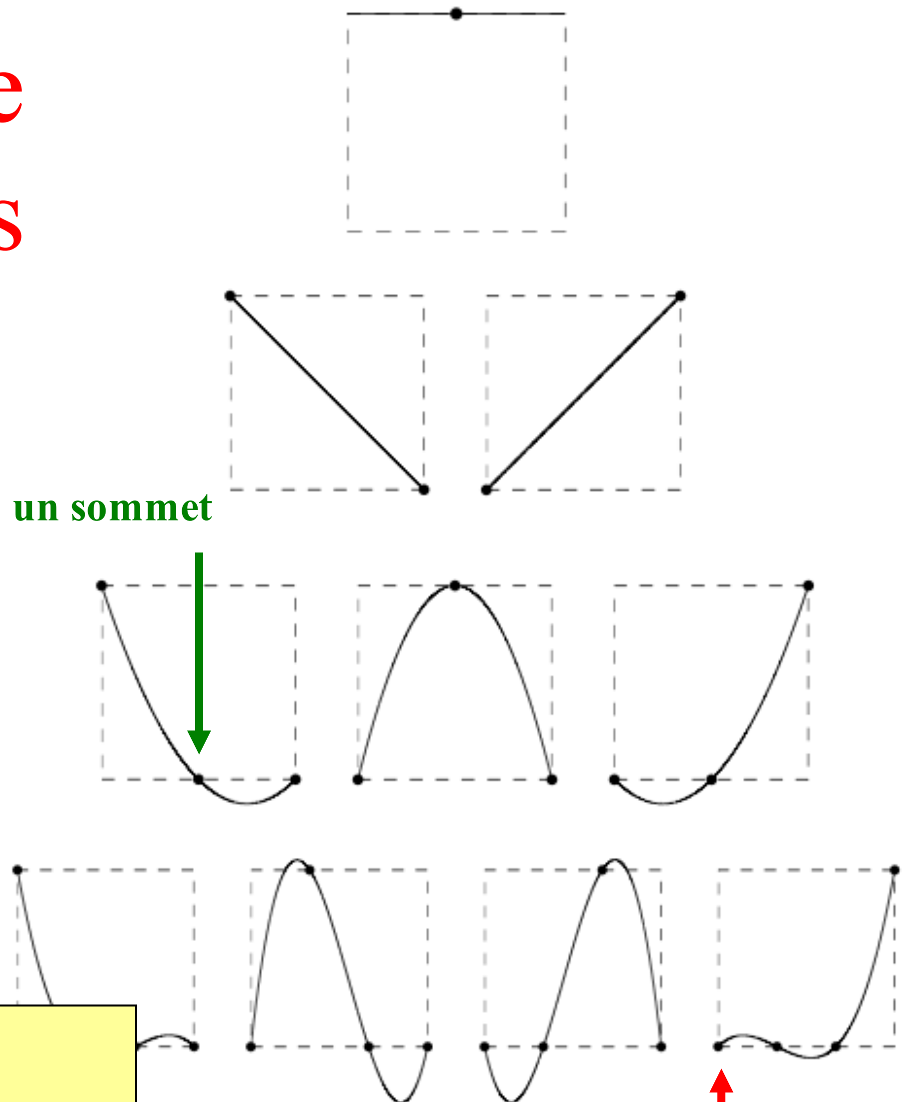
Valeurs nodales inconnues

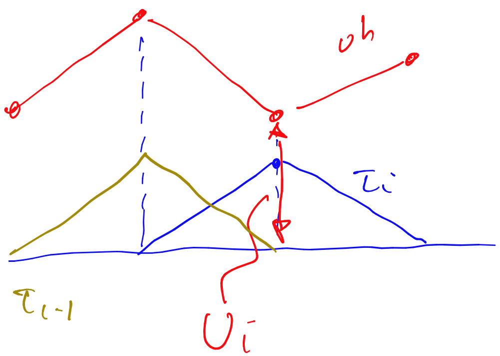
The problem geometry is divided in small finite elements.

On each element, the solution is approximated by means of unknown nodal values and given polynomials

Fonctions de forme unidimensionnelles de Lagrange

Ce nœud n'est pas un sommet





Nodes and other nodes :-)

Nodes of the meshes = vertices
Location of nodal values = nodes
For linear piecewise interpolation, all nodes are vertices

Sommet

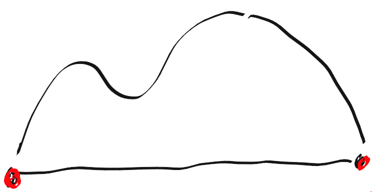
Interpolation linéaire par morceaux : so easy !

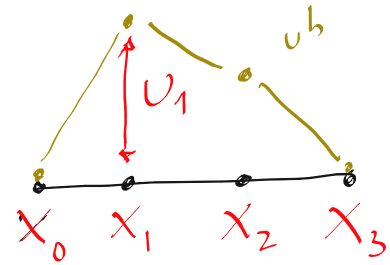
$$\tau_i(X_j) = \underbrace{\delta_{ij}}$$

$i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$

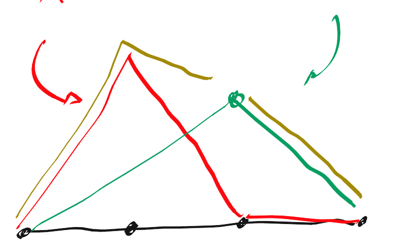
$i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$

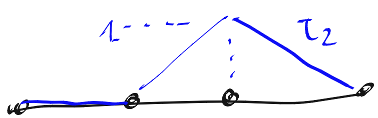
$v \in \mathcal{U}$



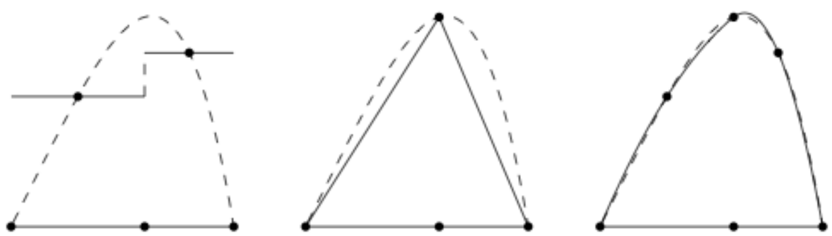


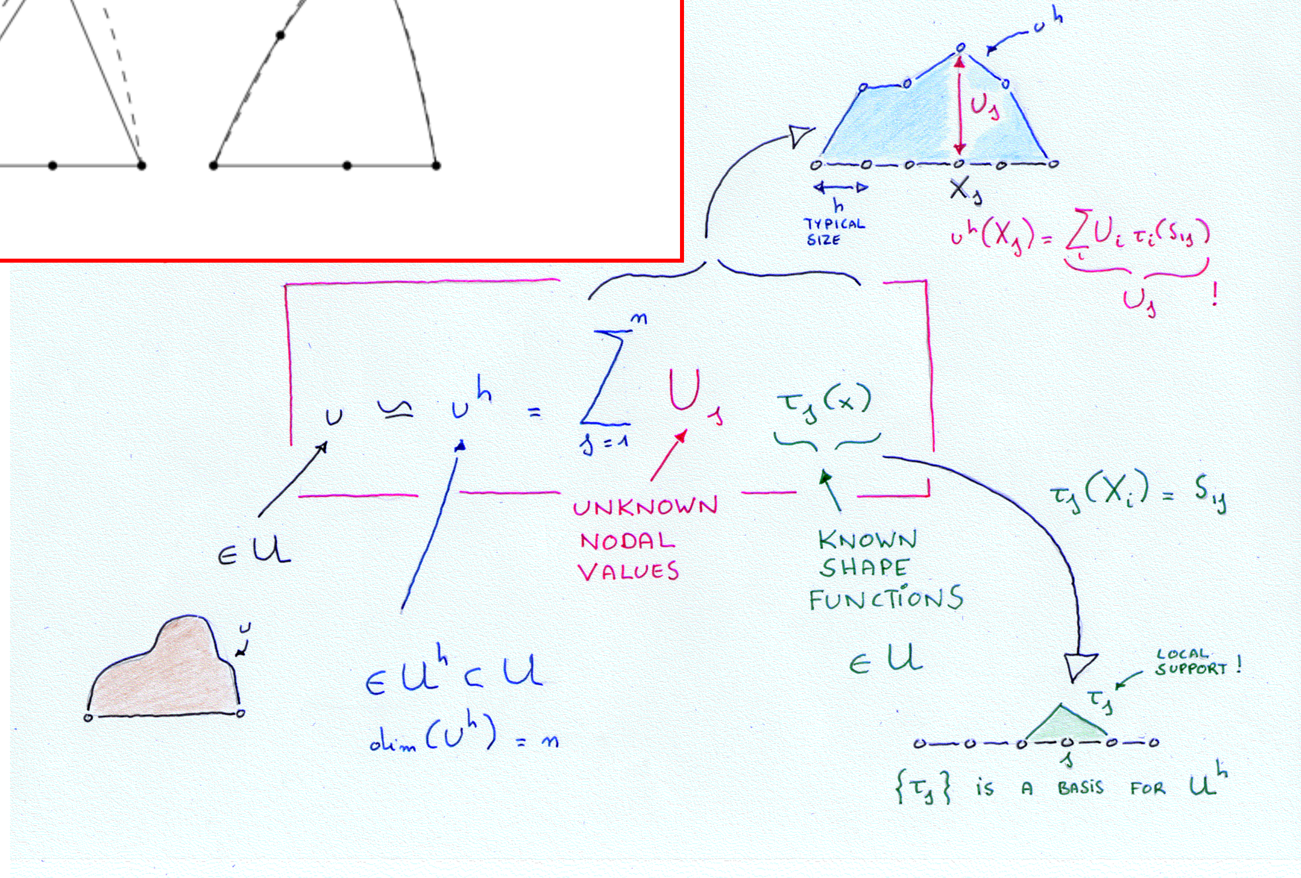
$$u^h = \underbrace{U_1}\,\underbrace{\tau_1} + \underbrace{U_2}\,\underbrace{\tau_2}$$





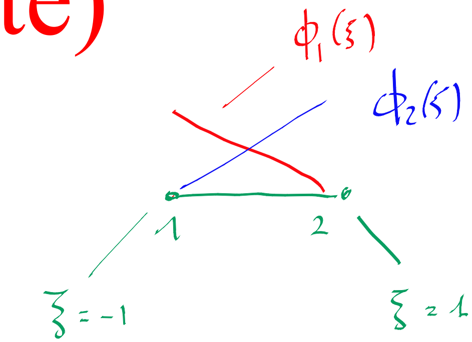
En une dimension…



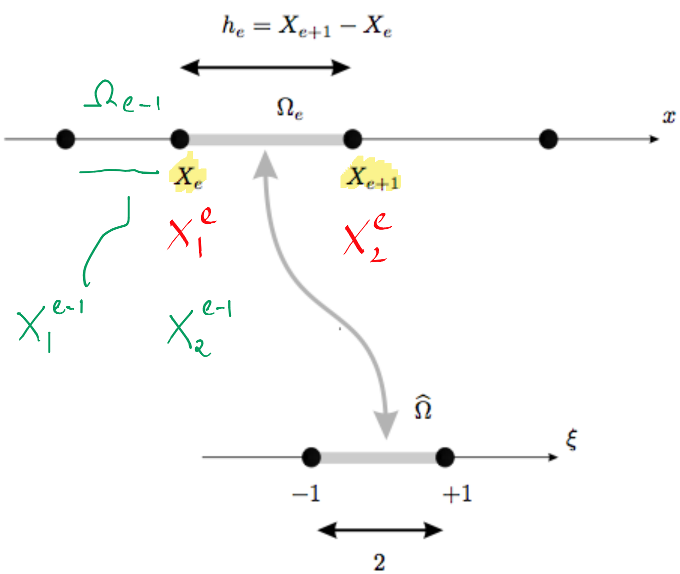


Un élément parent (template) pour définir les fonctions de forme

$$x(\xi) = X_1^e \phi_1(\xi) + X_2^e \phi_2(\xi)$$



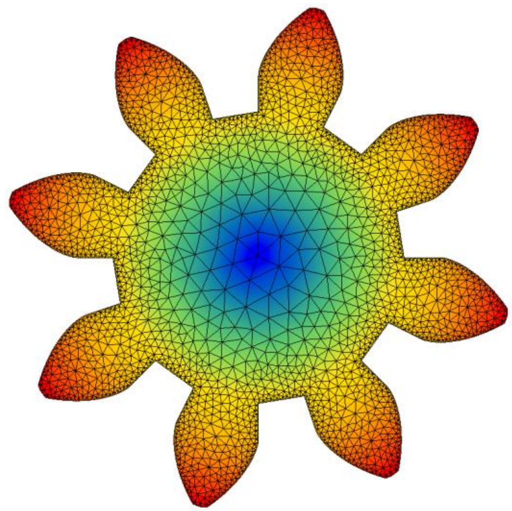
$$\phi_1(\xi) = (1-\xi)/2$$
$$\phi_2(\xi) = (1+\xi)/2$$

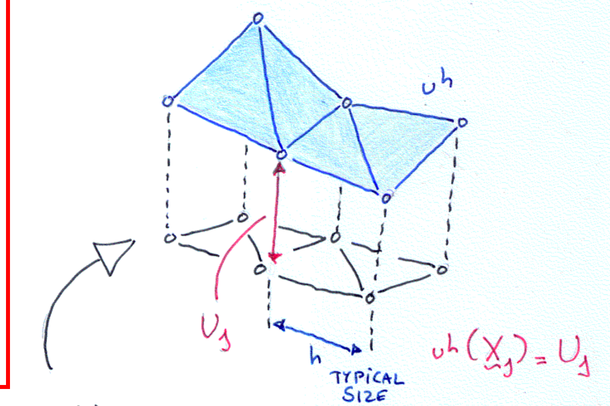


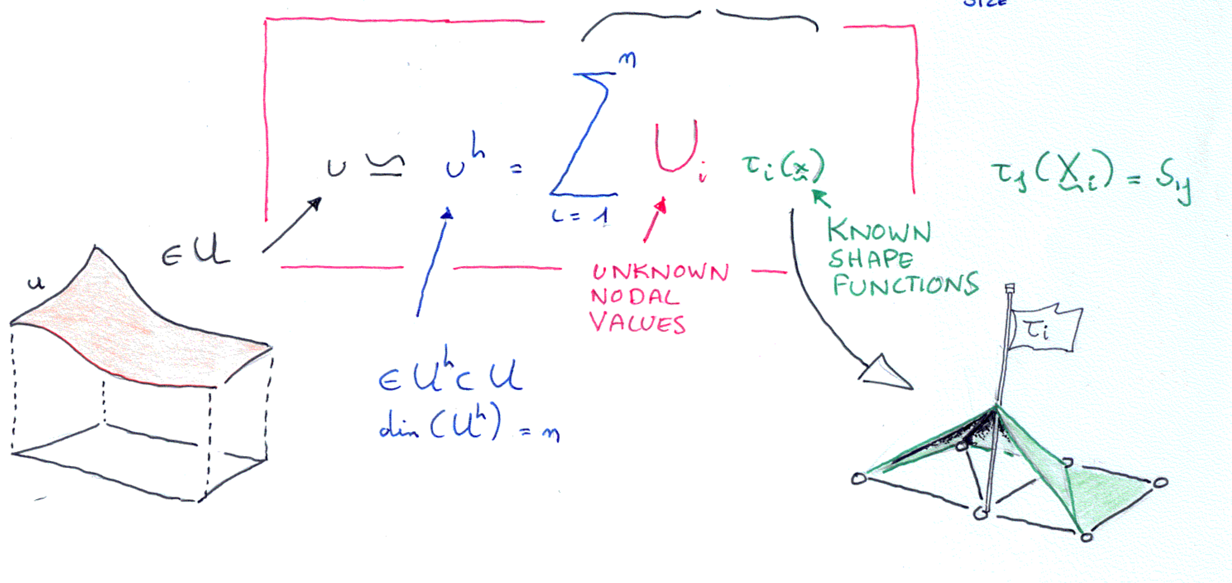
$$\boxed{\begin{aligned} x(\xi) &= \xi\frac{(X_{e+1}-X_e)}{2} + \frac{(X_{e+1}+X_e)}{2}, \\ \xi(x) &= \frac{2x-(X_{e+1}+X_e)}{(X_{e+1}-X_e)}. \end{aligned}}$$

Isomorphisme linéaire entre l'élément parent et tous les autres éléments…

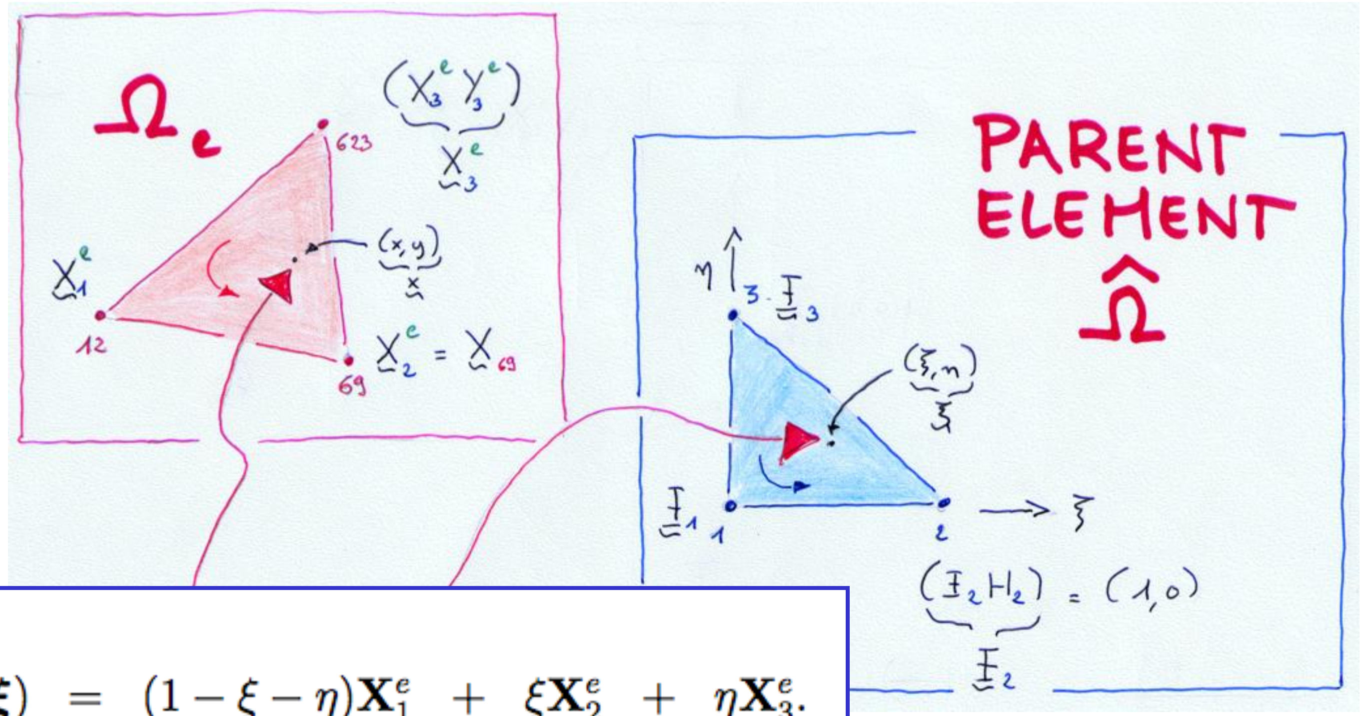
En deux dimensions







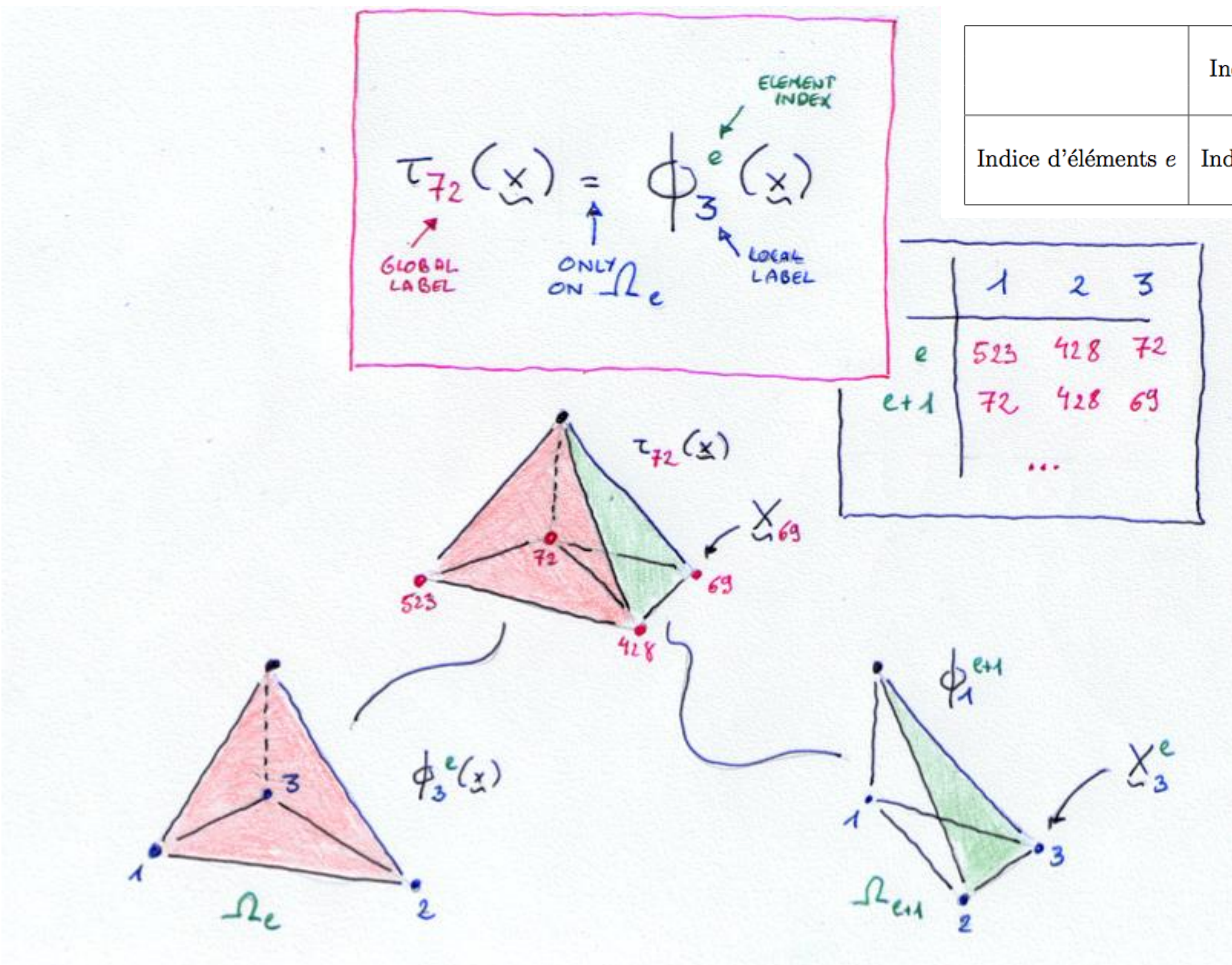
Un triangle parent pour définir toutes les fonctions de forme



$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \;=\; (1-\xi-\eta)\mathbf{X}_1^e \;+\; \xi\mathbf{X}_2^e \;+\; \eta\mathbf{X}_3^e.$$

Isomorphisme linéaire entre le triangle parent et tous les autres triangles…

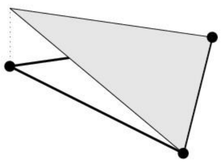
Global shape functions…



	Indice local de noeud i
Indice d'éléments e	Indice global de noeud j

… and local shape functions

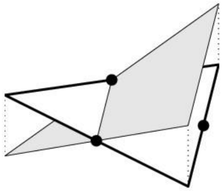
Fonctions de forme usuelles sur le triangle parent



$$\begin{aligned}\phi_1(\xi,\eta) &= (1-\xi-\eta),\\ \phi_2(\xi,\eta) &= \xi,\\ \phi_3(\xi,\eta) &= \eta.\end{aligned}$$

Fonctions linéaire continue : P_1-C_0

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi,\eta) &= 1-2\eta,\\ \phi_2(\xi,\eta) &= -1+2(\xi+\eta),\\ \phi_3(\xi,\eta) &= 1-2\xi.\end{aligned}$$



Fonctions linéaire non-conforme : P_1-C_{-1}

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi,\eta) &= 1-3(\xi+\eta)+2(\xi+\eta)^2,\\ \phi_2(\xi,\eta) &= \xi(2\xi-1),\\ \phi_3(\xi,\eta) &= \eta(2\eta-1),\\ \phi_4(\xi,\eta) &= 4\xi(1-\xi-\eta),\\ \phi_5(\xi,\eta) &= 4\xi\eta,\\ \phi_6(\xi,\eta) &= 4\eta(1-\xi-\eta).\end{aligned}$$

Fonctions quadratique continue : P_2-C_0

Il s'agit de fonctions polynomiales définies sur chaque élement

En fonction du choix des fonctions de base, le degré de continuité est différent…
En général, on essaie d'avoir le degré de continuité le plus élevé…
Quoique… on aura quelques surprises !

Le triangle semble optimal pour obtenir des approximations polynomiales complètes…

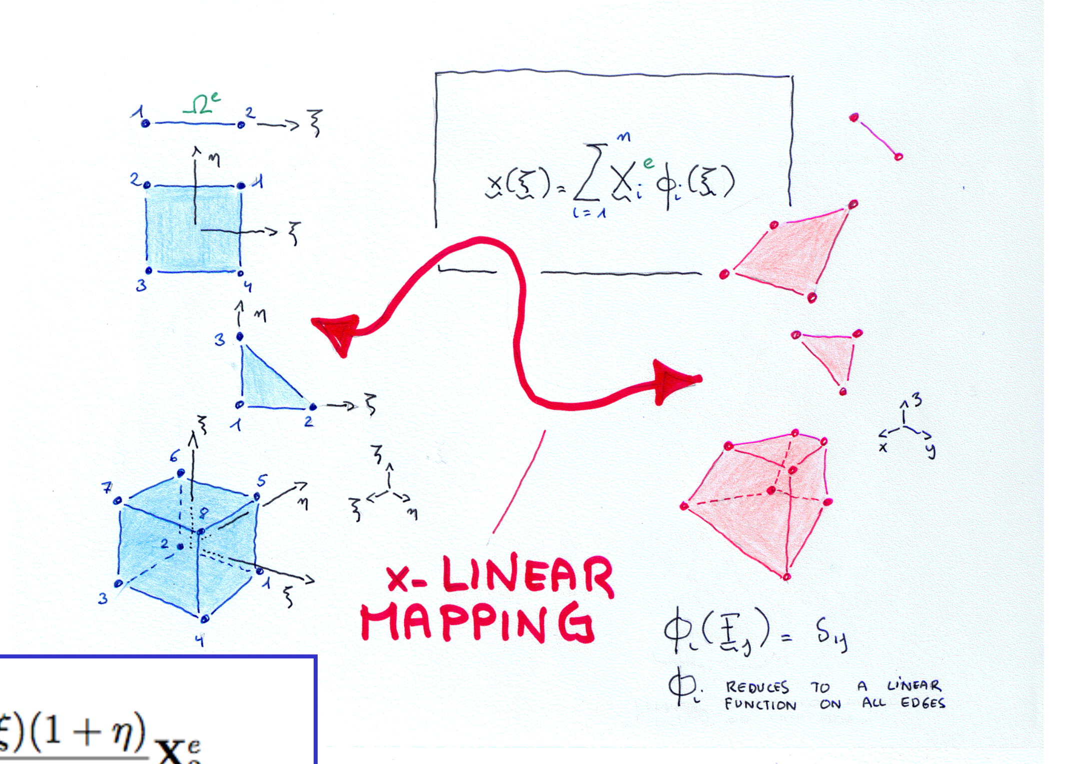
Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & \xi & & \eta & & & & 1 \\
 & \xi^2 & & \xi\eta & & \eta^2 & & & 2 \\
\xi^3 & & \xi^2\eta & & \xi\eta^2 & & \eta^3 & & 3
\end{array}$$

Une des caractéristiques des éléments triangulaires est la possibilité de construire un ensemble de fonctions de forme complètes sur le triangle parent avec un nombre optimal de degrés de liberté.

… et pourtant !

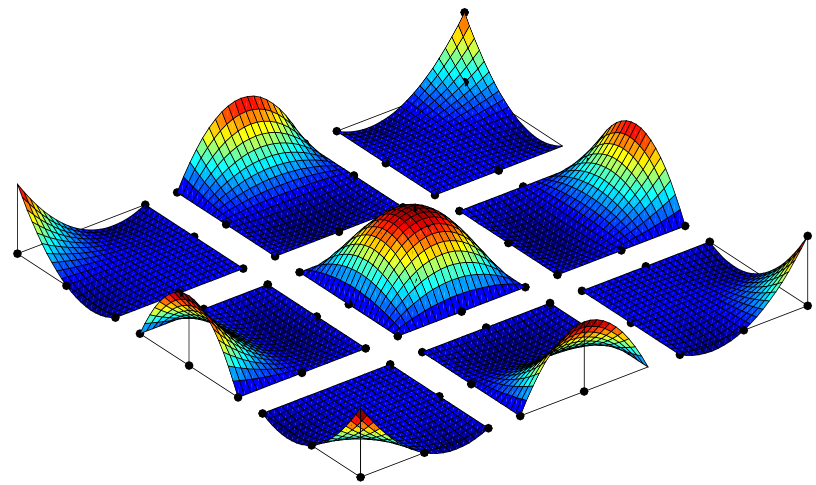
Et pourtant, on a aussi des maillages de quadrilatères, d' hexaèdres…

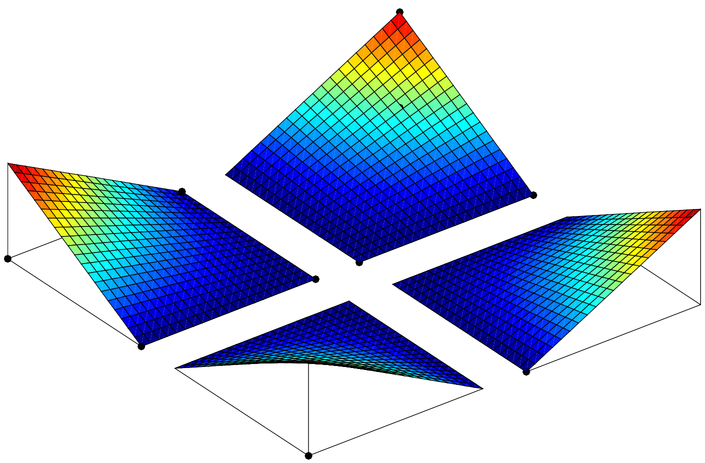


$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{X}_1^e + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{X}_2^e + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{X}_3^e + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{X}_4^e.$$

Isomorphisme bilinéaire (non linéaire donc !) entre le carré parent et tous les autres quadrilatères

Eléments bilinéaires et biquadratiques





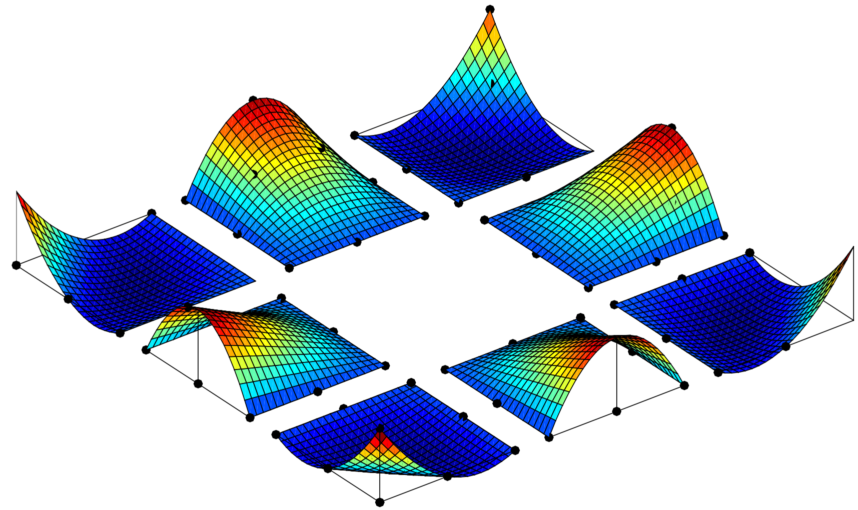
$$
\begin{aligned}
\phi_1(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1+\eta)/4,\\
\phi_2(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1+\eta)/4,\\
\phi_3(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta)/4,\\
\phi_4(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1-\eta)/4.
\end{aligned}
$$

Elément Q_1-C_0

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\xi,\eta) &= \xi(1+\xi)\eta(1+\eta)/4,\\
\phi_2(\xi,\eta) &= -\xi(1-\xi)\eta(1+\eta)/4,\\
\phi_3(\xi,\eta) &= \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)/4,\\
\phi_4(\xi,\eta) &= -\xi(1+\xi)\eta(1-\eta)/4,\\
\phi_5(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1-\xi)\eta(1+\eta)/2,\\
\phi_6(\xi,\eta) &= -\xi(1-\xi)(1-\eta)(1+\eta)/2,\\
\phi_7(\xi,\eta) &= -(1-\xi)(1+\xi)\eta(1-\eta)/2,\\
\phi_8(\xi,\eta) &= \xi(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)/2,\\
\phi_9(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta).
\end{aligned}
$$

Elément Q_2-C_0

Elle sert à rien la neuvième fonction ?

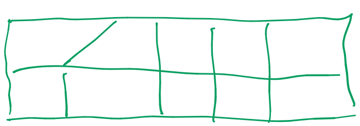


		1				0
	ξ		η			1
ξ^2		$\xi\eta$		η^2		2
	$\xi^2\eta$		$\xi\eta^2$			3
		$\boxed{\xi^2\eta^2}$		*Lagrange*		4

La neuvième fonction de Q_2-C_0 génère un terme d'ordre quatre alors qu'on n'est même pas complet à l'ordre 3 :-)

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1+\eta)(\eta+\xi-1))/4,\\
\phi_2(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1+\eta)(\eta-\xi-1))/4,\\
\phi_3(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta)(-\eta-\xi-1))/4,\\
\phi_4(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1-\eta)(-\eta+\xi-1))/4,\\
\phi_5(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1+\xi)(1+\eta)/2,\\
\phi_6(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1+\eta)(1-\eta)/2,\\
\phi_7(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1-\xi)(1-\eta)/2,\\
\phi_8(\xi,\eta) &= (1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)/2.
\end{aligned}
$$

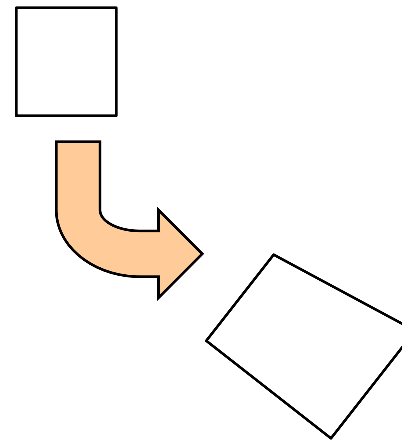
Elément de Serendip : S_2-C_0



L'erreur de Serendip !
La démonstration du recteur :-)

L'élément de Serendip (8 nœuds) et celui de Lagrange (9 nœuds) sont complets à l'ordre deux sur le carré parent

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2,$$

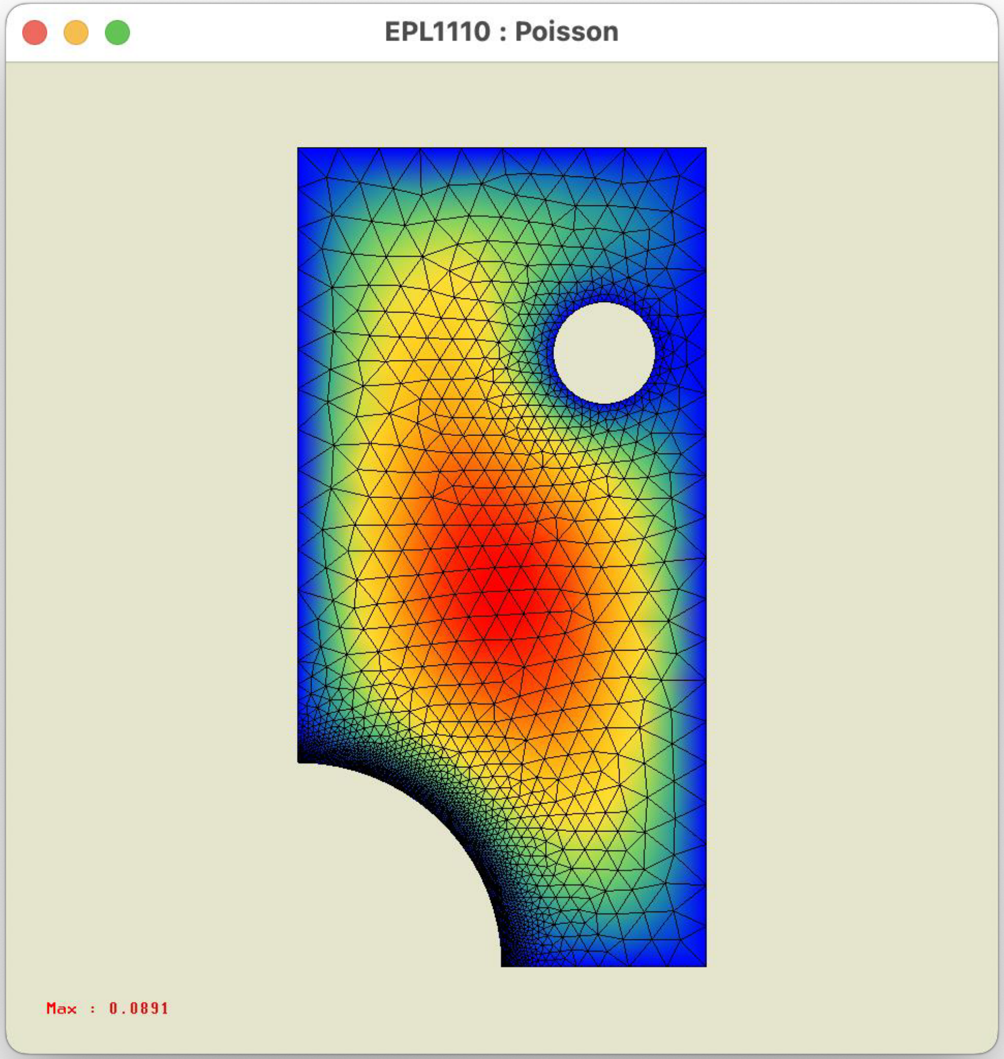


$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\xi,\eta) \quad = \quad & \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{X}_1^e + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}\mathbf{X}_2^e \\ & + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{X}_3^e + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}\mathbf{X}_4^e.\end{aligned}$$

$$b_1 + b_2 x(\xi,\eta) + b_3 y(\xi,\eta) + b_4 x(\xi,\eta) y(\xi,\eta) + b_5 x^2(\xi,\eta) + b_6 y^2(\xi,\eta),$$

$$c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi\eta^2 + c_8\eta\xi^2 + c_9\eta^2\xi^2.$$

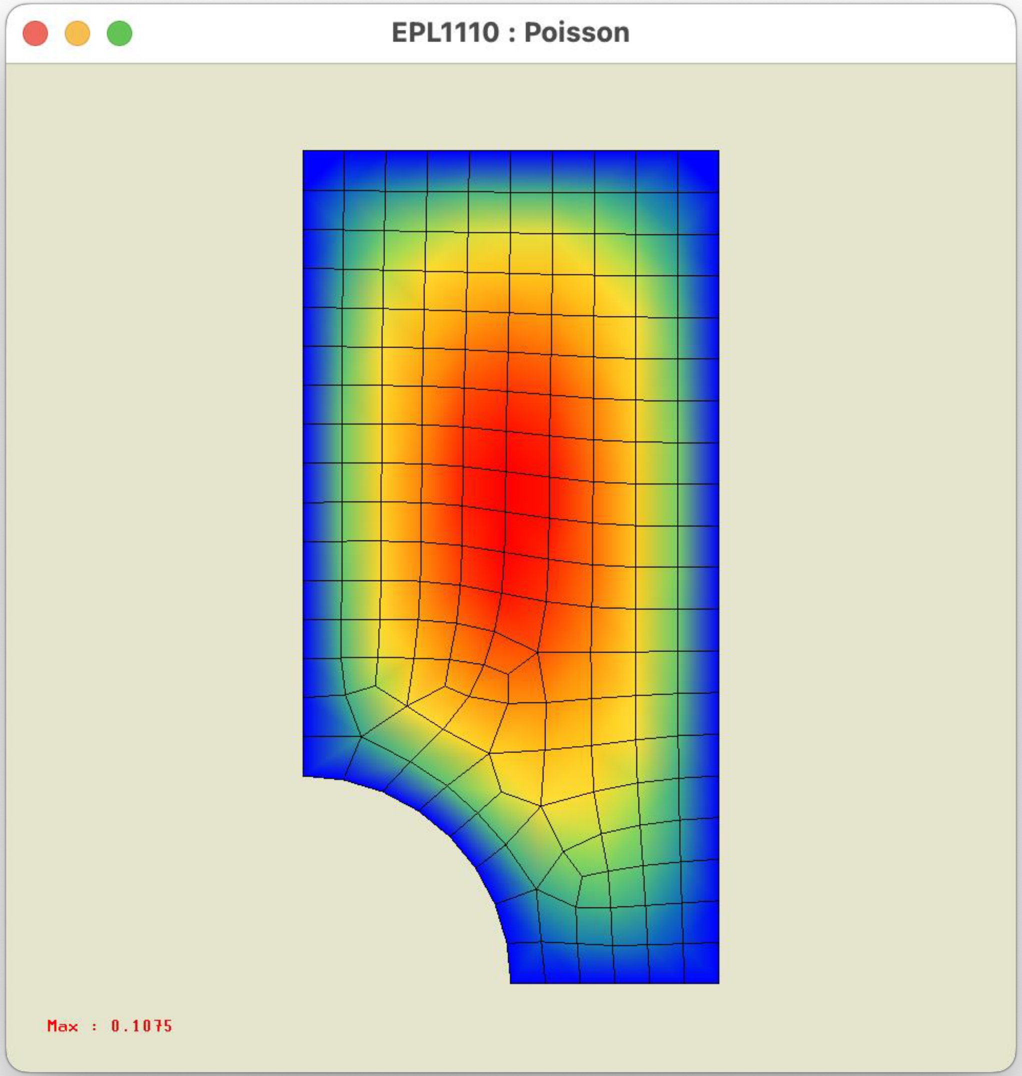
L'élément de Serendip (8 nœuds) n'est pas complet à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.
L'élément de Lagrange (9 nœuds) est complet à l'ordre deux sur un quadrilatère quelconque.



Nous allons faire notre premier vrai programme d'éléments finisa avec des triangles !

… et avec des quadrilatères.

Même si gmsh a un peu de difficultés
à me créer de jolis maillages composés
uniquement de quads !

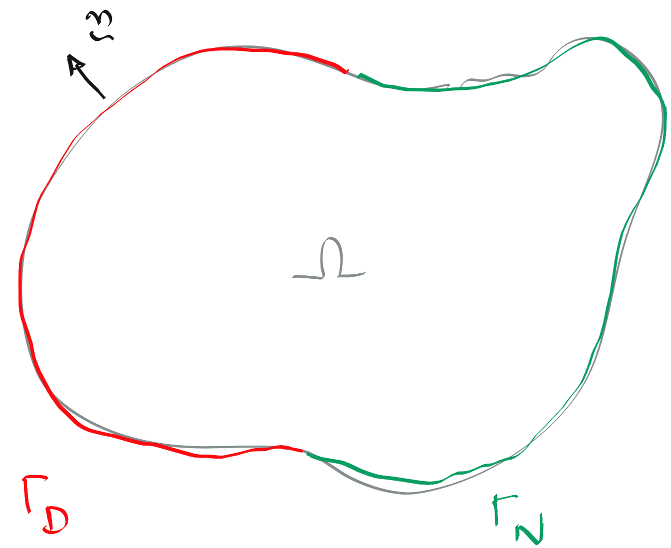


Typical elliptic boundary value problem

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} u + f = 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla} u = g \qquad \text{sur } \Gamma_N$$

$$u = t \qquad \text{sur } \Gamma_D$$



Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

Conditions naturelles
Conditions de Neumann

En général, la fonction n'est pas connue…
Mais, c'est la solution d'une équation aux dérivées partielles !

Commençons par une équation de Poisson

Some nice spaces and notations…

$$\mathcal{U} = \{ v \ \ldots \ \text{tels que } v = t \text{ sur } \Gamma_D \}$$

$$\hat{\mathcal{U}} = \{ \hat{v} \ \ldots \ \text{tels que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}$$

ESPACE DES CANDIDATS SOLUTION

ESPACE DES FONCTIONS TEST

$$\langle f \, g \rangle = \int_\Omega f g \, d\Omega$$

$$\langle\langle f \, g \rangle\rangle = \int_{\partial\Omega} f g \, ds$$

$$\langle\langle f \, g \rangle\rangle_N = \int_{\Gamma_N} f g \, ds$$

Ne faisons pas comme les mathématiciens…
On ne va pas être rigoureux maintenant !
On fera cela plus tard…

D'ailleurs, est-ce que cela est utile ?
Et pourtant, oui !

… to do calculus !

Three tips !

TIP 1

$$(fg)' = fg' + fg'$$

$$\langle \hat{v}\; \underset{\in \hat{\mathcal{U}}}{} \nabla \cdot \nabla v \underset{\in \mathcal{U}}{} \rangle = \langle \underbrace{\nabla \cdot (\hat{v} \nabla v)} \rangle - \langle (\nabla \hat{v}) . (\nabla v) \rangle$$

TIP 2

$$\langle \nabla \cdot a \rangle = \langle\langle n \cdot a \rangle\rangle$$

$$\langle\langle \underbrace{(n \cdot \nabla v)\, \hat{v}} \rangle\rangle$$

TIP 3

$\hat{v} = 0$ SUR Γ_D

$$\langle\langle \underbrace{(n \cdot \nabla v)}_{g}\, \hat{v} \rangle\rangle_{\Gamma}$$

And it is all !

Strong formulation

FORMULATION FORTE

$? \, u$ tel que

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} u + f = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla} u = g \quad \text{sur } \Gamma_N$$

$$u = t \quad \text{sur } \Gamma_D$$

FORMULATION FAIBLE

$? \, u \in \mathcal{U}$

$$\underbrace{\langle \underline{\nabla} \hat{u} \cdot \underline{\nabla} u \rangle}_{a(\hat{u},u)} = \underbrace{\langle\langle g \, \hat{u} \rangle\rangle_N + \langle f \, \hat{u} \rangle}_{b(\hat{u})} \quad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$$

$\Updownarrow$

$$? \, u \in \mathcal{U} \quad J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} a(v,v) - b(v)}_{J(v)} \Big)$$

PROBLEME DE MINIMUM

Weak formulation

La formulation faible c'est un problème de minimum !

FORMULATION FAIBLE

$$? u \in \mathcal{U}$$

$$\underbrace{\langle \nabla \hat{u} \cdot \nabla u \rangle}_{a(\hat{u},u)} = \underbrace{\langle\langle g \, \hat{u} \rangle\rangle_N + \langle f \, \hat{u} \rangle}_{b(\hat{u})} \qquad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$$

$$\Updownarrow$$

$$? u \in \mathcal{U} \qquad J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} a(v,v) - b(v)}_{J(v)} \Big)$$

PROBLEME DE MINIMUM

$$\underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} = J(\underset{\in \mathcal{U}}{v})$$

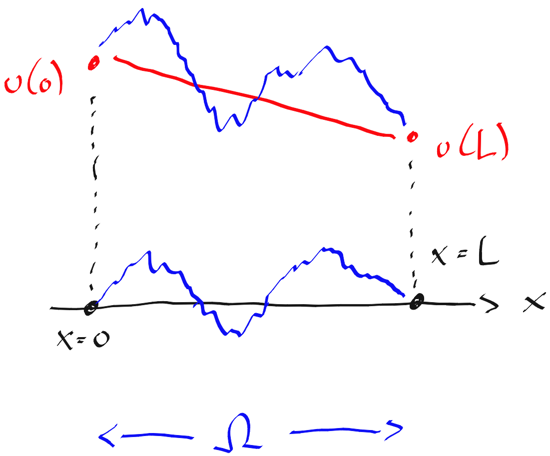
δu VARIATION

$$\underset{\in \mathcal{U}}{u} + \underset{\in \mathbb{R}}{\varepsilon}\, \underset{\in \hat{\mathcal{U}}}{\hat{u}}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$u(0) = u_0$$

$$u(L) = u_L$$



$$\underbrace{\left.\frac{dJ(u+\varepsilon\hat{u})}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}}_{\delta J = 0}$$

Variational Calculus

$$J(u) = \frac{1}{2}\langle \nabla u, \nabla u \rangle - \langle f u \rangle - \langle\langle \underbrace{\cancel{g u}}_{=0} \rangle\rangle_N$$

SPDG

$$\boxed{\left.\frac{dJ(u+\varepsilon \hat{u})}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}}$$

$$J(u+\varepsilon\hat{u}) = \frac{1}{2}\langle \nabla u, \nabla u \rangle + \varepsilon \langle \nabla u \cdot \nabla \hat{u} \rangle + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \langle \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} \rangle - \langle f u \rangle - \varepsilon \langle f \hat{u} \rangle$$

$$\left.\frac{dJ(u+\varepsilon \hat{u})}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \langle \nabla u, \nabla \hat{u} \rangle - \langle f \hat{u} \rangle \qquad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}$$

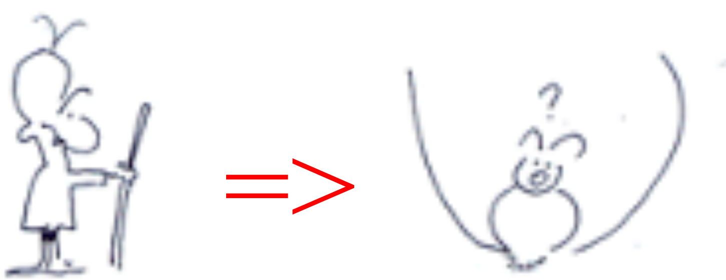
$\Rightarrow$

$$\boxed{\underbrace{\left.\frac{dJ(u+\varepsilon \hat{u})}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}}_{=} = \langle \nabla u, \nabla \hat{u} \rangle - \langle f, u \rangle \qquad \forall \hat{u} \in \hat{\mathcal{U}}}$$

$$J(u+\hat v) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\langle \nabla u, \nabla u\rangle - \langle f, u\rangle}_{J(u)} + \underbrace{\langle \nabla u, \nabla \hat v\rangle - f(\hat v)}_{=0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\langle \nabla \hat v, \nabla \hat v\rangle}_{\geq 0}$$

$$\geq J(u)$$

$$\langle \nabla u, \nabla \hat v\rangle = \langle f, \hat v\rangle \quad \forall \hat v \in \hat{U}$$



The Finite Element is a variational method

$u \simeq u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$

$u^h = \sum^n U_i \tau_i$

VALEURS NODALES INCONNUES

FONCTIONS DE FORME DEFINIES A PRIORI $\in \mathcal{U}$

$$J(u^h) = \min_{v \in \mathcal{U}^h} \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v) - b(v)}_{J(v)}$$

$$J(u) \leq J(u^h)$$

$$J(u^h) = \frac{1}{2} \langle (\nabla \sum U_i \tau_i) \cdot (\nabla \sum U_j \tau_j) \rangle + \langle f (\sum U_i \tau_i) \rangle$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_i U_j \underbrace{\langle \nabla \tau_i \cdot \nabla \tau_j \rangle}_{A_{ij}} + \sum U_i \underbrace{\langle f \tau_i \rangle}_{B_i}}$$

The discrete system is just a linear system !

$$J(u^h) = \underbrace{\frac{1}{2}\left\langle \left(\nabla \sum U_i \tau_i\right) . \left(\nabla \sum U_j \tau_j\right)\right\rangle}\ + \left\langle f \left(\sum U_i \tau_i\right)\right\rangle$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_i U_j \underbrace{\langle \nabla \tau_i . \nabla \tau_j \rangle}_{A_{ij}} + \sum U_i \underbrace{\langle f \tau_i \rangle}_{B_i}$$

$$\frac{\partial J}{\partial U_i} = 0$$

$$\boxed{\sum_j A_{ij} U_j = B_i}$$

Typical Elliptic Boundary Value Problem

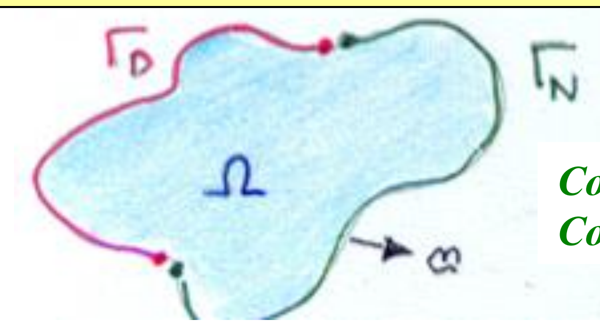
Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_s$ tel que

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot (a \boldsymbol{\nabla} u) + f &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega,\\
\mathbf{n} \cdot (a \boldsymbol{\nabla} u) &= g, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N,\\
u &= t, & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D,
\end{aligned}
$$

En général, la fonction n'est pas connue…
Mais, c'est la solution d'une équation aux dérivées partielles !

Commençons par une équation de Poisson

Conditions essentielles
Conditions de Dirichlet

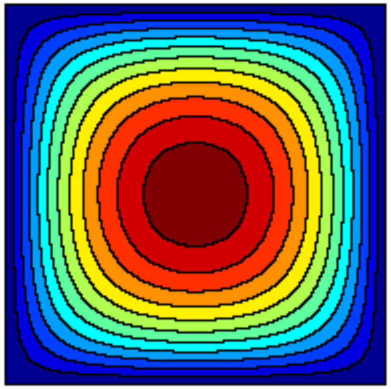


Conditions naturelles
Conditions de Neumann

Un exemple tout simple et bien connu :-)

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u(x,y) + 1 &= 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\
u(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

y = 1



y = -1

$$u(x,y) = \sum_{i,j \ impairs} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi(y+1)}{2}\right)$$

Comment trouver C_{ij} ?

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u(x,y) + 1 &= 0, \\
\sum_{i,j \text{ impairs}} \frac{-\pi^2(i^2+j^2)}{4} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi(y+1)}{2}\right) + 1 &= 0,
\end{aligned}
$$

En vertu de l'orthogonalité des sinus,

$$
\frac{\pi^2(i^2+j^2)}{4} C_{ij} - \underbrace{\int_\Omega \sin\left(\frac{i\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi(y+1)}{2}\right) d\Omega}_{16/(ij\pi^2)} = 0,
$$

$$
\boxed{u(x,y) = \sum_{i,j \ impairs} \frac{64}{\pi^4(i^2+j^2)ij} \sin\left(\frac{i\pi(x+1)}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi(y+1)}{2}\right)}
$$

On a ici une solution analytique !
Mais, ce n'est pas le cas dans la plupart des vrais problèmes.
Il s'agit juste d'un exemple pour présenter notre méthode !

Construction du système linéaire discret

$$
\begin{aligned}
J(u^h) &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} u^h)\cdot(\boldsymbol{\nabla} u^h)\, d\Omega - \int_\Omega f\, u^h\, d\Omega,\\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} U_i \boldsymbol{\nabla}\tau_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n} U_j \boldsymbol{\nabla}\tau_j\Big)\, d\Omega - \int_\Omega f\, \Big(\sum_{i=1}^{n} U_i \tau_i\Big)\, d\Omega,\\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_i\, U_j \boxed{\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\tau_i)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\tau_j)\, d\Omega} - \sum_{i=1}^{n} U_i \boxed{\int_\Omega f\, \tau_i\, d\Omega,}\\
J(u^h) &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} U_i\, U_j \boxed{A_{ij}} - \sum_{i=1}^{n} U_i \boxed{B_i,}
\end{aligned}
$$

$$
0 = \frac{\partial J(u^h)}{\partial U_i} = \sum_{j=1}^{n} \boxed{A_{ij}}\, U_j - \boxed{B_i,} \quad i = 1, n.
$$