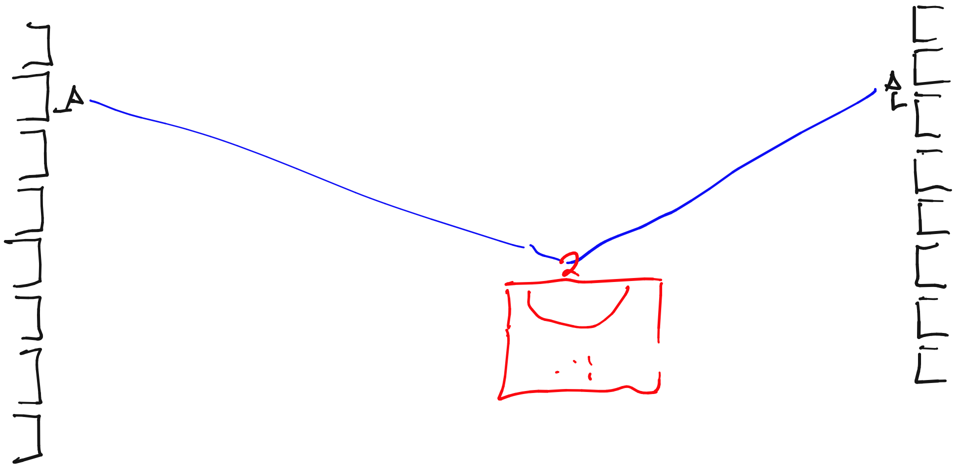
# Le projet !
# Ce vendredi : le jour de la libération !



1er avril : a new game !
3 avril : new tariffs !
4 avril : your projets !

# Comment installer une corde à linge ?



Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Effectuons un tout petit exemple :-)

**Problème de la corde à linge tendue !**

# Formulation forte

Trouver $u(x)$ tel que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dx^2} + f &= 0, \qquad \forall\, x \in \Omega, \\
u(0) &= 0, \\
u(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

**Plus exigeant !**
**Espace des solutions plus petit !**
**On perd des solutions réellement utiles !**

**Plus laxiste !!**
**Espace des solutions plus grand !**
**Les solutions en sus sont utiles !**

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

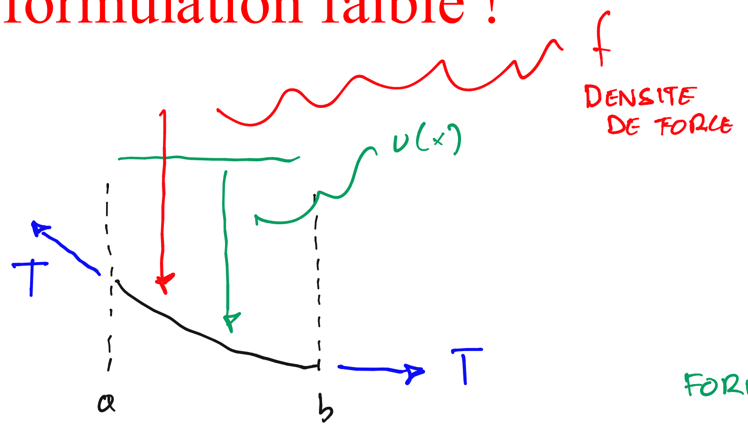
$$
\underbrace{< \frac{d\widehat{u}}{dx}\frac{du}{dx} >}_{a(\widehat{u},u)} \;=\; \underbrace{< \widehat{u} f >}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},
$$

Trouver $u(x) \in \mathcal{U}$ tel que

$$
J(u) \;=\; min_{v \,\in \mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},
$$

# Formulation faible

# La vraie physique :
# c'est la formulation faible !




$$f + T u'' = 0$$

FORMULATION
FORTE

FORMULATION
FAIBLE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{T \frac{du}{dx}\Big|_a - T \frac{du}{dx}\Big|_b}_{-T\left[\frac{du}{dx}\right]_a^b}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -T \frac{d^2u}{dx^2}\,dx \qquad \forall a, b$$

# La vraie physique :
# c'est minimiser l'énergie !

$$J(u) = \underbrace{T\,(\ell - L)}_{\text{TRAVAIL DU À L'ALLONGEMENT DE LA CORDE}} - \underbrace{\int_0^L f\,u\,dx}_{\text{TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES}}$$

$$\ell = \int_0^L d\ell = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^L \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2}}_{\simeq\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx$$

PETITS DEPLACEMENTS

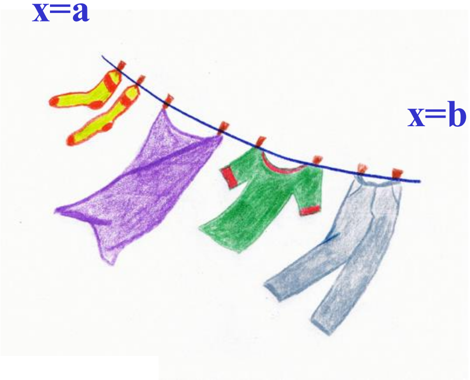
$$\boxed{J(u) = \int_0^L \frac{1}{2} T \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - f\,u \quad dx}$$

$$\delta J = 0$$

$$\int_0^L T \frac{du}{dx}\frac{d\hat{u}}{dx} + f\,\hat{u} = 0$$

$$\forall \hat{u} \in \mathcal{U}$$

# La vraie formulation physique…
# C'est une formulation intégrale !




$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

**Tension constante dans la corde**
**Petits déplacements**

$$\int_a^b f\ dx = T\frac{du}{dx}(a) - T\frac{du}{dx}(b) \qquad \forall a,b$$

$$\int_a^b f\ dx = -T\left[\frac{du}{dx}\right]_a^b \qquad \forall a,b$$

Si la fonction $\frac{du}{dx}$ est continue !

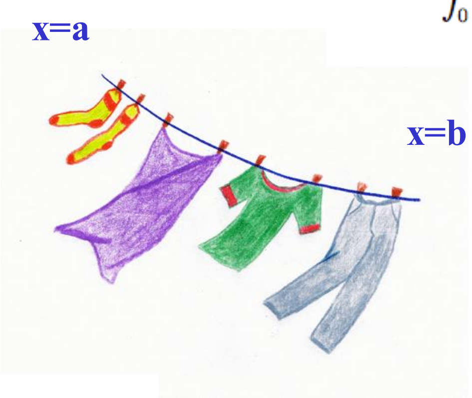
$$\int_a^b f + T\,\frac{d^2u}{dx^2}\ dx = 0 \qquad \forall a,b$$

$$f + T\,\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

**Equilibre vertical des forces**

# La vraie formulation physique…
# C’est minimiser l’énergie !

$$l = \int_0^L dl = \int_0^L \sqrt{dx^2 + du^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx \approx \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) dx$$




$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \ll 1.$$

**Tension constante dans la corde**
**Petits déplacements**

$$J(u) = T(l - L) - \int_0^L f\ u\ dx$$

$$\Downarrow$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^L T\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f\ u\ dx$$

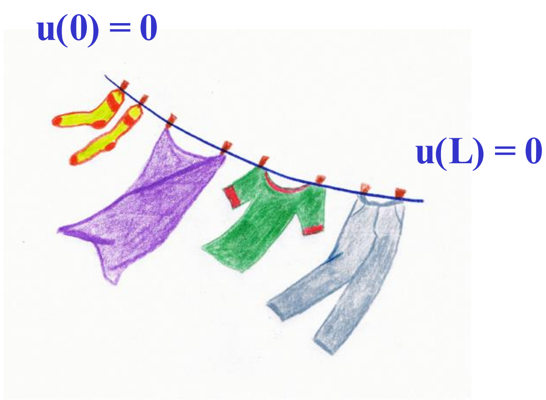
**Minimisation de l’énergie**
**On minimise le travail des forces !**

# Ecrire une formulation discrète !
# Eléments finis 1D

$$u \simeq u^h = \underbrace{\sum U_i \varphi_i}_{\in\, \mathcal{U}^h \,\underbrace{\subset\, \mathcal{U}}_{\text{ceci}}}$$

EST TRES

IMPORTANT




# Problème discret

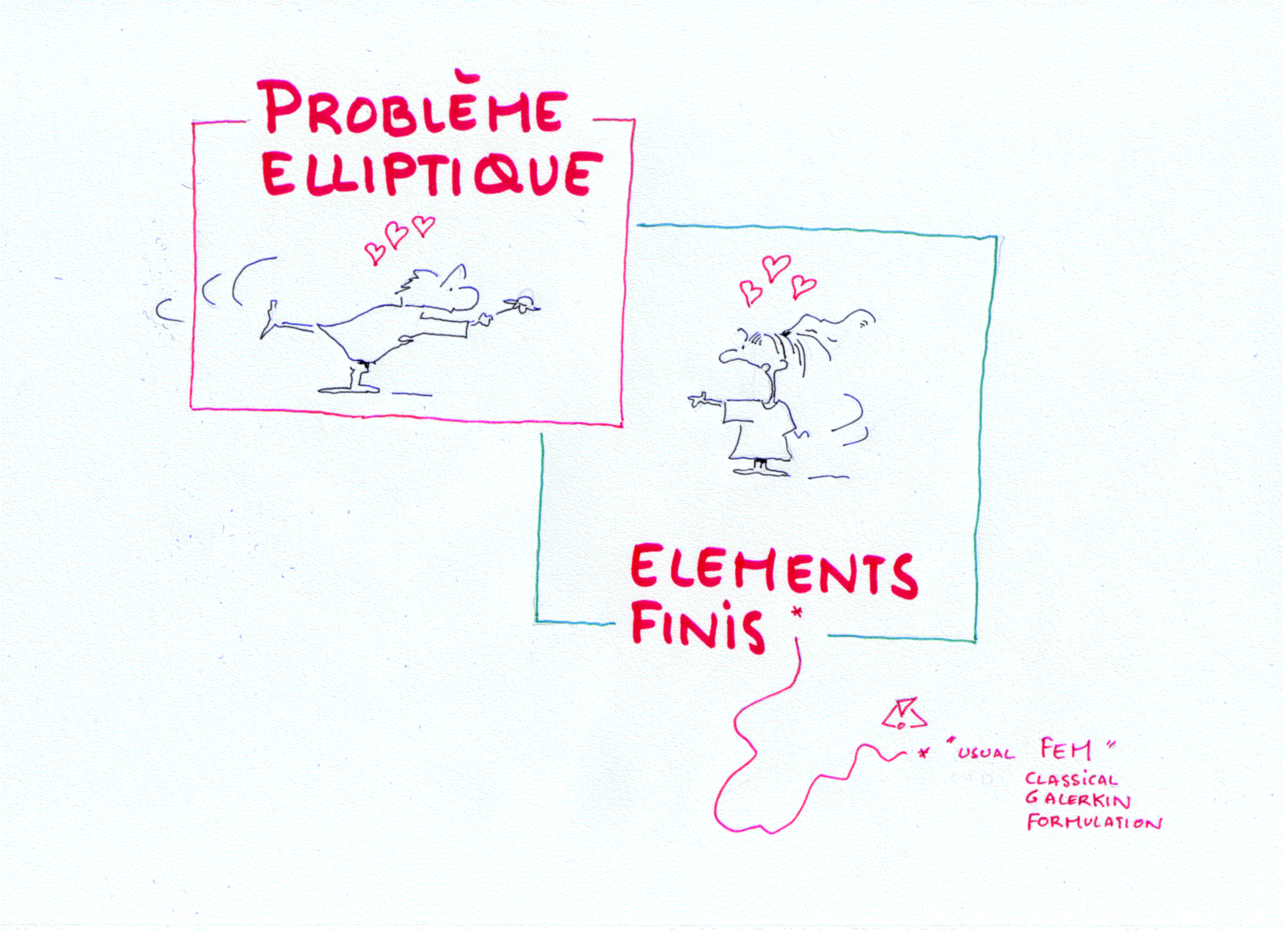
$$\sum_{j=2}^{N-1} A_{ij} U_j = B_i, \qquad i = 2, N-1.$$

$$U_1 = 0,$$
$$U_N = 0,$$

**N-2 équations pour les valeurs intérieures**
**Deux conditions aux limites**

$$A_{ij} = \int_\Omega \frac{d\tau_i}{dx}(x) \frac{d\tau_j}{dx}(x)\, dx,$$

$$B_i = \int_\Omega f(x)\tau_i(x)\, dx,$$




# Un peu de mathématiques pour les éléments finis

# Typical Elliptic BoundaryValue Problem

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$\underbrace{< (\boldsymbol{\nabla}\widehat{u}) \cdot (a\boldsymbol{\nabla}u) >}_{a(\widehat{u},u)} \quad = \quad \underbrace{< \widehat{u}f > + \ll \widehat{u}g \gg_N}_{b(\widehat{u})}, \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

**Exemple de la conduction thermique**

**Equation elliptique**
**Il faut imposer une condition sur l'ensemble de la frontière !**
**Il faut au moins un point avec une condition essentielle !**

*Conditions essentielles*
*Conditions de Dirichlet*


*Conditions naturelles*
*Conditions de Neumann*

$a : (u,v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow a(u,v) \in \mathbb{R}$

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\widehat{u}, u) \quad = \quad b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}},$$

$\Updownarrow$

Trouver $u \in \mathcal{U}$ tel que

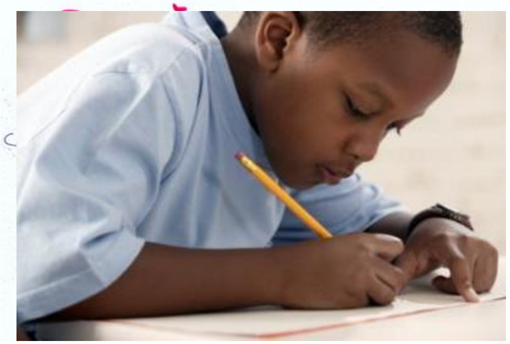
$$J(u) \quad = \quad \min_{v \in \mathcal{U}} \quad \underbrace{\tfrac{1}{2}\, a(v,v) - b(v)}_{J(v)},$$

# Abstract generic elliptic problem

**Il est aussi temps de commencer
à se poser quelques questions
sur la définition de l'espace fonctionnel…**

**a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive
b est une forme linéaire et continue**

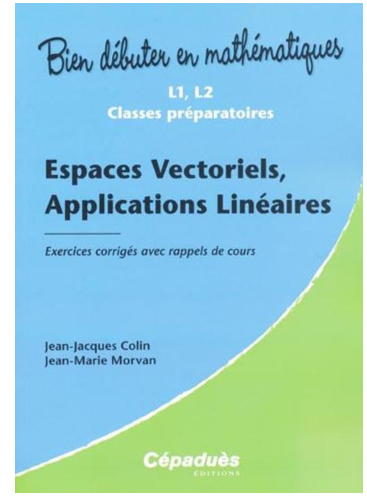
***Ces hypothèses sont satisfaites
pour un problème faible d'une équation elliptique…***



$u = \alpha w + \beta v$

$b(u) = \alpha\, b(w) + \beta\, b(v)$

# C’est quoi une forme linéaire ?




**Supposons tout d’abord que $U$ est un espace vectoriel…**

$b$ est une forme linéaire si

$$b(\alpha u + \beta v) = \alpha b(u) + \beta b(v)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v \in \mathcal{U}$$

---

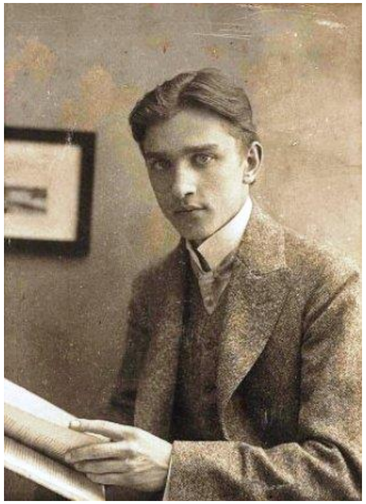
$a$ est une forme bilinéaire si

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$
$$a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}, \forall u, v, w \in \mathcal{U}$$

# C'est quoi une forme continue ?

| | |
|---|---|
| $b$ est une forme continue si | $\exists\ c > 0$ tel que $\lvert b(u)\rvert \leq c\ \lVert u\rVert$ $\forall u \in \mathcal{U}$ |
| $a$ est une forme continue si | $\exists\ c > 0$ tel que $\lvert a(u,v)\rvert \leq c\ \lVert u\rVert\ \lVert v\rVert$ $\forall u,v \in \mathcal{U}$ |

**Stephan Banach**
**Cracovie 1892 – 1945**



**Donnons une norme à notre espace vectoriel** ***U*** **…**
**Supposons en outre qu'il soit complet[1]**
**Il devient un joli espace de Banach**

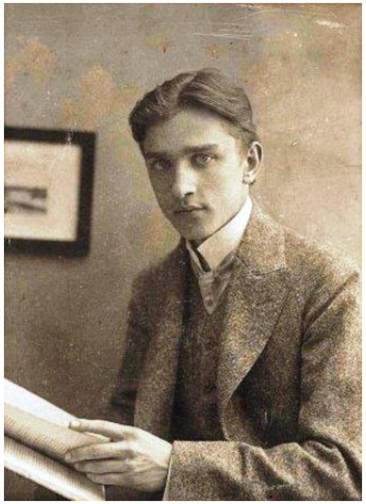
[1] Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\lVert\ \rVert$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\lVert\ \rVert$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \ldots\}$ est une suite telle que $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n\ \lVert u_i - u_j\rVert < \varepsilon,\quad i,j > n$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \ldots\}$ converge vers $u$ si $\lVert u - u_i\rVert \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...

# C'est quoi une forme coercive ?

$a$ est une forme coercive ou $\mathcal{U}$-elliptique si $\quad \exists\ \alpha > 0$ tel que $a(u,u) \geq \alpha\ \|u\|^2$
$\forall u \in \mathcal{U}$

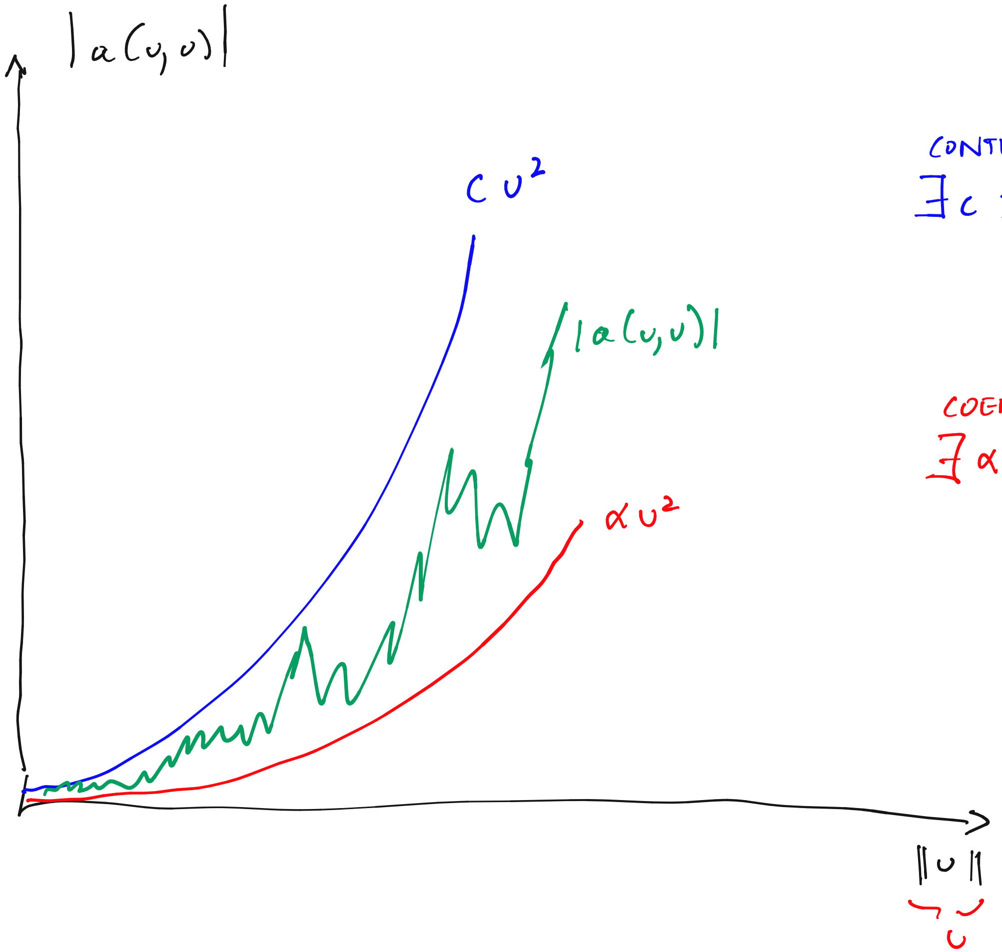
---

**Stephan Banach**
**Cracovie 1892 – 1945**



**Donnons une norme à notre espace vectoriel *U* …**
**Supposons en outre qu'il soit complet[1]**
**Il devient un joli espace de Banach**

[1] Un espace $\mathcal{U}$ est complet pour une norme $\|\ \|$ si toute suite de Cauchy par rapport à $\|\ \|$ converge. Oui, mais c'est quoi une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy $\{u_1, u_2, \dots\}$ est une suite telle que $\forall\ \varepsilon\ \exists\ n\ \|u_i - u_j\| < \varepsilon, \quad i,j > n$. Oui, mais c'est quoi une suite qui converge ? Une suite $\{u_1, u_2, \dots\}$ converge vers $u$ si $\|u - u_i\| \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Noter que si le concept d'espace complet ne vous intéresse absolument pas, vous pouvez l'oublier et vous contenter de considérer bêtement un espace d'Hilbert, comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Mais, évidemment c'est moins joli d'un point de vue intellectuel...




$a(u,v)$

CONTINUE

$\exists c>0 \quad \underbrace{|a(u,u)|}_{|a(u,u)|} \leq c\,\underbrace{\|u\|\|u\|}_{\|u\|^2}$

COERCIVE

$\exists \alpha>0 \quad \alpha\|u\|^2 \leq |a(u,u)|$

Et pratiquement,
c'est quoi continu et coercif ?

# C’est quoi une forme continue et coercive ?

$a$ est une forme définie positive
ou est un produit scalaire pour $\mathcal{U}$ si

$$
\begin{aligned}
&a \text{ symétrique,} \\
&a(u,u) \geq 0 \qquad\qquad \forall u \neq 0 \in \mathcal{U} \\
&a(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0
\end{aligned}
$$

$$< u,v >_* \;=\; a(u,v);$$

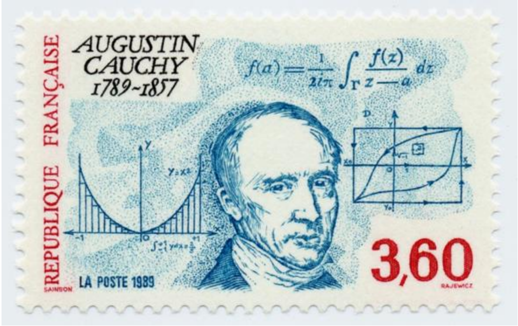
**Donnons un produit scalaire à notre espace vectoriel *U* …**
**Supposons en outre qu’il soit complet[1]**
**Il devient un joli espace de Hilbert**

# C’est un produit scalaire !

**David Hilbert**
**Germany 1862 –1943**

# Inégalité de Cauchy

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|}$$




$$0 \leq \langle \overbrace{u+\lambda v}^{\in \mathcal{U}}, u+\lambda v \rangle \qquad \in \mathbb{R}$$

$$\leq \underbrace{\langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle}$$

SECOND ORDER POLYNOMIAL $c + 2b\lambda + \lambda^2 a$

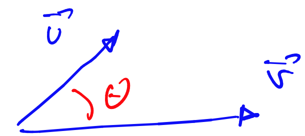
POSITIVE FOR ALL $\lambda$ $\quad b^2 - ac < 0$

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

$$\boxed{\langle u, v \rangle \leq \underbrace{\sqrt{\langle u, u \rangle}}_{\|u\|} \underbrace{\sqrt{\langle v, v \rangle}}_{\|v\|}}$$

$\square$

# Inégalité de Cauchy




$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = uv\cos\theta$$

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|}$$

$$0 \leqslant \langle u + \overbrace{\lambda}^{\in \mathbb{R}} v,\ u + \lambda v \rangle$$

$$\leqslant \underbrace{\langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle}_{\text{POLYNOME DU SECOND DEGRE}}$$

$$c + 2b\lambda + a\lambda^2$$

$$b^2 - ac \leqslant 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\langle u, v \rangle^2 \leqslant \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \\ |\langle u, v \rangle| \leqslant \underbrace{\sqrt{\langle u, u \rangle}}_{\|u\|}\ \underbrace{\sqrt{\langle v, v \rangle}}_{\|v\|}\end{gathered}}$$

$\square$

# Théorème de Lax-Milgram :-)

Si $\mathcal{U}$ est un espace d'Hilbert
$a$ est une forme bilinéaire continue et coercive
$b$ est une forme linéaire continue,

alors, le problème abstrait

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$a(\widehat{u}, u) = b(\widehat{u}), \qquad \forall \widehat{u} \in \mathcal{U},$$

a une solution unique
qui dépend continûment du terme source $b$ ($\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$).

où la norme d'une forme $b$ est définie par l'expression

$$\|b\| = \sup_{v \in \mathcal{U}} \frac{|b(v)|}{\|v\|}.$$

**Notre problème est bien posé !**

**La solution existe, est unique et dépend gentiment des données…**

Arthur Milgram
Philadelphia 1912 – 1962

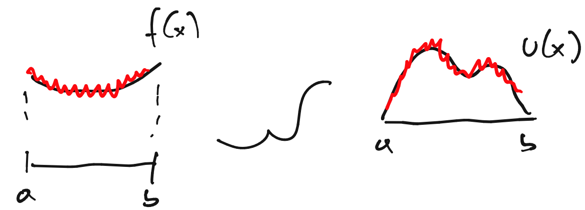
Peter Lax
Budapest 1926

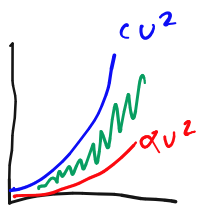
# Ce théorème implique la stabilité des problèmes elliptiques…

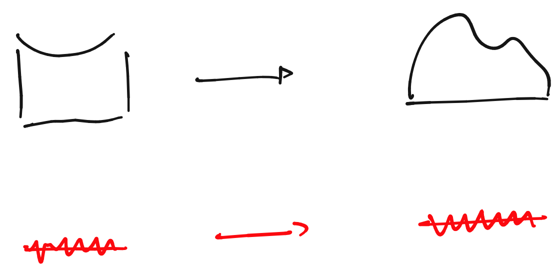
$$\frac{d^2u}{dx^2} + f = 0$$

$$\|u\| < \frac{1}{\alpha}\|b\|_*$$

$$\|b\|_* = \sup_{v \in U} \frac{|b(v)|}{\|v\|}$$



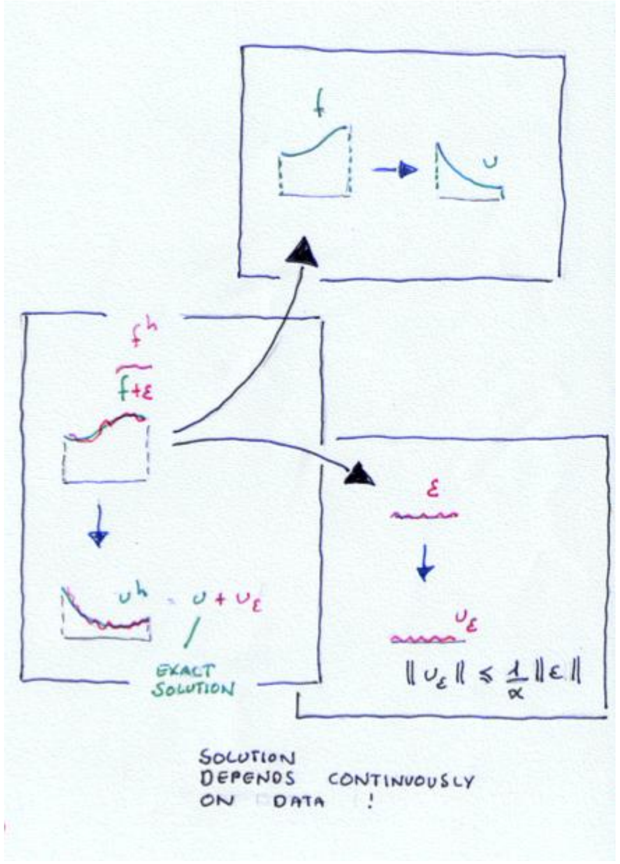



# Ce théorème implique la stabilité des problèmes elliptiques…

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$$

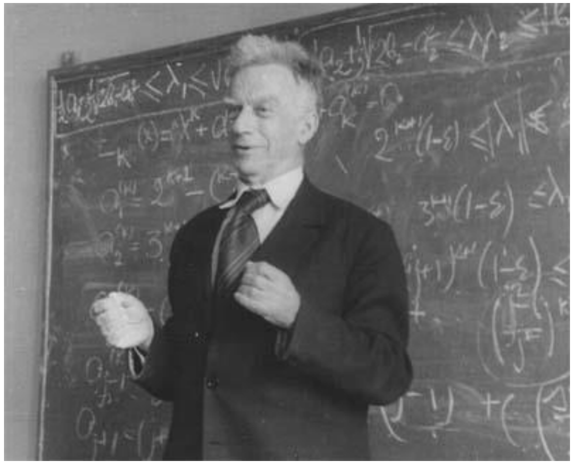
**Constante de coercivité**
**Plus la constante est grande,**
**plus c'est stable !**




# …et ça c'est vachement utile !

# Certains espaces de Sobolev sont des espaces d'Hilbert :-)

**Sergei Sobolev**
**Saint-Petersburg 1908 - 1989**

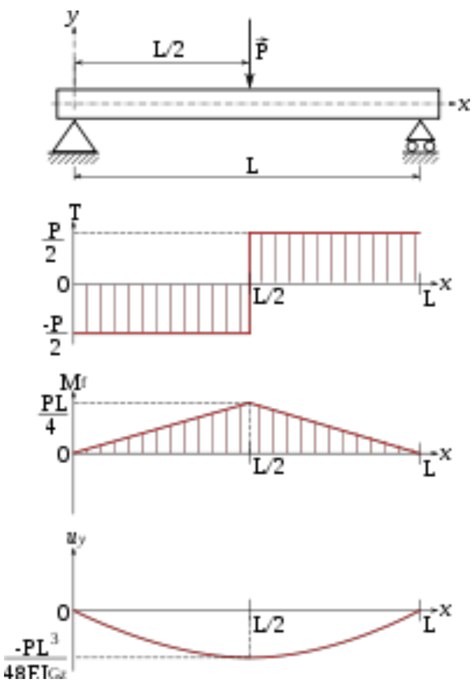


$$
\begin{aligned}
L_2(\Omega) \;=\; H^0(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \; dx < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \; dx < \infty \right\} \\
H^2(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \; dx < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

**Définissons formellement $U$ …**
**Définissons des normes et des produits scalaires !**
**Les dérivées sont comprises au sens des distributions**
**afin de rendre les espaces complets !**
**Ce sont les espaces de Sobolev !**

$$
\begin{aligned}
< uv >_0 &= \int_\Omega uv \; dx \\
< uv >_1 &= \int_\Omega uv + u'v' \; dx \\
< uv >_2 &= \int_\Omega uv + u'v' + v''v'' \; dx
\end{aligned}
$$

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$$




# Characterizing the smoothness of a function

$$
\begin{aligned}
H^0(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^1(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 \, dx < \infty \right\} \\
H^2(\Omega) &= \left\{ v(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ tels que } \int_\Omega (v)^2 + (v')^2 + (v'')^2 \, dx < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

$$x^{-1/4} \in L_2(]0,1[)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\, dx = \left[2\, x^{1/2}\right]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 x^{-1}\, dx = \left[\ln(x)\right]_0^1 = \infty$$

$$x^{-1/2} \notin L_2(]0,1[)$$

# Ce n'est pas toujours évident …

**Théorèmes d'immersion de Sobolev**
**Est-ce que c'est continus, ces brols ?**

Si $\Omega \subset \mathcal{R}^n,$
$2k > n,$

alors $H^k(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^0(\overline{\Omega})$
$\exists\, c \quad |w(x)| < c, \quad \forall x \in \Omega\}$

Si $\Omega \subset \mathcal{R},$

alors $H^{k+1}(\Omega) \subset \{w \quad w \in C^k(\overline{\Omega}),$
$\exists\, c \quad |w(x)| < c, \quad \forall x \in \Omega\}$

**Une force ponctuelle sur une corde, on a un déplacement fini !**
**Une force ponctuelle sur une membrane, la solution analytique tend vers l'infini sous la force !**

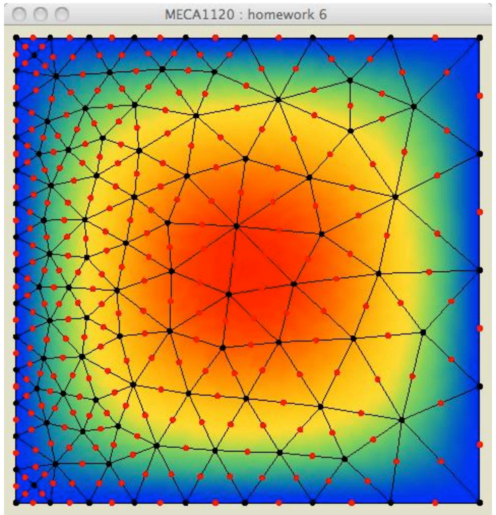
# Et finalement, a(u,v) est-il continu et coercif pour Poisson ?

Trouver $u(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(u) \quad = \quad \min_{v\,\in\,\mathcal{U}} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\; a(v,v) - b(v)\right)}_{J(v)},$$

**Pour le cas de la conduction stationnaire**

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{w \in H^1(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
a(u,v) &= < \boldsymbol{\nabla} u \cdot k \boldsymbol{\nabla} v > \\
b(u) &= < f u >
\end{aligned}$$



Et finalement, a(u,v)
est-il continu et coercif
pour l'équation de Poisson…

$$v(x) - \underbrace{v(0)}_{=0} = \int_0^x \frac{dv}{dx}(t)dt$$

$$\Big\downarrow \text{ Par l'inégalité de Cauchy } < v_{,x}, 1 > \leq \|v_{,x}\| \, \|1\|$$

$$(v(x))^2 \leq \underbrace{\int_0^x dt}_{\leq C} \underbrace{\int_0^x \left(\frac{dv}{dx}(t)\right)^2 dt}_{\leq \|\frac{dv}{dx}\|_0^2}$$

$$\Big\downarrow \text{ En intégrant sur } \Omega$$

$$\|v\|_0^2 \leq C_1 \|\frac{dv}{dx}\|_0^2$$

$$\Big\downarrow$$

$$kC_2 \underbrace{\left(\|v\|_0^2 + \|\frac{dv}{dx}\|_0^2\right)}_{\|v\|_1^2} \leq \underbrace{k \, \|\frac{dv}{dx}\|_0^2}_{a(v,v)}$$

C'est coercif !

$$|a(u,v)| \leq \|\boldsymbol{\nabla} u\|_0 \, \|\boldsymbol{\nabla} v\|_0$$

$$\Big\downarrow$$

$$\leq \|u\|_1 \, \|v\|_1$$

C'est continu !

**Exemple de la conduction thermique**

**Pour avoir un problème bien posé,**
**il faut au moins un point avec une condition essentielle !**

# Estimation a priori de l'erreur

$$\|e\|_m^2 \leq \frac{c}{\alpha} C^2 \, h^{2(p+1-m)} \|u\|_{p+1}^2,$$

**Lemme de Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure approximation énergétique**

**Lemme de Cea**

# Erreur de l'interpolation
# Lemme de Bramble-Hilbert

**Lemme de Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure approximation énergétique**

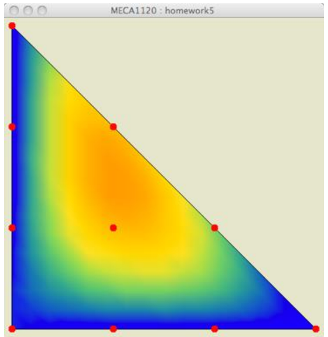
**Lemme de Cea**

Et on calcule finalement
notre norme de Sobolev

**Lemme de Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure approximation énergétique**

**Lemme de Cea**




# Erreur de l'interpolation

$$\|\widetilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque $h$ tend vers 0.

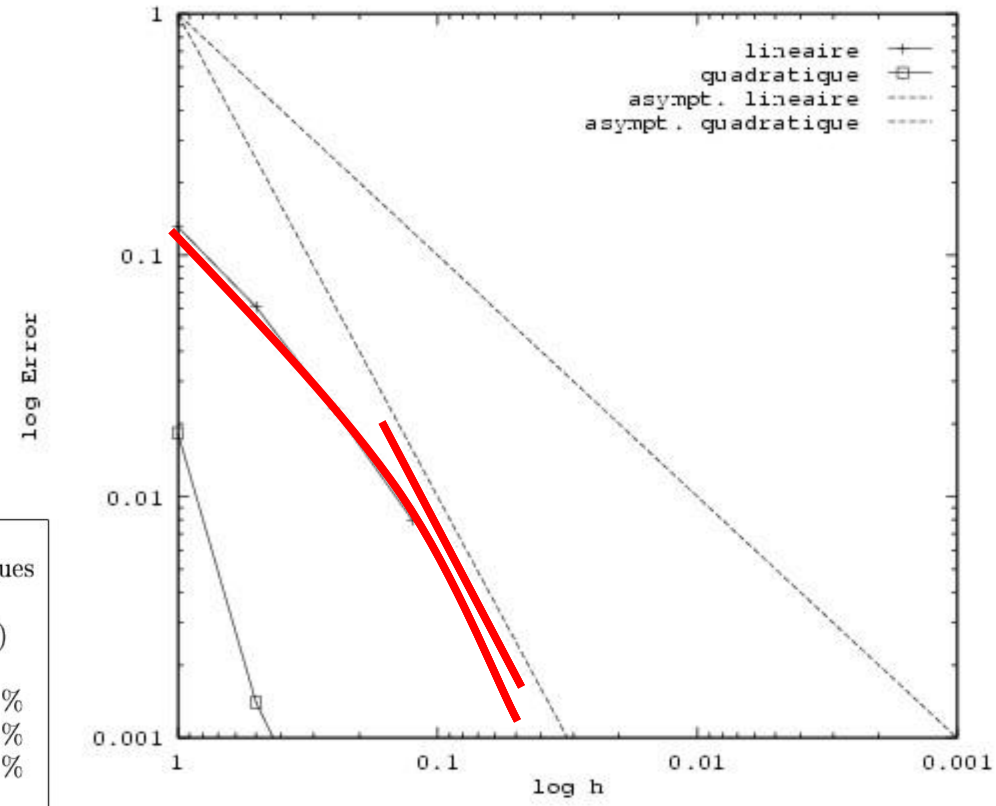
# Lemme de Bramble Hilbert

**Concrètement…**

$$\|\widetilde{e}\|_0 \;\leq\; C_0\ h^2\ \|u\|_2$$

$$\|\widetilde{e}\|_1 \;\leq\; C_1\ h^1\ \|u\|_2$$

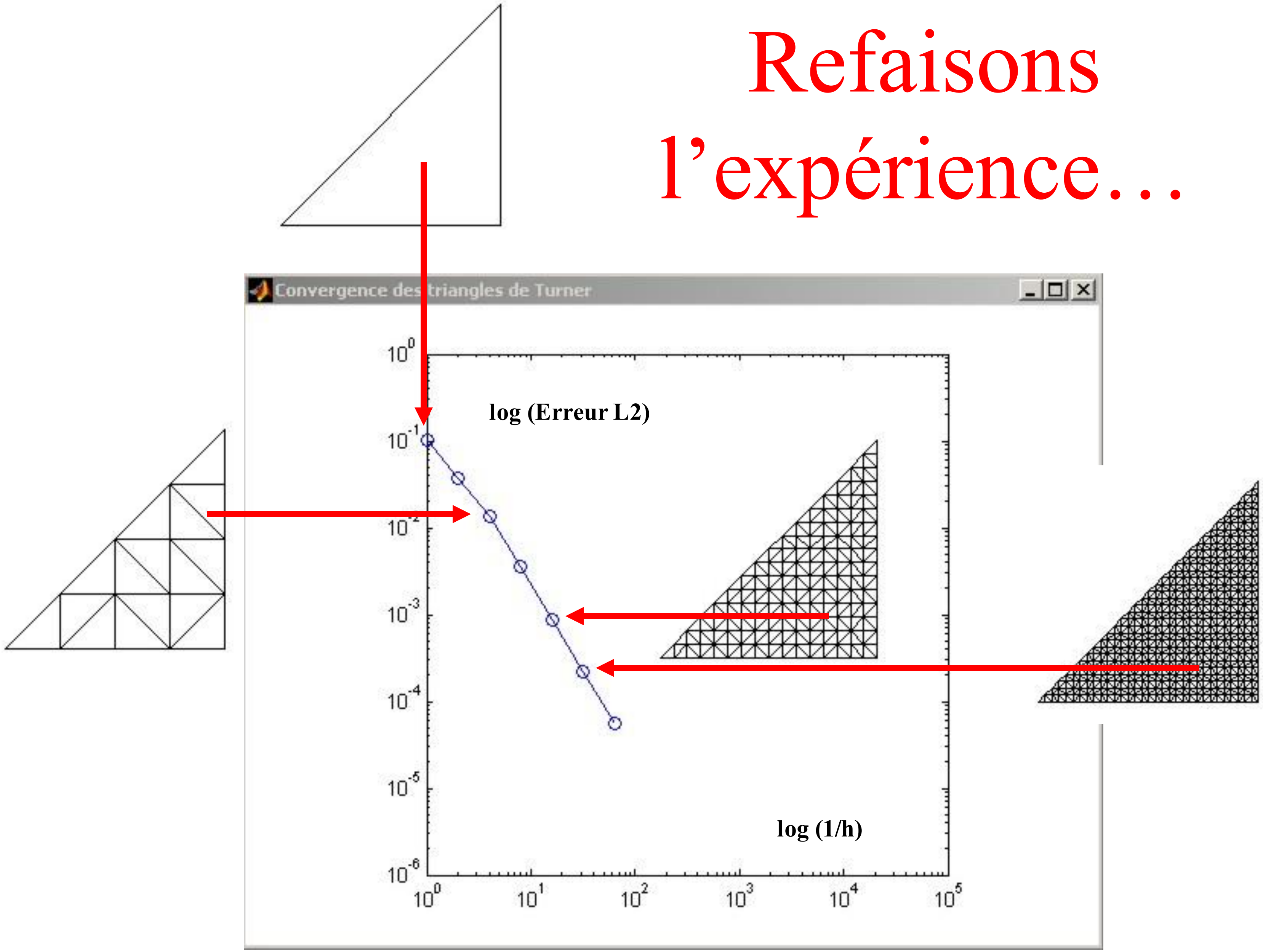
$$\|\widetilde{e}\|_* \;\leq\; C_1\ h^1\ \|u\|_2$$




| Eléments | | Triangles linéaires | | | Triangles quadratiques | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_1$ | $h$ | $N$ | $u^h(0)$ | $e(0)$ | $N$ | $u^h(0)$ | $e(0)$ |
| 1 | 1 | 3 | -0.3333 | 13.1 % | 6 | -0.3000 | 1.83 % |
| 4 | 1/2 | 6 | -0.3125 | 6.1 % | 15 | -0.2950 | 0.14 % |
| 16 | 1/4 | 15 | -0.3013 | 2.3 % | 45 | -0.2947 | 0.03 % |
| 64 | 1/8 | 45 | -0.2969 | 0.8 % | | | |

# Et expérimentalement…

# Refaisons l'expérience…



# La quête –le rêve- de la superconvergence exponentielle des méthodes d'ordre élevé !

$$\|\widetilde{e}\|_m \leq C h^{p+1-m} \|u\|_{p+1},$$

lorsque $h$ tend vers 0.

**Attention, il faut que la solution exacte soit suffisamment régulière !**
**Sinon pas de super convergence…**
**Et en général, les solutions ne sont pas régulières : aie :-(**

L’erreur énergétique
des éléments finis
est minimale !

**Lemme de Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure approximation énergétique**

**Lemme de Cea**

Les éléments finis,
c’est une projection orthogonale !

**Oui, mais c’est une norme bizarre, non ?**

C’est le meilleure approximation mais dans une norme bizarre !

C’est la meilleure approximation !

**Oui, mais c’est une norme bizarre, non ?**

Erreur énergétique ?
Cela signifie quoi ?

**Lemme de Bramble-Hilbert**

**Théorème de la meilleure approximation énergétique**

**Lemme de Cea**

# Lemme de Cea

$$\boxed{\|e\|^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\,\|\tilde{e}\|^2}$$

$$\|e\|^2 \;\leq\; \tfrac{1}{\alpha}\|e\|_*^2 \;\leq\; \tfrac{1}{\alpha}\|\tilde{e}\|_*^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\|\tilde{e}\|^2,$$

En vertu de la continuité de $a$,

Car $u^h$ est la meilleure approximation énergétique,

En vertu de la coercivité de $a$,

**Non, c'est aussi vrai dans toutes les normes de Sobolev !**

# Estimation de l'erreur

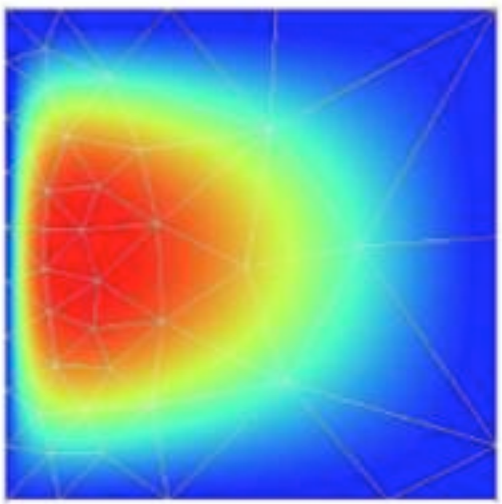
$$\|e\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\,\|\tilde{e}\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\,C^2\,h^{2(p+1-m)}\,\|u\|_{p+1}^2,$$

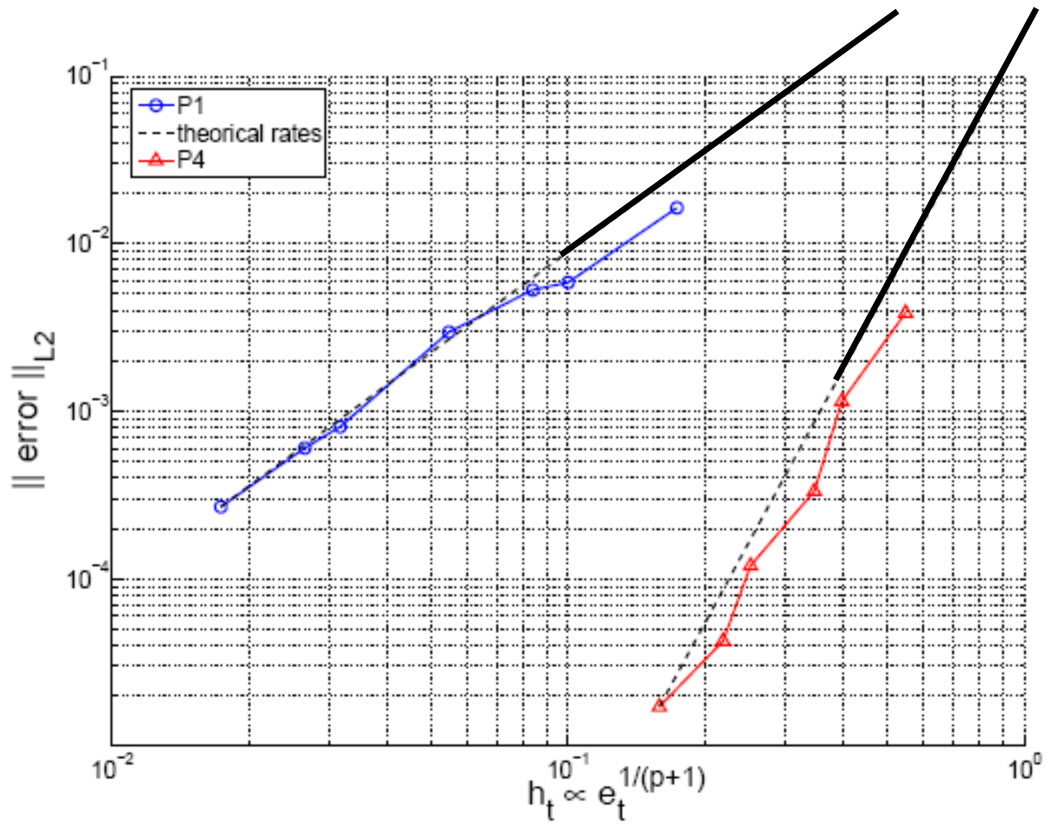
Estimation de l'erreur d'interpolation,

En vertu du lemme de Cea,

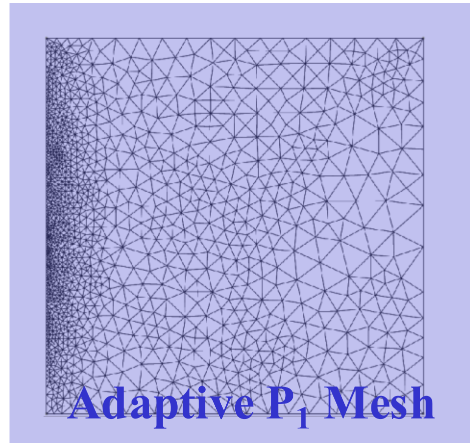
$$\boxed{\|e\|_m^2 \;\leq\; \tfrac{c}{\alpha}\,C^2\,h^{2(p+1-m)}\|u\|_{p+1}^2,}$$

# Theoretical rates of convergence are obtained for the analytical Stommel problem

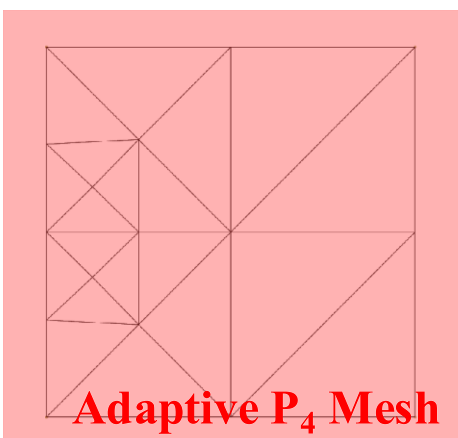


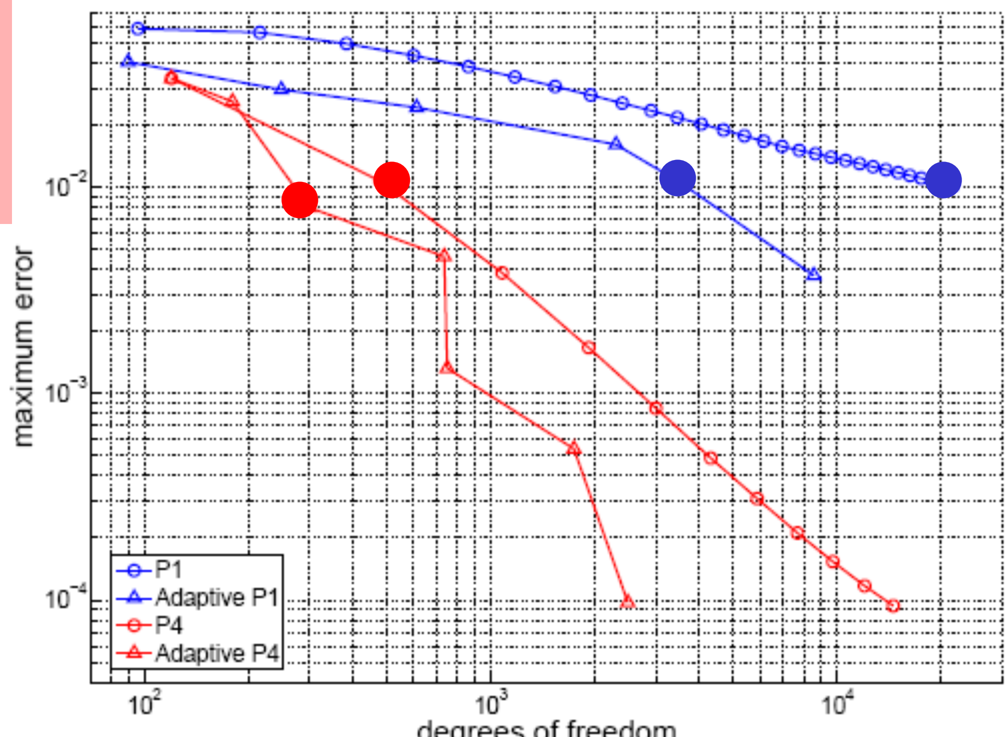


# How does it converge ?





$$r^h = \nabla \cdot (a \nabla u^h) + f.$$

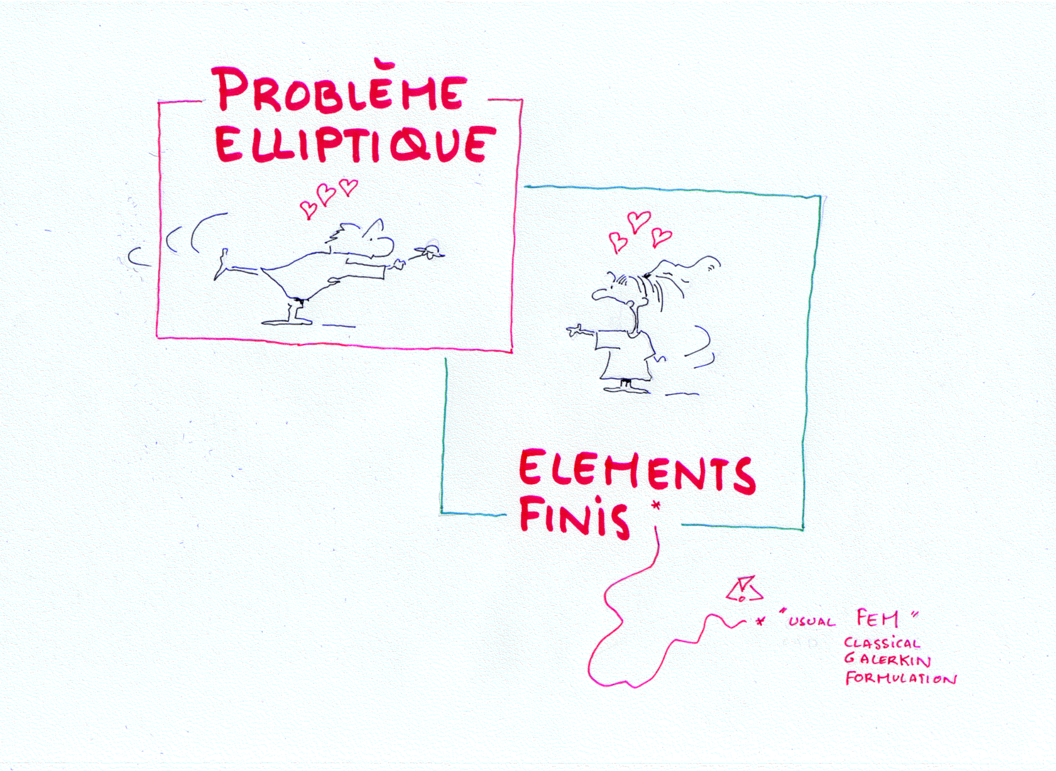
La technique de Galerkin
consiste à annuler en moyenne
le produit du résidu
avec les fonctions de forme

$$
\begin{aligned}
< \tau_i \, r^h > &= 0, \\
&\downarrow \\
< \tau_i \, (\nabla \cdot (a \nabla u^h)) > + < \tau_i \, f > &= 0, \\
&\downarrow \\
< (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla u^h) > &= < \tau_i f >, \\
&\downarrow \\
\sum_{j=1}^{n} \underbrace{< (\nabla \tau_i) \cdot (a \nabla \tau_j) >}_{A_{ij}} U_j &= \underbrace{< \tau_i f >}_{B_i}
\end{aligned}
$$

**Et cette manière de procéder minimise l'erreur dans la norme L2 : c'est une formulation optimale en ce sens !**

*Galerkin 1871-1945*

# Les éléments finis sont une méthode de résidus pondérés




Galerkin, c'est donc optimal
pour des équations elliptiques