LEPL1110 : solution de l'examen de juin 2024

1 Le miracle à une dimension !

Avec des éléments finis linéaires continus, on a une solution approchée $u^h(x) = \sum U_i \tau_i(x)$ de la solution exacte $u(x)$ du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u''(x) + f(x) & = & 0 & \quad x \in]0,1[\\ \\ u(0) & = & 0 & \\ u(1) & = & 0 & \end{array} \right.$$

1. Ecrire la formulation faible de ce problème.
   Définir rigoureusement l'espace de Sobolev auquel appartient la solution faible !

Il suffit tout simplement d'écrire :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Trouver } u(x) \in \mathcal{U} \textit{ tel que} \\ \\ < \widehat{u}' \ u' > \quad = \quad < \widehat{u} f >, \qquad \forall \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{U}}, \\ \\ \textit{avec } \widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} = \Big\{ u(x) \in H^1(]0,1[) \textit{ avec } u(0) = u(1) = 0 \Big\} \end{array}}$$

Et, ensuite aussi il faut définir l'espace de Sobolev adéquat :

$$H^1(]0,1[) = \left\{ u : x \in \;]0,1[\; \rightarrow \; u(x) \in \mathcal{R} : \textit{avec} \int_0^1 \Big(u(x) \Big)^2 + \Big(u'(x) \Big)^2 dx < \infty \right\}$$

La question est vraiment très simple !
Mais il faut bien définir les deux espaces $\mathcal{U}$ et $\widehat{\mathcal{U}}$!
Bien définir le domaine comme un intervalle ouvert !
Non, il n'était pas demandé de faire le développement pour obtenir la forme faible !
Quelques étudiants perdent ici bêtement des points très faciles à gagner pourtant !

2. Ecrire ensuite la formulation discrète qui permet d'obtenir les valeurs nodales U_i.

A nouveau, il faut juste écrire :

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Trouver } U_j \in \mathcal{R}^n \textit{ tels que} \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} < \tau_i' \tau_j' > U_j \quad = \quad < \tau_i f > \qquad i = 1, n. \end{array}}$$

A nouveau : aucun développement n'est demandé !

3. Démontrer formellement que les valeurs nodales obtenues ainsi obtenues seront exactes !
   En d'autres mots $u^h(X_i) = u(X_i)$ pour les noeuds X_i du maillage.

   La solution discrète $u^h(x) = \sum U_i \tau_i(x)$ est obtenue en résolvant le problème suivant :

$$\sum_j < \tau_i' \tau_j' > U_j \;\; = < \tau_i f >$$

   Il faut juste démontrer que $\tilde{u}^h(x) = \sum u(X_i)\tau_i$ satisfait exactement les mêmes équations !

$$u'' + f \quad = \quad 0$$

$$\downarrow$$

$$< \tau_i u'' > + < \tau_i f > \quad = \quad 0$$

$\downarrow$ *En intégrant par parties !*
Les termes frontières s'annulent car $u(0) = u(1) = 0$!

$$- < \tau_i' u' >_+ \underbrace{\Big[\tau_i u' \Big]_0^1}_{=0} + < \tau_i f > \quad = \quad 0$$

$\downarrow$ *En intégrant par parties à nouveau sur chaque élément e !*
Et en observant que $\tau_i'' = 0$ dans tout élément !

$$\underbrace{\sum_e < \tau_i'' u >_{\Omega_e}}_{=0} - \sum_e \Big[\tau_i' u \Big]_e + < \tau_i f > \quad = \quad 0$$

$\downarrow$ *En remplaçant u par $\tilde{u}^h(x) = \sum u(X_i)\tau_i$!*
Car l'expression globale obtenue ne dépend que des valeurs nodales !
Attention : ceci n'est vrai qu'en 1D !

$$\underbrace{\sum_e < \tau_i'' \tilde{u}^h >_{\Omega_e}}_{=0} - \sum_e \Big[\tau_i' \tilde{u}^h \Big]_e + < \tau_i f > \quad = \quad 0$$

$\downarrow$ *En effectuant l'opération inverse de la dernière intégrale par parties.*

$$- < \tau_i' \; (\tilde{u}^h)' > + < \tau_i f > \quad = \quad 0$$

$\downarrow$ *Et en développant l'interpolation $\tilde{u}^h$!*

$$\sum_j < \tau_i' \tau_j' > u(X_j) \quad = \quad < \tau_i f > \qquad \square$$

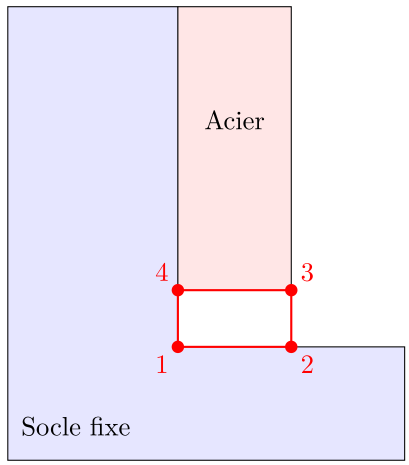
   On a bien démontré que $u^h = \tilde{u}^h$!

   Grâce au formulaire, de nombreux étudiants ont recopié servilement la solution de 2022 !
   La clé du miracle : l'intersection entre deux segment 1D est un point unique avec la valeur nodale !
   Ce n'est évidemment plus le cas en 2D et 3D malheureusement !
   Pour les curieux, noter que j'ai un peu peaufiné et simplifié ma démonstration :-)

2 Ecrasement d'un joint en caoutchouc

Nous souhaitons étudier la déformation d'un joint de section rectangulaire coincé entre une pièce métallique mobile sur sa partie supérieure et une partie fixe sur sa partie inférieure et gauche. Nous allons considérer que le joint colle à l'acier et glisse sur l'autre partie. En utilisant un **unique** élément fini bilinéaire et les équations de l'élasticité linéaire en tensions planes, nous allons calculer les déplacements du joint pour un déplacement vertical (vers le bas) de $\delta = 1\ mm$ imposé à l'acier.

$E = 1\ MPa$
$\nu = 0.4$



	X_i	Y_i
1	$-1.00\ cm$	$0.00\ cm$
2	$1.00\ cm$	$0.00\ cm$
3	$1.00\ cm$	$1.00\ cm$
4	$-1.00\ cm$	$1.00\ cm$

La matrice du système discret pour les déplacements $[U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, U_4, V_4]$ est donnée par :

$$\mathbf{A}_{ij} \quad = \quad \left[\begin{array}{c|c} < \tau_{i,x} A \tau_{j,x} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,x} B \tau_{j,y} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,x} > \\ \hline < \tau_{i,y} B \tau_{j,x} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,y} A \tau_{j,y} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,x} > \end{array} \right]$$

avec les constantes associées aux tensions planes : $A = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$ $B = \dfrac{E\nu}{(1-\nu^2)}$ et $C = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

1. Donner le nombre de composantes distinctes non-nulles du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$ dans le cas des tensions planes.

   En tensions planes, on a 3 composantes disctinctes du tenseur de Cauchy ($\sigma_{xx}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$) et 4 composantes disctinctes du tenseur des déformations infinitésimales ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$).

   Tout ce qui suit n'était pas demandé !
   Mais cela peut toutefois éclairer les très nombreux étudiants qui ont échoué à cette question très simple !

   On écrit les équations tridimensionnelles de comportement de l'élasticité linéaire.

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)}}_{2\mu} \boldsymbol{\epsilon} + \underbrace{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{\lambda} tr(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta}$$

   Ensuite, on exprime ϵ_{zz} en termes de ϵ_{xx} et ϵ_{yy} en sachant que la contrainte σ_{zz} est nulle.

$$0 = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)}\,\epsilon_{zz} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz})}_{\sigma_{zz}}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{zz}\,\frac{(-1+2\nu-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}) \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\nu}{(\nu-1)}\,(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy})
\end{aligned}$$

En substituant ϵ_{zz} par cette expression, on obtient les équations de l'élasticité en tensions planes

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\,(\epsilon_{xx}+\nu\epsilon_{yy}) &&= A\epsilon_{xx}+B\epsilon_{yy} \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}\,(\nu\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}) &&= A\epsilon_{yy}+B\epsilon_{xx} \\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)}\,\epsilon_{xy} &&= 2C\epsilon_{xy}
\end{aligned}}$$

avec les trois constantes définies par $A = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$ $B = \dfrac{E\nu}{(1-\nu^2)}$ *et* $C = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

2. Ecrire les fonctions de forme $\phi_i(x,y)$ pour l'unique élément.

   Les quatres fonctions de forme et leurs dérivées sont données par :

$\phi_1(x,y) = (1-x)(1-y)/2$	$\phi_{1,x} = -(1-y)/2$	$\phi_{1,y} = -(1+x)/2$
$\phi_2(x,y) = (1+x)(1-y)/2$	$\phi_{2,x} = (1-y)/2$	$\phi_{2,y} = -(1+x)/2$
$\phi_3(x,y) = (1+x)y/2$	$\phi_{3,x} = y/2$	$\phi_{3,y} = (1+x)/2$
$\phi_4(x,y) = (1-x)y/2$	$\phi_{4,x} = -y/2$	$\phi_{4,y} = (1+x)/2$

   Cette question est facile et peu d'erreurs sont donc admises.
   En particulier, il fallait veiller à obtenir les expressions correctes, en vérifiant que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\phi_i &= 1, \\
\sum_{i=1}^{4}\phi_{i,x} &= \sum_{i=1}^{4}\phi_{i,y} = 0.
\end{aligned}$$

3. Quels sont les déplacements nodaux qu'il faut imposer ?

   $U_3 = U_3 = 0$ *et* $V_3 = V_4 = -\delta$, *car le joint colle à l'acier.*
   $U_1 = V_1 = V_2 = 0$ *car le joint glisse sur le mur.*
   En conclusion, il y n'a qu'une unique valeur nodale inconnue U_2.

4. Quelles sont les composantes de la matrice discrète nécessaires pour obtenir l'unique inconnue[1] ?

   Il ne faut calculer que trois termes de la matrice de rigidité.

[1] Il est possible de répondre en représentant graphiquement la matrice et le vecteur et en cochant les termes adéquats !

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
\square & \square & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare & \square & \blacksquare \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\delta \\ 0 \\ -\delta \end{bmatrix}
$$

Les trois termes requis sont respectivement donnés par les expressions.

$$
\begin{array}{rclcl}
A_{33} & = & A < \phi_{2,x}\phi_{2,x} > & + & C < \phi_{2,y}\phi_{2,y} > \\
A_{36} & = & B < \phi_{2,x}\phi_{3,y} > & + & C < \phi_{2,x}\phi_{3,y} > \\
A_{38} & = & B < \phi_{2,x}\phi_{4,y} > & + & C < \phi_{2,x}\phi_{4,y} >
\end{array}
$$

5. Calculer ces composantes (et uniquement celles-là !) de la matrice de raideur, en utilisant une règle d'intégration numérique avec un **unique** point d'intégration.

   L'unique point d'intégration est le centre de gravité de l'élément $(0, \frac{1}{2})$.
   Le poids est la surface du triangle $w = 2$.
   Il faut donc juste évaluer les dérivées requises et les 3 composantes de la matrice.

$\phi_{2,x} = 1/4$	$\phi_{2,y} = -1/2$
$\phi_{3,x} = 1/4$	$\phi_{3,y} = 1/2$
$\phi_{4,x} = -1/4$	$\phi_{4,y} = 1/2$

   Et on obtient immédiatement les trois composantes requises :

$$
\begin{array}{rcl}
A_{33} & = & 2\left(\dfrac{A}{16} + \dfrac{C}{4}\right) \\[2ex]
A_{36} & = & 2\left(\dfrac{B}{8} - \dfrac{C}{8}\right) \\[2ex]
A_{38} & = & 2\left(\dfrac{B}{8} + \dfrac{C}{8}\right)
\end{array}
$$

   Il ne fallait pas calculer les intégrales de manière analytique !
   Evidemment, l'intégration numérique ne fournit pas le résultat exact....
   mais c'est nettement plus rapide et moins calculatoire.
   Il faut lire l'énoncé de la question avant de se lancer sans réfléchir dans de longs calculs !

6. Calculer l'unique déplacement nodal latéral inconnu (avec les unités !).

   L'unique équation se réduit à :

$$
(A + 4C)\ U_2 \quad = \quad \delta\ (4B)
$$

$$
U_2 \quad = \quad \delta\ \frac{(4B)}{(A+4C)} \quad = \quad \delta\ \frac{8\nu}{(6-4\nu)} \quad = \quad \delta\ \frac{8}{11}
$$

   Il est amusant d'observer que le déplacement est indépendant de E et n'est qu'une image du coefficient de Poisson. Par contre, la valeur de la force à appliquer est directement proportionnelle à la valeur du module de Young...

On conclut finalement que déplacement longitudinal est $\boxed{U_2 = 0.727\ [mm]}$.

Et non : c'est pas la même valeur qu'en 2006 !