Prière de remplir avec soin, en caractères d'IMPRIMERIE (en MAJUSCULES !), cette entête !

LEPL1110	Nom :	**Numéro magique**
Eléments finis	Prénom :	
Juin 2024	Filières-mineure :	

1 Le miracle à une dimension !

Avec des éléments finis linéaires continus, on a une solution approchée $u^h(x) = \sum U_i \tau_i(x)$ de la solution exacte $u(x)$ du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u''(x) + f(x) & = & 0 & \qquad x \in]0,1[\\ \\ u(0) & = & 0 & \\ u(1) & = & 0 & \end{array} \right.$$

1. Ecrire la formulation faible de ce problème.
   Définir rigoureusement l'espace de Sobolev auquel appartient la solution faible !
2. Ecrire ensuite la formulation discrète qui permet d'obtenir les valeurs nodales U_i.
3. Démontrer formellement que les valeurs nodales obtenues ainsi obtenues seront exactes !
   En d'autres mots $u^h(X_i) = u(X_i)$ pour les noeuds X_i du maillage.

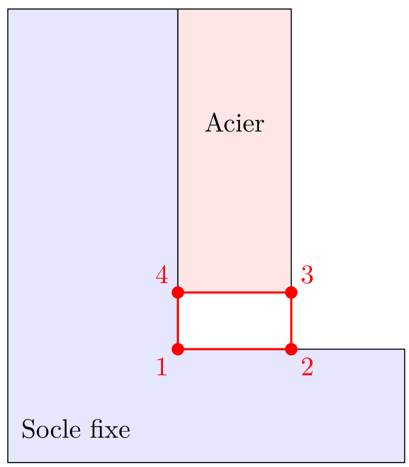
Prière de remplir avec soin, en caractères d'IMPRIMERIE (en MAJUSCULES !), cette entête !

LEPL1110	Nom :	**Numéro magique**
Eléments finis	Prénom :	
Juin 2024	Filières-mineure :	

2 Ecrasement d'un joint en caoutchouc

Nous souhaitons étudier la déformation d'un joint de section rectangulaire coincé entre une pièce métallique mobile sur sa partie supérieure et une partie fixe sur sa partie inférieure et gauche. Nous allons considérer que le joint colle à l'acier et glisse sur l'autre partie. En utilisant un **unique** élément fini bilinéaire et les équations de l'élasticité linéaire en tensions planes, nous allons calculer les déplacements du joint pour un déplacement vertical (vers le bas) de $\delta = 1\ mm$ imposé à l'acier.

$E = 1\ MPa$
$\nu = 0.4$



	X_i	Y_i
1	$-1.00\ cm$	$0.00\ cm$
2	$1.00\ cm$	$0.00\ cm$
3	$1.00\ cm$	$1.00\ cm$
4	$-1.00\ cm$	$1.00\ cm$

La matrice du système discret pour les déplacements $[U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, U_4, V_4]$ est donnée par :

$$\mathbf{A}_{ij} \quad = \quad \left[\begin{array}{c|c} < \tau_{i,x} A \tau_{j,x} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,x} B \tau_{j,y} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,x} > \\ \hline < \tau_{i,y} B \tau_{j,x} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,y} A \tau_{j,y} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,x} > \end{array} \right]$$

avec les constantes associées aux tensions planes : $A = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}$ $B = \dfrac{E\nu}{(1-\nu^2)}$ et $C = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

1. Donner le nombre de composantes distinctes non-nulles du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$ dans le cas des tensions planes.
2. Ecrire les fonctions de forme $\phi_i(x, y)$ pour l'unique élément.
3. Quels sont les déplacements nodaux qu'il faut imposer ?
4. Quelles sont les composantes de la matrice discrète nécessaires pour obtenir l'unique inconnue[1] ?
5. Calculer ces composantes (et uniquement celles-là !) de la matrice de raideur, en utilisant une règle d'intégration numérique avec un **unique** point d'intégration.
6. Calculer l'unique déplacement nodal latéral inconnu (avec les unités !).

[1] Il est possible de répondre en représentant graphiquement la matrice et le vecteur et en cochant les termes adéquats !