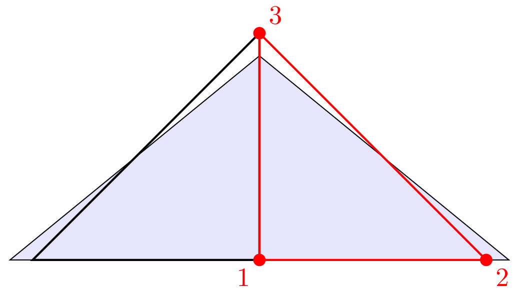
LEPL1110 : solution de l'examen de juin 2025

Affaissement d'une digue sous son poids propre

Le maire de St-Eustache sur Somme a fait ériger une longue digue de section triangulaire sur un chemin de halage en béton. La digue a 1 m de haut et une base de 2 m et une longueur de 800 m, les extrémités de l'ouvrage sont libres. En utilisant un **unique** élément triangulaire $P_1 - C_0$ et les équations de l'élasticité linéaire, nous allons calculer l'affaissement vertical au sommet de la digue et le déplacement horizontal de la base sous l'effet du poids propre de la terre, si on suppose un glissement parfait de la terre sur le béton. Les caractéristiques de la terre de remblais sont données dans le tableau ci-dessous.

$$E = \frac{1}{6}\ MPa \qquad \nu = 0.2 \qquad \rho = 2000\ kg/m^3$$



La matrice du système discret pour les déplacements $[U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3]$ est donnée par :

$$\mathbf{A}_{ij} \quad = \quad \left[\begin{array}{c|c} < \tau_{i,x} A \tau_{j,x} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,x} B \tau_{j,y} > + < \tau_{i,y} C \tau_{j,x} > \\ \hline < \tau_{i,y} B \tau_{j,x} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,y} > & < \tau_{i,y} A \tau_{j,y} > + < \tau_{i,x} C \tau_{j,x} > \end{array}\right]$$

avec les constantes A, B et C associées aux tensions ou aux déformations planes.

1. Faut-il utiliser des déformations planes ou des tensions planes dans ce problème?

   Dans le monde des ingénieurs et de l'industrie, on utilise le rapport entre la taille de la section (environ 1 mètre) et la longueur transversale (environ 800 mètres) comme critère pour faire ce choix : comme $1 \ll 800$, on choisira donc les déformations planes. Cela a été très bien expliqué par Pierre-Alexandre Beaufort au passage !

   Evidemment, comme l'enseignant est taquin, il a également précisé que les deux extrémités sont libres : ce qui est la caractéristique d'un problème en tension plane. Et donc, oui si la terre de remblai peut parfaitement glisser sur le sol en béton : c'est la caractéristique parfaite de tensions planes. Donc si on suit la description mathématique et théorique du problème, il faudrait choisir les tensions planes : c'est ce que ferait le mathématicien !

   Mais, est-ce vraiment réaliste d'imaginer que la digue va glisser sur le béton sur plus de 800 mètres. Eh bien non, c'est pourquoi l'ingénieur choisira les déformations planes et comme vous êtes des ingénieurs, il fallait donc choisir des déformations planes. Toutefois, ce choix n'a qu'un impact marginal que sur la réponse numérique finale et un mauvais choix bien argumenté pouvait être considéré favorablement par le correcteur. Bon, l'impact de cette question était marginal sur votre note finale, mais cela a généré un vrai débat parmi vous, même si la très large majorité des étudiants ont fait le choix des déformations planes. Au passage, se méfier des solutionnaires foireux mis à dessein par l'équipe didactique sur un fameux drive rien que vous orienter dans l'erreur fatale ! Plus sérieusement, j'ai changé d'avis après 20 années de cours....

2. Démontrer comment obtenir les expressions de A, B et C en termes de E et ν à partir de :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)}\boldsymbol{\epsilon} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{\delta}$$

Si vous aviez choisi les tensions planes, il suffit d'écrire la solution fournie dans l'examen de juin 2024 ! Et si vous aviez fait le bon choix des déformations planes, le calcul était encore plus simple à faire, mais il fallait un minimum d'explication.

Donc cette question (négligée par beaucoup d'étudiants) pouvait être réussie quel que soit le choix effectué dans la sous question précédente. Quelques rares étudiants taquins ou inquiets m'ont même fourni le calcul pour les deux options !

A partir des équations tridimensionnelles de comportement de l'élasticité, il suffit d'écrire les tensions planes à partir des 3 uniques composantes non nulles ϵ_{xx}, ϵ_{yy} et ϵ_{xy}.

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)}\,\epsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \left[\frac{E}{(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right]\epsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{yy} \\
\sigma_{xx} &= \left[\frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right]\epsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{yy} \\
\sigma_{xx} &= \underbrace{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{A}\,\epsilon_{xx} + \underbrace{\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{B}\,\epsilon_{yy}
\end{aligned}$$

En procédant de même pour σ_{yy}, on obtient les équations de l'élasticité en tensions planes

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{yy} &&= A\epsilon_{xx} + B\epsilon_{yy} \\
\sigma_{yy} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{xx} + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\epsilon_{yy} &&= B\epsilon_{xx} + A\epsilon_{yy} \\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\nu)}\epsilon_{xy} &&= 2C\epsilon_{xy}
\end{aligned}}$$

avec les trois constantes $A = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $B = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ *et* $C = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Juste fournir l'expression des trois constantes sans aucune explication ne rapportait aucun point ! Il fallait vraiment me donner l'impression que vous aviez compris quelque chose !

3. Définir les **quatre** conditions essentielles à appliquer en termes de déplacements nodaux.

   $V_1 = V_2 = 0$ car la terre glisse sur le sol.
   $U_1 = U_3 = 0$ car le problème est symétrique.
   En conclusion, il y n'a que deux valeurs nodales inconnues U_2 et V_3.

   Comme la terre n'est pas incompressible, il n'y a aucune raison de supposer que les valeurs absolues soient identiques. Evidemment V_3 sera négatif et U_2 positif : on peut immédiatement imaginer que la terre va se comprimer et que $|V_3| > |U_2|$ dans la solution numérique !

   C'est donc une mauvaise idée de supposer que les deux degrés de libertés sont identiques !

4. Ecrire les fonctions de forme $\phi_i(x, y)$ et les dérivées pour l'unique élément[1].

   Les trois fonctions de forme et leurs dérivées sont données par :

$\phi_1(x,y) = 1 - x - y$	$\phi_{1,x} = -1$	$\phi_{1,y} = -1$
$\phi_2(x,y) = x$	$\phi_{2,x} = 1$	$\phi_{2,y} = 0$
$\phi_3(x,y) = y$	$\phi_{3,x} = 0$	$\phi_{3,y} = 1$

   Cette question est élémentaire et peu d'erreurs sont donc admises.
   En particulier, il fallait veiller à obtenir les expressions correctes, en vérifiant que:

$$
\begin{array}{rcccl}
\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \phi_i & = & 1, & & \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \phi_{i,x} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \phi_{i,y} & = & 0.
\end{array}
$$

5. Déterminer quelles composantes de la matrice de raideur et du membre de droite sont nécessaires pour obtenir les deux déplacements inconnus[2].

   Il ne faut calculer que quatre termes de la matrice de rigidité.
   Et il n'y aura qu'un unique membre de droite non nul à évaluer car $f_x = 0$.

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
 & 1 & & & & \\
 & & \blacksquare & & & \blacksquare \\
 & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & \\
 & & \blacksquare & & & \blacksquare
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_2 \\ V_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \blacksquare \\ 0 \\ 0 \\ \blacksquare \end{bmatrix}
$$

   Tous le termes requis sont respectivement donnés par les expressions.

$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & A_{33} & = & A < \phi_{2,x}\phi_{2,x} > \; + \; C < \phi_{2,y}\phi_{2,y} > \\
A_{36} & = & A_{63} & = & B < \phi_{2,x}\phi_{3,y} > \; + \; C < \phi_{2,x}\phi_{3,y} > \\
 & & A_{66} & = & A < \phi_{3,y}\phi_{3,y} > \; + \; C < \phi_{3,x}\phi_{3,x} > \\
 & & & & \\
 & & B_3 & = & < f_x \phi_2 > \\
 & & B_6 & = & < f_y \phi_3 >
\end{array}
$$

   avec $f_x = 0$ et $f_y = -\rho g$.

---

[1] Il faut respecter scrupuleusement la numérotation de la figure !
[2] Il est possible de répondre en représentant graphiquement la matrice et le vecteur et en cochant les termes adéquats !

6. Calculer ces composantes de la matrice de raideur et du membre de droite.

7. Obtenir l'expression symbolique des deux déplacements inconnus.

   Comme tous les termes sont constants à l'exception de ϕ_3, le calcul est vraiment élémentaire.
   Oui : la superficie du triangle est $\frac{1}{2}$ et le volume du tétraèdre construit par ϕ_3 vaut $\frac{1}{6}$.
   Il n'y a normalement aucun calcul à faire : juste observer quels sont les termes nuls.

   Cela d'obtenir le système réduit :

$$\begin{bmatrix} A/2 & B/2 \\ B/2 & A/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g/6 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{B}{A} V_3 \\ -\frac{B^2}{2A} V_3 + \frac{A}{2} V_3 &= -\frac{\rho g}{6} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{B}{A} V_3 \\ \frac{A^2 - B^2}{A} V_3 &= -\frac{\rho g}{3} \end{aligned}$$

On conclut donc :
$$\boxed{\begin{aligned} V_3 &= -\frac{\rho g}{3} \, \frac{A}{A^2 - B^2} \\ U_2 &= \frac{\rho g}{3} \, \frac{B}{A^2 - B^2} \end{aligned}}$$

Au passage, ce n'est pas une bonne idée de remplacer A et B car leur expressions complexes en termes de E et de ν. Pourquoi pensez-vous qu'on a introduit ces constantes intermédiaires, si ce n'est pour simplifier l'algèbre, les gaminous ?

8. Calculer la valeur numérique des deux déplacements (avec leurs unités !).
Il est suggéré d'utiliser $g = 10\text{m/s}^2$ dans ce calcul.

Il est utile de calculer quelques expressions intermédiaires pour obtenir le résultat final.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, E &= \frac{0.8}{1.2\times 0.6}\, E &= \frac{80}{72}\, E &= \frac{20}{18}\, E \\
B &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, E &= \frac{0.2}{1.2\times 0.6}\, E &= \frac{20}{72}\, E &= \frac{5}{18}\, E
\end{aligned}
$$

Il est judicieux de garder le même dénominateur pour les deux constantes :-) On peut ensuite calculer assez aisement le facteur le plus compliqué de l'expression demandée.

$$
\frac{B}{A^2 - B^2} = \frac{5}{18}\,\frac{18^2}{400-25}\,\frac{1}{E} = \frac{90}{375}\,\frac{1}{E} = \frac{6}{25}\,\frac{1}{E}
$$

Et on conclut de manière simple :

$$
U_2 = \frac{\rho g}{3}\,\frac{B}{A^2-B^2}\,\frac{1}{E} = \frac{6}{25}\,\frac{\rho g}{3E} = \frac{6}{25}\,\frac{2\times 6\times 10^4}{3\times 10^6} = \frac{24}{25}\,10^{-2} = 0.96 \text{ cm}
$$

$$
V_3 = -\frac{A}{B}U_2 = -4U_2 = -\frac{96}{25}\,10^{-2} = -3.84 \text{ cm}
$$

Bravo à la petite dizaine d'étudiants sur 260 qui ont obtenu ce résultat :-)
Et pourtant, c'était très simple et vous aviez largement le temps d'y arriver :-)

La pondération des sept sous-questions était approximativement 2-4-1-1-3-4-3. Il était donc possible d'obtenir 15/20*, en se trompant sur le choix de déformations planes et en négligeant totalement le calcul numérique du dernier point. Evidemment, c'est toujours stupide de perdre son temps et son énergie à essayer de calculer numériquement un truc que vous savez faux ! L'examen était simple, mais cela a quand-même perturbé pas mal d'étudiants.... En particulier, la sous-question deux a été soit froidement ignorée ou a fait l'objet des réponses assez surréaliste : ce qui n'est pas une mauvaise idée pour le pays de Magritte.*