Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

1 Pour un triangle linéaire parent définis par les trois sommets [0, 0], [1, 0], [1, 1], calculer la matrice locale définie par :

$$\hat{A}_{ij} = \int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} d\xi d\eta = \frac{1}{2}$$

2 On considère maintenant un maillage composé de six triangles...

	1	2	3		X_i	Y_i
I	3	4	1	1	1.0	2.0
II	6	4	3	2	2.0	2.0
III	6	7	4	3	0.0	1.0
IV	7	5	4	4	1.0	1.0
V	4	5	2	5	2.0	1.0
VI	4	2	1	6	0.0	0.0
				7	1.0	0.0

Dessiner le maillage en y indiquant noeuds et éléments :-)

En assemblant les six matrices locales, obtenir la matrice globale définie par :

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial \tau_i}{\partial x} \frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y} \frac{\partial \tau_j}{\partial y} dx dy = \frac{1}{2}$$

On peut immédiatement observer que les matrices locales $A_{ij}^I = A_{ij}^{III} = A_{ij}^V = \hat{A}_{ij}$.
 Les autres matrices locales $A_{ij}^{II} = A_{ij}^{IV} = A_{ij}^{VI}$ sont aussi égales entre elles, mais légèrement différentes de $\hat{A}_{ij}$.
 Toutefois, elles peuvent être déduites à partir de $\hat{A}_{ij}$ en effectuant judicieusement quelques permutations.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

3

La fonction suivante effectue l'intégration numérique d'une fonction quelconque par une règle de Gauss-Legendre à 4 points sur un quadrilatère défini par ses quatre sommets. Malheureusement, quelques lignes de code ont été subtilisées par un informaticien facétieux. Il s'agit donc de compléter l'implémentation ci-dessous.

```
double gaussIntegrate(double x[4], double y[4], double (*f) (double, double))
{
    double I = 0;
    const double a = 0.577350269189626;
    const double xsi[4] = { a, a, -a, -a};
    const double eta[4] = { a, -a, -a, a};
    const double weight[4] = {1.0,1.0,1.0,1.0};
    int i,j;

    for (i=0; i<4; i++) {
        double xsiLoc = xsi[i];
        double etaLoc = eta[i];
        double phi[4] = { (1+xsiLoc)*(1+etaLoc)/4.0, (1-xsiLoc)*(1+etaLoc)/4.0,
                          (1-xsiLoc)*(1-etaLoc)/4.0, (1+xsiLoc)*(1-etaLoc)/4.0 };
        double dphidxsi[4] = {(1+etaLoc)/4.0, -(1+etaLoc)/4.0, -(1-etaLoc)/4.0, (1-etaLoc)/4.0};
        double dphideta[4] = {(1+xsiLoc)/4.0, (1-xsiLoc)/4.0, -(1-xsiLoc)/4.0, -(1+xsiLoc)/4.0};
        double dxdxsi = 0;
        double dydxsi = 0;
        double dxdelta = 0;
        double dydeta = 0;

        }

    return I;
}
```

4

L'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

est donné par une des options ci-dessous :

1. $u(x, t) = f(x - ct)$
2. $u(x, t) = g(x + ct)$
3. $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$
4. $u(x, t) = f(x - ct) g(x + ct)$

Indique ton choix ici :-)

où les fonctions f et g sont déterminées par les conditions aux limites.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

5

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

6

Définir¹ $H_1(]0, 1[)$: espace fonctionnel de Sobolev sur l'intervalle $]0, 1[$:

7

Considérons un espace d'Hilbert quelconque.
Quelle est l'unique affirmation exacte ?

1. Tout espace vectoriel avec un produit scalaire est un espace d'Hilbert.
2. Tout espace d'Hilbert est un espace de Banach.
3. Un espace d'Hilbert ne contient que des formes continues et coercives.
4. Les espaces d'Hilbert sont des espaces fonctionnels.

Indique ton choix ici :-)

¹La question précise bien que l'on se restreint au cas unidimensionnel : il ne faut donc pas me sortir des tas de dérivées partielles dans la définition : hein :-)

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

8 Avec des éléments finis linéaires continus, on calcule une solution approchée $u^h(x) \approx u(x)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + f(x) = 0 & x \in]0, 1[\\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Démontrer formellement que les valeurs nodales obtenues ainsi obtenues seront parfaitement exactes !
En d'autres mots $u^h(X_i) = u(X_i)$ pour les noeuds X_i du maillage.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

9

Pour modéliser notre tsunami en omettant le terme de Coriolis, nous considérons le modèle unidimensionnel :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\tau}{\rho h} - \gamma u \end{cases}$$

Donner les unités de τ et de γ .

Expliquer brièvement le sens physique de ces deux paramètres.

10

Nous allons maintenant ajouter le terme d'inertie à notre modèle : cela aura évidemment un impact sur la vitesse de propagation de l'onde qui propage à l'avant et à l'arrière de l'impact initial. La norme de deux vitesses ne sera plus identique !

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\tau}{\rho h} - \gamma u \end{cases}$$

Calculer les deux vitesses de propagation en calculant les valeurs propres de la matrice du système différentiel.

Prière de remplir, en MAJUSCULES, votre nom, votre prénom, votre noma et votre numéro magique sur chaque face.

LEPL1110	Nom :	Numéro magique
Avril 2022		
	Prénom :	Noma

11

Ecrire une fonction qui alloue une matrice de réels de taille $n \times n$, en imposant que l'ensemble des composantes de la matrice soient stockées de manière parfaitement contigue dans la mémoire de l'ordinateur. Ensuite, initialiser la matrice par l'expression $A_{ij} = ni + j$, en utilisant respectivement une expression du type `A[i][j]` ou du type `B[i]` en ayant une vue de la mémoire allouée comme un tableau à deux indices ou comme un vecteur à un indice.

```
double** matrixCreate(int size)
{

}

int size = 4;
double **A = matrixCreate(size);
double *B = A[0];
```

12

On compile avec gcc le programme suivant et si un exécutable est créé, on l'exécute.

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int j, tab[3];
    int *ptr = tab;
    for(j=0; j < 3; j++)
        tab[j] = 5;
    *(ptr + 1) = 3;
    printf("[ %d %d %d ]\n", tab[0], tab[1], tab[2]);
    return 0;}
```

1. Il n'est pas possible de le compiler.
2. Il provoque une erreur à l'exécution.
3. Il fonctionne et affiche [5,5,5]
4. Il fonctionne et affiche [3,5,5]
5. Il fonctionne et affiche [5,3,5]

Indique ton choix ici :-)